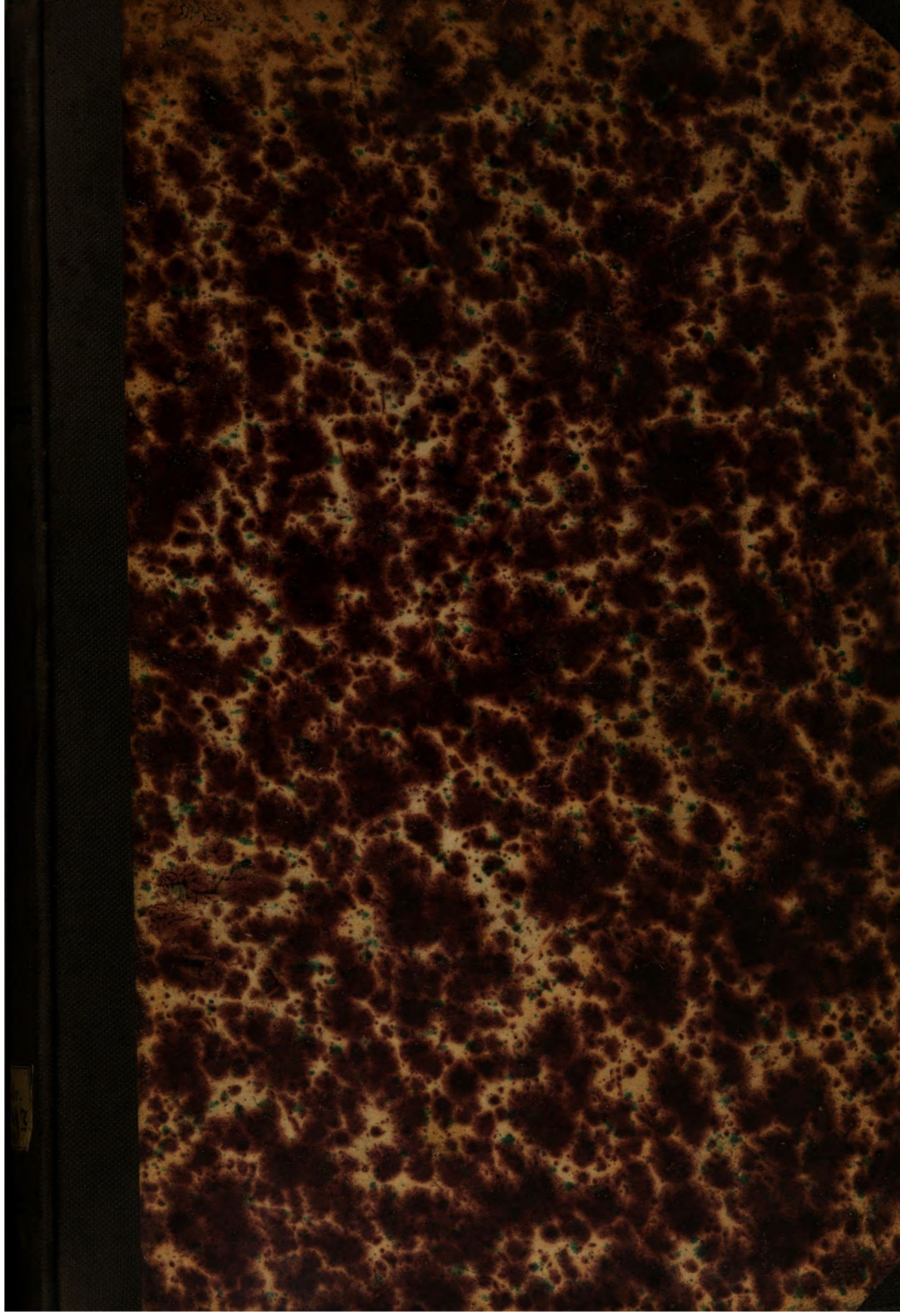




A. hydr.

48 gr

Heinemann

DIE
RATIONAL-THEORIE
DER
BEWEGUNG DES WASSERS
ALS
LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK
DIE
RATIONAL-THEORIE
DER
BEWEGUNG DES WASSERS
für den praktischen Gebrauch des Hydrotektonen
ALS
LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK.

Hugo Meinemann,
Königsberg i. Pr.

Mit 115 Holzschnitten.

BAGEN.

Verlag von Otto Haeusermann.

1872.

LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK.

BEWEGUNG DES WASSERS

RATIONAL-THEORIE

VON

DIE

LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK

BEWEGUNG DES WASSERS

LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK

DIE
RATIONAL-THEORIE
DER
BEWEGUNG DES WASSERS
ALS
LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK

und
für den praktischen Gebrauch des Hydrotekten

auf vollständig neuen Grundlagen bearbeitet

von
Hugo Heinemann,
Königlichem Bau-Inspector in Hagen.

Mit 115 Holzschnitten.

Hagen,

Verlag von Otto Hammerschmidt.

1872.

DIE
RATIONAL-THEORIE
DER
BEWEGUNG DES WASSERS
ALS
LEHRBUCH DER HYDRODYNAMIK

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.



Verlag von Otto Hammettschmidt
Hagen

1872

Vorwort.

Es widerspricht aller Erfahrung, dass eine Wissenschaft ihren seitherigen Entwicklungsgang plötzlich unterbricht, alle Anknüpfungspunkte an ihre Vergangenheit fallen lässt und sich eben so rasch auf ganz neuer Grundlage wieder aufbaut.

Ein wohlberechtigtes Misstrauen wird daher dem vorliegenden Werke entgegen getragen werden. Wenn ich nun in der Erwartung desselben mit einigem Zagen vor den Fachmann trete, glaube ich andererseits in dem gerechten Anspruche eine Ermuthigung zu finden, welchen ich auf eine maassvolle Begrenzung seiner Erwartungen erheben kann. Ein solcher Neubau, wie er mit mir längst als nothwendig erkannt sein wird, vollendet sich nicht an einem Tage, auch nicht in einem Jahre, noch durch die schwache Kraft eines einzigen Mannes. Ich kann mich weder den Erfinder noch den Erbauer des vorliegenden Werkes nennen. Der Bauplan, nach dem Mutter Natur täglich und stündlich schafft und baut, ist so alt wie ihre Schöpfung, aber ihre unscheinbare und bescheidene Bauhütte öffnet sich nur demjenigen, der es der Mühe für werth hält anzuklopfen und seinen Blick nicht in dem Bannkreise vorgefasster Ideen und traditioneller Schemen gefangen halten lässt. Den Eingang zu dieser bescheidenen Hütte glaube ich gefunden zu haben, und kann nur erzählen, was ich gesehen habe, soweit meine Wanderungen reichten. Es wäre Selbstsucht von mir gewesen, hätte ich den Bericht darüber der Oeffentlichkeit vorenthalten, bis es mir gelungen war, den ganzen Bau zu erforschen, so weit er für den Fachmann Interesse haben kann, denn mit meinem Reiseberichte in der Hand, wird es ihm nicht schwer werden, mit frischen Kräften weiter zu forschen und auch da einzudringen, wohin mich Zeit und Ermüdung nicht gelangen liessen.

Weder Form noch Inhalt des vorliegenden Werkes wollen einen Anspruch auf Vollendung und Unfehlbarkeit erheben, sind sich viel-

mehr noch mancher Mängel und Schwächen in der Form bewusst, aber das Material, welches es liefert, wird weder zu verwerfen noch zu leugnen sein.

Als Lehrbuch der Hydromechanik wird es dem Schüler klarere Vorstellungen der einzelnen Vorgänge bieten und ihn von der Zumuthung entbinden, Unbegreifliches begreifen zu müssen. Wenn einstweilen auch nicht alle bisher ungelöst gebliebene Aufgaben darin gelöst sind, wird es dem Hydrotekten dennoch den Weg zur Lösung auch weiterer Aufgaben erleichtern und ihm vor allen Dingen überall die Grenzen scharf vor Augen führen, innerhalb deren er von den Experimentalformeln ohne Gefahr Gebrauch machen kann.

Wenn ferner dem vorliegenden Werke bei dieser ersten Bearbeitung auch noch nicht der Vorzug grösserer Kürze und Einfachheit gegenüber der ältern Experimental-Theorie zugesprochen werden kann, so trägt zum grossen Theile die vielleicht übertriebene Sorgfalt daran Schuld, mit welcher ich bei Form und Stoff eine Gegenüberstellung der Anschauungen und Ergebnisse der ältern Wissenschaft zu erleichtern bestrebt gewesen bin. Ist einmal das Bedürfniss zu einer solchen Rücksichtnahme fortgefallen, so kann bei gleichem Inhalte eine ungleich grössere Gedrungenheit der Form und Consequenz der Behandlung erreicht werden.

Ich bitte Andere, vielleicht mehr dazu Berufene, das ergänzen und vollenden zu helfen, was ich begonnen, diejenigen Herrn Kritiker aber, welche in dem Berufe ihre Befriedigung finden, Alles zu zerstören, ohne Etwas aufzubauen, weniger um Schonung, als um Vorsicht und Gründlichkeit, denn ich glaube weniger mit Zufälligkeiten und Wahrscheinlichkeit, als mit bestimmten Thatsachen und Erscheinungen gerechnet zu haben.

Hagen (Westfalen).

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite
Einleitung	XI—XVI

Erster Abschnitt.

Die Molekular-Kräfte.

Die drei Constanten der tropfbaren Flüssigkeiten	1—2
§ 1. Hypothese der Molekular-Kräfte im Allgemeinen	2—6
§ 2. Wahrscheinliche Form der Wasser-Moleküle	6—8
§ 3. Molekül-Lagerung beim Wasser	8—14
§ 4. Cohäsion und Adhäsion	14—18
§ 5. Versuche zur Bestimmung der drei Constanten s , μ und φ	18—26

Zweiter Abschnitt.

Tropfenbildung, Synaphie und Capillarität.

§ 6. Tropfenbildung ohne Einwirkung äusserer Kräfte	27—29
§ 7. Hängende und abfallende Tropfen	29—40
§ 8. Aufruhende Tropfen	40—43
§ 9. Die Adhäsions-Kurve	43—50
§ 10. Aufsteige-Höhe in Haarröhrchen	50—53
§ 11. Erhebung zwischen zwei parallelen Platten	53—58

Dritter Abschnitt.

Molekular-Gleichgewicht und Bewegung.

§ 12. Allgemeines	58—59
§ 13. Verhältniss der Cohäsion zum Gewichte der Moleküle	59—61
§ 14—17. Abwälzende und drehende Bewegung	61—64
§ 18—19. Der Molekular-Stoss in centraler Richtung	64—67
§ 20. Der schiefe Molekular-Stoss	67—69
§ 21. Verzögerte und beschleunigte Bewegung	69—70
§ 22—23. Ausfluss- und Arbeits-Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers	70—74
§ 24. Contraktion	74—77
§ 25—26. Zuströmungs-Bewegung beim Ausflusse durch Oeffnungen in Gefässen	77—79
§ 27. Fortpflanzung lokaler Kraft-Einwirkungen	79—82
§ 28. Unebenheiten der benetzten Wandungen	82—85
§ 29—32. Rotirende Bewegung	85—90
§ 33. Centrifugal-Kraft und Adhäsion, Ausrundung der Kniee in Rohr- leitungen	90—92

Vierter Abschnitt.

Die Widerstands-Arbeit des bewegten Wassers.

§ 34. Aeusserer Widerstand	92—93
§ 35. Innerer und Gesamt-Widerstand	93—96

	Seite
§ 36. Widerstand in convergenten Röhren	96—97
§ 37. Widerstand in trichterartigen Gefässen	97—98
§ 38—39. Widerstand an den Gefässwandungen beim Ausflusse durch Oeffnungen	98—101
§ 40—42. Voreilungs-Widerstand in Leitungen und Flussbetten . .	101—104
§ 43. Widerstand in Gerinnen bei beschleunigter Bewegung . .	104

Fünfter Abschnitt.

Die Beziehungen der Widerstands-Arbeit des bewegten Wassers
zur beschleunigenden Kraft und zur Beschleunigung.

§ 44. Ausfluss-Geschwindigkeit, Widerstands-Arbeit und Widerstands- Kraft	105—106
§ 45. Haupt-Gleichung und Widerstands-Tabelle	106—110
§ 46. Anwendungen	111—115
§ 47. Beziehungen der Rationaltheorie zur Bewegung in Flussbetten	115—117

Sechster Abschnitt.

Ausfluss durch Oeffnungen in dünner Wand unter constantem
Drucke.

§ 48. Allgemeines	117—119
§ 49. Herleitung der Contraktions-Kurve des ausfliessenden Strahles	119—123
§ 50. Ausfluss durch Bodenöffnungen über 3 Centm. Weite aus un- begrenzten Gefässen	124—127
§ 51. Kleine Bodenöffnungen unter 3 Centm. Weite	127—129
§ 52—54. Ausfluss aus begrenzten Gefässen	129—134
§ 55. Ausfluss durch Oeffnungen in dünnen Seitenwänden	134—137
§ 56. Ausfluss durch Oeffnungen in Seitenwänden unter Wasser aus unbegrenzten Gefässen	137—139
§ 57. Offene Ueberfälle in dünner Wand unbegrenzter Gefässe . .	139—141
§ 58. Ausfluss durch dünne Seitenwände aus Gefässen mit begrenztem Querschnitte	141—143
§ 59. Verschiedene Strahlen-Querschnitte	143—144
§ 60. Der Luft-Widerstand und der Ausfluss unter Wasser	144—148
§ 61—63. Ausfluss aus bewegten Gefässen	148—151
§ 64—65. Ausfluss aus zusammengesetzten Gefässen	151—154

Siebenter Abschnitt.

Ausfluss durch Mundstücke, Ansatzröhren, Düsen, Wandungen
von bestimmter Dicke, Gerinne und Schützöffnungen bei
constantem Drucke.

§ 66—67. Mundstücke in Wandungen bis zur Dicke des $1\frac{1}{3}$ fachen Durchmessers der Oeffnung	155—160
§ 68. Allgemeines zum Ausflusse durch kurze Ansatzröhren . . .	160—163
§ 69—71. Ausfluss durch cylindrische und prismatische Ansatzröhren	163—168
§ 72—73. Divergente Ansatzröhren	168—173
§ 74. Convergente Ansatzröhren ohne Mundstücke	173—178
§ 75. Desgl. mit ausgerundeten Mundstücken	178—180
§ 76. Innere Ansatzröhren	180—181

	Seite
§ 77. Schiefe Ansatzröhren.	182—183
§ 78. Einfluss der absoluten Grösse der Oeffnungen bei Ansatzröhren	183
§ 79. Kurze prismatische Ansatzröhren an Gefässen von beschränktem Querschnitte	183—184
§ 80. Einfluss der Lage der Oeffnung zu den einschliessenden Wandungen	184—188
§ 81. Schützöffnungen in geneigten Wänden	188—192
§ 82. Schützöffnungen mit ausgerundeten Mündungen	192
§ 83. Oeffnungen in scharfkantigen Wänden von bestimmter Dicke	192—195

Achter Abschnitt.

Ueberfall- und Stauwehre, Bewegung in Gerinnen, Kanälen, Flüssen und Rohrleitungen.

§ 84. Ueberfälle in Seitenwänden von Gefässen und Gerinnen . . .	196—198
§ 85—86. Vollkommene Stauwehre	198—203
§ 87. Unvollkommene Stauwehre	203—204
§ 88. Verengungen in Gerinnen, Kanälen und Flussbetten	205—206
§ 89—90. Bewegung des Wassers in Flussbetten	206—210
§ 91. Ausfluss aus Seitenöffnungen durch vorliegende Gerinne . .	210—219
§ 92. Rückstau	219—223
§ 93. Schiefe Stauwehre	223
§ 94. Bewegung in Rohrleitungen	223
§ 95. Erweiterungen und Verengungen in Rohrleitungen	225—228
§ 96. Widerstand in Knien und Krümmungen	229—232
§ 97. Zweigröhren	232—233

Neunter Abschnitt.

Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe.

§ 98—99.	234—238
------------------	---------

Zehnter Abschnitt.

Stoss und Widerstand des bewegten Wassers gegen feste Körper, Reaktion und hydraulischer Druck.

§ 100. Allgemeine Entwicklung des Wasserstosses	239—241
§ 101. Gerader Stoss eines isolirten Strahles	241—245
§ 102. Schiefer Stoss	245—249
§ 103. Arbeit und Maximal-Leistung des stossenden Wassers . .	249—251
§ 104. Stoss isolirter Strahlen gegen begrenzte Flächen	251—254
§ 105. Vergrösserung des Widerstandes benetzter Flächen durch Unebenheiten	254—257
§ 106. Widerstand eingetauchter Körper in bewegtem Wasser . .	257—260
§ 107. Widerstand des Graswuchses in Gräben und Kanälen . .	260—261
§ 108. Reaktionswirkung des bewegten Wassers	261—263
§ 109. Arbeit der Reaktion	263—265
§ 110. Hydraulischer Druck in geschlossenen Leitungen	265—275
§ 111. Hydraulischer Druck in offenen Leitungen	275—278
§ 112. Die Geschwindigkeits-Kurve	278—284

Verbesserungen.

- Seite 49 Zeile 9 von unten ist anstatt $\mu'' \frac{s' \cdot \sin \alpha}{\tan \alpha}$ zu setzen $\mu'' = \frac{s' \cdot \sin \alpha}{\tan \alpha}$.
- » 64 » 7 von oben ist anstatt Attraktions m zu setzen Attraktion s_m .
- » 64 » 8 » » ist »auf« anstatt hinter c_4 vor Oc_4 zu setzen.
- » 64 » 9 » » bei $s_m \sin \alpha$ ist a zu streichen.
- » 74 » 22 » » ist zwischen »Masse« und »Beschleunigung« anstatt des Additions-Zeichens das Multiplications-Zeichen zu setzen.
- » 84 » 1 u. 2 von unten ist für »Wassertheilchen« »Massentheilchen« und für »Massentheilchen« »Wassertheilchen« zu setzen.
- » 89 » 14 von oben anstatt »innern« zu setzen »innerer«.
- » 93 » 6 » unten anstatt »Abspannung« zu setzen »Anspannung«.
- » 100 » 10 » » anstatt » $s\sqrt{2}$ « zu setzen » $s\sqrt{\frac{1}{2}}$ «.
- » 104 » 9 » » fehlt auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens μ als Faktor.
- » 123 » 9 » » ist anstatt » c « zu setzen » d «.
- » 133 » 10 » » ist anstatt »Wie« zu setzen »War«.
- » 166 » 4 von oben ist anstatt »Röhre« zu setzen »Rohre«.
- » 201 » 10 » unten ist anstatt »Aufschlussboden« zu setzen »Aufschussboden«.
- » 204 » 12 » » anstatt » $h + 0$ « zu setzen » $h = 0$ «.
- » 205 » 5 » » anstatt »dieselben« zu setzen »diesen Werth«.

Einleitung.

Eine Eigenschaft, welche alle Körper gemein haben, ist das Bestreben, in ihrem jederzeitigen Zustande zu verharren, und denselben nicht ohne Ursache zu ändern. Man bezeichnet diese Eigenschaft mit Trägheit oder Beharrungsvermögen. Nach der Grösse des Beharrungsvermögens bestimmen wir die Masse eines Körpers als demselben proportional. Ändert also ein Körper seinen Zustand, so muss dieser Änderung eine ganz bestimmte Ursache zu Grunde liegen, und diese Ursache nennen wir Kraft. Sie muss also beziehungsweise ebenfalls proportional der Masse sein.

Der Zustand eines Körpers kann eben sowohl in der gegenseitigen Beziehung seiner kleinsten Bestandtheile, als in seiner Beziehung zu andern Körpern geändert werden. Den erstern Fall pflegt man im Allgemeinen mit „Zustands-Änderung“, den letztern mit Ortsveränderung oder „Bewegung“ zu bezeichnen. Die Grösse einer Kraft P wird durch die Grösse der Änderung gemessen, welche sie bei gleichen Massen hervorzubringen vermag. Die Grösse dieser Änderung messen wir daher durch das Produkt m der Masse des bewegten Körpers in den Geschwindigkeits-Zuwachs p , welchen er bei stetiger Kraft-Einwirkung während jeder Zeiteinheit erhält. Den letztern bezeichnet man mit „Beschleunigung“. Wir erhalten damit die mechanische Grundgleichung

$$1) P = mp.$$

Bei gleichen Beschleunigungen also erhalten sich die wirksamen Kräfte direkt wie die Massen der Körper, welche von ihnen in Bewegung gesetzt werden, und bei gleichen Massen die Beschleunigungen direkt wie die beschleunigenden Kräfte. Die Schwerkraft, mit welcher alle an der Erdoberfläche befindlichen Körper nach dem Mittelpunkte der Erde hin angezogen werden, ist stetig und unveränderlich wirksam, und ihre Grösse ändert sich nur mit dem Quadrate der Entfernung von letzterm. Sie wird durch den Druck auf eine feststehende Unterlage oder durch das Gewicht des Körpers gemessen. Bezeichnen wir das

letztere mit G und mit g den Geschwindigkeits-Zuwachs, welchen ein freifallender Körper im luftleeren Raume während jeder Sekunde an irgend einem Orte der Erdoberfläche erhält, so gilt ganz allgemein die Beziehung

$$2) \quad G = mg$$

woraus für die Grösse der Masse eines Körpers folgt

$$3) \quad m = \frac{G}{g}.$$

In den mittlern Breitengraden ist g durch Versuche $= 31,25$ Fuss pr. oder $9,81$ M. gemessen.

Stetig und mit constanter Stärke auf einen Körper einwirkende Kräfte können auch nur eine stetig und gleichförmig veränderte Bewegung desselben erzeugen, die eben so wohl gleichförmig beschleunigt als gleichförmig verzögert sein kann.

Ist ein Körper der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer stetiger Kräfte unterworfen, so erfolgt die jederzeitige Bewegung in der Richtung der daraus resultirenden Mittelkraft, und mit einer ihrer Grösse entsprechenden Beschleunigung.

Bewegt sich ein Körper mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 , und es fängt eine Kraft auf ihn zu wirken an, welche so gross ist, dass sie ihm die positive oder negative Beschleunigung $\pm p$ zu ertheilen vermag, so muss t Zeiteinheiten nach begonnener Einwirkung seine Geschwindigkeit v also betragen

$$4) \quad v = v_1 \pm pt.$$

Das Differenzial des Weges s , welchen er im nächstfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchen dt mit dieser Geschwindigkeit durchläuft, drückt sich aus durch

$$ds = (v_1 \pm pt)dt.$$

Das Integral von t bis 0

$$5) \quad s = v_1 t \pm \frac{pt^2}{2}$$

giebt den Weg an, welchen der Körper mit gleichförmig beschleunigter oder verzögerter Geschwindigkeit während der Zeit t nach begonnener Krafteinwirkung durchlaufen hat, wenn er ursprünglich schon mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 behaftet war, und der Beschleunigung p unterworfen wurde.

Aus Gleichung 4) und 5) folgen ferner durch Substitution

$$6) \quad s = \frac{v + v_1}{2} t$$

$$7) \quad s = \frac{v^2 - v_1^2}{2p}.$$

Setzt man in Gleichung 7) $p = g$ der Beschleunigung des freien Falles, so erhält man die Länge der senkrechten Bahn, welche ein freifallender Körper zurücklegt, indem seine ursprüngliche Geschwindigkeit v_1 sich bis auf v vermehrt

$$8) \quad h_1 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$$

und für $v_1 = 0$

$$9) \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

Den Ausdruck für h Gleichung 9) pflegt man auch mit der Geschwindigkeitshöhe eines Körpers zu bezeichnen. Sie giebt uns gleichzeitig das Maass für die mechanische Arbeit, welche ein Körper, der die Endgeschwindigkeit v erlangt hat, zu verrichten fähig ist, wenn wir ihm einen Widerstand zu überwinden entgegensetzen, der durch stete Einwirkung und gleichförmige Verzögerung diese Endgeschwindigkeit allmählig wieder verrichtet und auf Null reducirt.

Als Einheit der mechanischen Arbeit ist man übereingekommen, das Produkt aus der Maass-Einheit, um welche die Gewichts-Einheit eines Körpers gehoben wird, in die letztere anzunehmen, und dieselbe für pr. Maass mit Fuss-Pfund für Meter-Maass und Kilogramm mit Kilogramm-Meter zu bezeichnen. Ein Kilogramm-Meter ist also gleich 6,372 Fuss-Pfund.

Da das Gewicht G eines Körpers das Produkt aus seinem körperlichen Gehalte Q in das Gewicht γ seiner körperlichen Maasseinheit also gleich $Q\gamma$ ist, so drückt sich die mechanische Arbeit, welche derselbe durch die Geschwindigkeit v in sich aufgesammelt hat auch aus durch

$$10) \quad A = \frac{Q\gamma v^2}{2g}$$

oder, da nach Gleichung 3) $\frac{Q\gamma}{g}$ gleich der Masse m ist,

$$11) \quad A = \frac{mv^2}{2}$$

Das Product mv^2 pflegt man auch obwohl uneigentlich mit der „lebendigen Kraft“ einer Masse zu bezeichnen.

Die mechanische Arbeit lässt sich auch durch die Kraft oder den Widerstand messen, welcher stetig wirksam sein muss, um die Geschwindigkeit v der Masse m bis auf v_1 zu verringern. Für die Grösse P dieses Widerstandes haben wir nach Gleichung 1)

$$P = mp$$

und für den Weg s , welchen die Masse m unter seiner Einwirkung zurücklegt, bis ihre Geschwindigkeit $= v_1$ geworden ist, also zugleich auch für den Weg, welchen der Widerstand zurücklegt nach Gleichung 7)

$$s = \frac{v^2 - v_1^2}{2p}$$

Das Produkt

$$Ps = P \cdot \frac{(v^2 - v_1^2)}{2p}$$

muss dieselbe Quantität Arbeit enthalten, welche aus Gleichung 10) und 11) mit

$$\frac{Q\gamma(v^2 - v_1^2)}{2g} = \frac{m(v^2 - v_1^2)}{2}$$

folgt, und wird auch der Form nach damit identisch, wenn $P = G$ dem eignen Gewichte des bewegten Körpers und $p = g$ der Beschleunigung durch die Schwerkraft wird. Man kann also auch ganz allgemein gültig schreiben

$$22) A = Ps = P \cdot \frac{(v^2 - v_1^2)}{2p} = Q\gamma \frac{(v^2 - v_1^2)}{2g} = \frac{m(v^2 - v_1^2)}{2}$$

Wenn eine Masse m sich nach einer gewissen Richtung hin mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v also der Beschleunigung Null bewegt, dagegen durch eine Kraft P , welche durch die Beschleunigung p der Masse m gemessen wird, nach einer auf ihrer ursprünglichen normalen Richtung stetig abgelenkt wird, so muss die durchlaufene Bahn eine stetige Kurve werden. Der während eines unendlich kleinen Zeittheilchens dt in der ursprünglichen Richtung gleichförmig durchlaufene Weg drückt sich durch vdt , der beschleunigt durchlaufene Weg der Ablenkung nach Gleichung 5) durch $p \cdot \frac{dt^2}{2}$ aus.

Für den Krümmungs-Halbmesser r eines unendlich kleinen Bogenelementes der durchlaufenen Kurve ergibt sich durch graphische Darstellung und geometrische Beziehung

$$13) r = \frac{v^2}{p} \text{ also } p = \frac{v^2}{r}$$

Für einen constanten Werth von v und p wird die durchlaufene Bahn also eine Kreislinie, und man bezeichnet die Beschleunigung p , mit „Normal-Acceleration“, die ihr entsprechende Kraft P , welche nach dem Mittelpunkte des Kreises hin stetig wirksam sein muss, um das Bestreben der bewegten Masse, ihre Bewegung in tangentialer Richtung fortzusetzen, aufzuheben und solche in kreisförmiger Bahn zu erhalten, mit „Normalkraft“, auch wohl „Centrifugalkraft“. Die Grösse der letztern bestimmt sich nach Gleichung 1) und 13)

$$14) P = mp = \frac{mv^2}{r}$$

Wenn man Gleichung 12)

$$A = \frac{m}{2}(v^2 - v_1^2)$$

näher betrachtet, so findet man, dass die Mengen der mechanischen Arbeit, welche einer Masse m , die der gleichförmig beschleunigten Bewegung unter Einwirkung einer constanten Kraft P unterworfen ist, während der einzelnen Zeiteinheiten nach begonnener Einwirkung, mitgetheilt werden, keinesweges einander gleich sind, sondern um so grösser werden, je länger die Kraft eingewirkt hat, und je grösser die Geschwindigkeit der Masse geworden ist.

Auch während gleicher Zeiträume nach begonnener Einwirkung kann ein und dieselbe Kraft sehr verschiedene Arbeitsmengen erzeugen oder auf sammeln je nach der Grösse der Masse, welche ihrer Einwirkung unterliegt.

Ein und dieselbe Kraft P kann nämlich nach Gleichung 1) ebenso wohl durch

$$n \cdot m \cdot \left(\frac{p}{n}\right) \text{ als } \frac{m}{n} (np)$$

gemessen werden. Im erstern Falle erhält man die während der Zeit t nach begonnener Einwirkung durch sie auf gesammelte mechanische Arbeit nach Gleichung 11) und 5) auf

$$n \cdot \frac{m}{2} \left(\frac{p}{n}\right)^2 t^2 = \frac{mp^2 t^2}{2n}.$$

im letztern Falle auf

$$\frac{m}{2n} \cdot (np)^2 t^2 = \frac{n \cdot m \cdot p^2 t^2}{2}.$$

Setzt man n unendlich gross, so wird also im erstern Falle die während der Zeit t auf gesammelte Arbeit unendlich klein, im letztern dagegen unendlich gross.

Nur bei genauer Berücksichtigung dieses Verhältnisses lassen sich daher durch die Vergleichung auf gesammelter Arbeitsmengen Schlüsse auf die dabei thätig gewesenen Kräfte und die ihnen entsprechenden Beschleunigungen ziehen.

Die Geomechanik setzt bei Herleitung der Beziehungen zwischen Masse, Kraft, Beschleunigung, Weg und Endgeschwindigkeit, die Masse stets als constant, und nur die übrigen Grössen als veränderlich voraus.

Die Hydromechanik dagegen hat es mit lauter veränderlichen Grössen zu thun, weil die Wassermenge Q , welche sich während jeder Zeiteinheit in Bewegung setzt, oder welche stetig durch einen mit a gemessenen Querschnitt fliesst, mit der Geschwindigkeit v veränderlich ist und sich durch das Produkt av , also ihre Masse durch $\frac{av\gamma}{g}$ darstellt.

Setzt man diesen Funktionalwerth von m in Gleichung 11) ein, so erhält man damit

$$15) A = \frac{a\gamma v^3}{2g}$$

als diejenige Quantität Arbeit, welche jede während der Zeiteinheit durch den Querschnitt a mit der Geschwindigkeit v fließende Wassermenge in sich aufgenommen hat, und während jeder Zeiteinheit durch Ueberwindung eines Widerstandes ohne Masse verrichten kann, wenn v dadurch wieder bis auf Null verzögert wird.

Erster Abschnitt.

Die Molekular-Kräfte.

Die Widerstände, welche in den tropfbaren Flüssigkeiten der Bewegung, in Folge Einwirkung äusserer Kräfte, entgegenreten, werden Gegenstand der mathematischen Deduktion und lassen sich als einfache und rationale Funktionen darstellen, wenn durch die physikalischen Eigenschaften die nachstehend bezeichneten 3 Grössen bestimmt sind.

1) Die absolute Festigkeit s , d. h. diejenige Spannung, welche die zwischen den Körper-Molekülen wirksame Attraktion ertragen kann, bevor sich dieselben von einander trennen. Sie beträgt für den pr. □ Fuss irgend eines beliebigen Querschnitts bei Wasser von 13° R. 0,73 Pfund oder den □ M. 3,70 Kilogr. und vermindert sich mit jedem Wärmegrade von 0°—80° R. um nahezu 0,005 Pfund, resp. 0,025 Kilogr.

2) Die Abscheerungs-Festigkeit μ , d. h. der Widerstand, welchen die Molekül-Lagerung in einer Ebene der fort dauernden Verschiebung über der zunächst liegenden entgegensetzt. Sie beträgt bei Wasser von 13° R. für den □ Fuss 0,52 Pfund oder den □ M. 2,63 Kilogr. und steht zu s in dem constanten Verhältniss $1 : \sqrt{2}$.

3) Der Biegungs-Winkel φ , d. h. derjenige Winkel, um welchen sich die natürliche Molekül-Lagerung auch schon durch geringere Kraft-Einwirkungen verschieben lässt, ehe die Abscheerung eintritt. Derselbe beträgt beim Wasser 39° 48', und ist unabhängig von der Temperatur.

Bevor wir den Beweis antreten, dass wirklich ausser den durch die Geomechanik bereits hinlänglich erforschten und bestätigten äussern Kräften keine andern, als die vorstehend bezeichneten Molekular-Grössen

Einfluss auf die Bewegung des Wassers zu gewinnen vermögen, und dass hiermit die Theorie derselben dem Experimental-Gebiete enthoben und in das der angewandten Mathematik übergeführt wird, sind wir den Nachweis dafür schuldig, dass diese Grössen wirklich als beziehungsweise Constanten vorhanden und von uns richtig gemessen sind. Wenn wir zur Beibringung desselben ursprünglich auf dem Experimental-Wege gelangt sind, so möchte es um so mehr Interesse haben und zur vielseitigern Anregung dienen, nunmehr zunächst den entgegengesetzten Weg einzuschlagen, durch den Nachweis, dass dieselben nothwendig vorhanden sein, und die Untersuchung darüber, in welchen Beziehungen sie zu einander stehen müssen.

§ 1.

Hypothese der Molekular-Kräfte im Allgemeinen.

Gehen wir dabei von denjenigen Hypothesen aus, welche auf dem heutigen Standpunkte der Experimental-Physik hinreichend bestätigt erscheinen, um im Wesentlichen ziemlich übereinstimmend von den Physikern als Wegweiser für die weitere Forschung anerkannt zu sein. Wir wollen mit Körper-Atomen diejenigen verschwindend kleinen und ewig unveränderlichen Theilchen der chemisch einfachen Stoffe bezeichnen, die einer weitern Zertheilung unter Mitwirkung der ihnen eigenthümlichen Kraft nicht mehr befähigt sind; unter Körper-Molekülen, dieselben Theilchen der chemisch zusammengesetzten Stoffe, die sich einer weitern Zertheilung ohne Aufhebung ihrer Eigenthümlichkeit nicht unterwerfen lassen; und unter Aether-Atomen die kleinsten ewig unveränderlichen Theilchen, desjenigen nahezu unwägbaren Stoffes, der nicht nur in dem ganzen Weltall, sondern in den kleinsten Räumen zwischen den Körper-Atomen enthalten, und dessen Vorhandensein durch Licht- und Wärme-Erscheinungen festgestellt ist.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass gleichartige Körper-Atome in unmittelbarer Berührung mit einander sich mit einer gewissen Kraft anziehen. Da wir uns die Atome selbst nicht anders als ewig unveränderlich denken können, so kann auch die Grösse der, einem und demselben Atome als Eigenschaft beiwohnenden, Anziehungskraft, die wir als Molekular-Kraft zum Unterschiede von den äussern Kräften bei gleichartigen Atomen mit Attraktion, bei ungleichartigen mit Adhäsion bezeichnen, nicht anders als an und für sich ewig unveränderlich wirksam und nur in ihrer Wechselwirkung zu andern Atomen veränderlich gedacht werden.

Da wir es ferner nicht mit unsern menschlichen Begriffen zu fassen vermögen, dass einem und demselben Stoffe verschiedene Eigenschaften beiwohnen können, die sich selbst entgegengesetzt sind, müssen

wir die Vorstellung gänzlich ausschliessen, dass sich Körper-Atome irgend welcher Art, vermöge der ihnen selbst beiwohnenden Kraft, von einander abstossen können. Es kann eine solche Abstossung nur scheinbar und relativ durch die Wechselwirkung von mindestens drei verschiedenartigen Körper-Atomen, oder durch die Einwirkung einer unabhängigen dritten Kraft gedacht werden.

Unter der Thätigkeit von lauter nach einer Richtung wirksamen Körper-Kräften ist ferner kein Zustand des statischen Gleichgewichts denkbar. Das Weltall müsste sich vielmehr längst unter solcher Voraussetzung zu einem ungeheuern Klumpen zusammengeballt haben; desshalb müssen wir nothwendig den Aether-Atomen unter sich die entgegengesetzte Kraft der Repulsion als eine bei jedem Atome an und für sich unveränderlich und nur in der Wechselwirkung veränderliche Eigenschaft zuschreiben. Mit dieser Eigenschaft kann jedoch der Aether für sich in keinen Gleichgewichts-Zustand eintreten, sondern er müsste in centrifugaler Richtung stets im Begriffe sein, in die Unendlichkeit zu entweichen. Es muss also noch eine Beziehung zwischen Körper- und Aether-Atomen vorhanden sein, und als solche kann keine andere als eine gewisse, lediglich von der Natur der verschiedenen Körper-Atome abhängige und im Uebrigen ebenfalls beziehungsweise ewig unveränderliche gegenseitige Attraktion zwischen Aether- und Körper-Atomen gedacht werden.

Während wir alle diese Kräfte selbst als ewig unveränderlich wirkend voraussetzen müssen, ist die Aeusserung ihrer Intensität eine nicht nur von der gegenseitigen Entfernung abhängige, sondern von ihr eng begrenzte, und zwar bei den Körper-Atomen so eng begrenzt, dass sie erst bei der mechanischen Berührung wahrnehmbar wird. Das Abhängigkeits-Verhältniss selbst ist noch nicht erforscht worden, aber durch weitere Erforschung des gleichzeitigen Aenderungs-Verhältnisses der absoluten Festigkeit, und des Volumens mit der Temperatur, werden wir vielleicht nähern Aufschluss nicht nur hierüber, sondern auch über die Grössen-Verhältnisse der Atome und Aether-Hüllen verschiedener Stoffe erhalten. Es ist kein denkbarer Grund vorhanden, die Grenze der Wirksamkeit der Abstossungs-Kraft zwischen den Aether-Atomen weiter voranzusetzen, wie sie bei den Körper-Atomen wahrzunehmen ist, zumal wir bei der Unwägbarkeit des Aethers die Grösse eines Aether-Atoms verschwindend klein gegen die eines Körper-Atoms voraussetzen müssen. Trotzdem mag sie immerhin noch das Unendlich Vielfache eines Atom-Durchmessers betragen können.

Den Körper-Atomen müssen wir, wie den Körpern selbst, Gravitations-Kraft, damit also auch Masse und Trägheit zuschreiben, dem Aether vermögen wir nach den wahrgenommenen Erscheinungen nur

verschwindend kleine Masse und Trägheit zuzuschreiben. Die Geschwindigkeit des Lichts und der Elektrizität geben uns Aufschluss darüber, bis zu welchem Grade diese Voraussetzung zutreffend bleibt. Sprechen wir dem Aether jedoch beziehungsweise Trägheit und Masse ab, so vermögen wir nicht zu begreifen, wie durch den mechanischen Stoss von Körper-Atomen gegen Aether-Atome letztere in Bewegung gesetzt werden können, zumal keine Abstossungs-Kraft zwischen beiden wirksam werden kann. Wir können also nur annehmen, dass überall wo Licht und Wärme erzeugt und fortgepflanzt wird, von der Körper-Attraktion freigewordene Aether-Atome zwischen ihres Gleichen stossen und hierdurch die Schwingungen erzeugen, durch welche die Licht-Erscheinungen erklärt werden können. Nun kann aber wieder nicht begriffen werden, wie ein Stoff ohne wägbare Masse durch Schwingungen allein eine so bedeutende Arbeits-Menge zu verrichten oder aufzusammeln vermag, wie solche bei den Wärme-Erscheinungen gemessen wird, wenn kein fortdauernder Kraft-Zuwachs, sondern nur ein Kraft-Wechsel stattfindet. Nehmen wir an, dass jedem einzelnen Atome solch ein Zuwachs durch die schwingende Bewegung komme, so treten wir damit der Voraussetzung der ewigen Unveränderlichkeit der Atome an und für sich, aus der auch die Unveränderlichkeit ihrer Eigenschaften folgt, in Widerspruch, und wir vermögen diesen Widerspruch nur durch die Voraussetzung zu lösen, dass überall da, wo eine räumliche Ansammlung von Kräften und damit eine Arbeitsverrichtung stattfindet, auch ein fortdauerndes Zuströmen oder Abströmen von Kraft-Einheiten, also von Aether-Atomen, vor sich gehen muss. Es folgt also hieraus die Nothwendigkeit der Erklärung der Wärme-Erscheinung durch Aether-Schwingungen und Strömungen zugleich, in Folge Veränderung des Gleichgewicht-Zustandes zwischen der Abstossung der Aether- und der Anziehung der Körper-Atome, und dem dagegen protestirenden Physiker wird es vorläufig überlassen werden müssen, den Gegenbeweis zu führen. Einstweilen vermögen wir uns auf keine andere Weise die Zustands-Gleichungen der Körper, zumal der elastisch flüssigen, zum praktischen Verständnisse zu bringen. Wir haben noch, um uns über unsere Begriffs-Fassung bei der nachfolgenden Untersuchung zu verständigen, hinzuzufügen, dass wir aus den Elasticitäts-Erscheinungen schliessen müssen, dass mindestens die Molekül-Gruppen, wahrscheinlich aber auch die Atome verschiedener Stoffe auch verschiedene Axen-Verhältnisse, also auch verschiedene Gestalten haben müssen, woraus denn selbstverständlich folgt, dass sie auch nicht gleichen körperlichen Inhalt haben können, dass uns ferner über die Verschiedenheit und das Verhältniss der absoluten Gewichte, und damit also auch der Masse der Atome verschiedener Stoffe die Aequivalent-Zahlen der Chemiker genaue Aus-

kunft geben. Nehmen wir ferner an, alle Atome hätten gleiches specifisches Gewicht, so würde daraus folgen, dass die Volumen-Änderung verschiedener Körper in Folge Erwärmung in einem umgekehrten Verhältnisse zu ihrem specifischen Gewichte, weil in direktem zur Grösse der Aether-Hüllen stehen muss, was keineswegs der Fall ist, vorausgesetzt nämlich, dass wir mit dem Begriffe der Unveränderlichkeit der Atome auch vollkommene Undurchdringlichkeit, Starrheit und Unveränderlichkeit der Gestalt verbinden, und den Grund aller Form- und Struktur-Veränderungen ausschliesslich in die Aether-Hüllen verlegen.

Da wir vorausgesetzt haben, dass die Aether-Atome von den Körper-Atomen oder Molekülen mit einer gewissen Kraft angezogen werden, deren Intensität gleichzeitig eine Funktion der Eigenthümlichkeit der letztern und ihrer Entfernung ist, so folgt daraus durch eine einfache statische Betrachtung, dass im Gleichgewichts-Zustande die erstern sphärenartig, wie die Atmosphäre um einen Weltkörper gelagert und geordnet sein müssen, dergestalt, dass mit der Entfernung von dem Schwerpunkte des Körper-Atomes auch die gegenseitige Entfernung der Aether-Atome abnehmen, und die Repulsivkraft der letztern stets in einem gewissen Verhältnisse zu der von ihnen gemeinschaftlich erlittenen Attraktion der ersteren bleiben muss. Wir wollen den Inbegriff eines Körper-Atomes mit sammt der ihm zugehörigen solchergestalt gruppirten Aether-Hülle mit dem wohl nicht ungewöhnlichen Ausdruck „Dynamide“ bezeichnen.

Uebersteigt in einem Körper, den wir uns also als ein System von unendlich kleinen und vielen Dynamiden vorstellen müssen, bei allen Temperaturen und in jedem davon abhängigen Gleichgewichts-Zustande die Attraktion zwischen zwei benachbarten Körper-Atomen die Summe der Repulsivkräfte aller dazwischen lagernden Aether-Atome, um eine gewisse Grösse, die der absoluten Festigkeit direkt, und der Anzahl der in einem Körper enthaltenen Dynamiden, sowie ihrer gegenseitigen Entfernung von einander umgekehrt proportional sein muss, so haben wir es mit einem festen Körper zu thun. Setzen sich beide in jedem Gleichgewichts-Zustande mit einander, für eine gewisse, von der Temperatur abhängige Entfernung, derart ins Gleichgewicht, dass dasselbe bei der geringsten Annäherung oder Entfernung durch Einwirkung äusserer Kräfte entweder zu Gunsten der einen oder der andern sich als gestört äussert, so haben wir es mit einem tropfbar flüssigen Körper zu thun; und sind endlich die einzelnen Dynamiden in diejenigen Entfernungen von einander gelangt, in der die Intensität der Körper-Attraktion gänzlich verschwindet und nur noch die beiden übrigen Kraft-Systeme ihre Wirksamkeit fortäussern, so haben wir es mit einer Gasart zu thun.

Aeltere Physiker erklären wohl das Wesen der tropfbaren Flüssig-

keit im Allgemeinen durch die Eigenschaft, dass sich in ihr Attraktion und Repulsion gegenseitig aufheben. Wenn unsere Begriffsfassung mit dieser Erklärung beziehungsweise in Uebereinstimmung tritt, so muss sie dennoch entgegentreten der Anschauung und Ausdrucksweise derjenigen Physiker, welche eine gewisse konstante Spannung in dem Gleichgewichts-Zustande der Flüssigkeiten gefunden zu haben glauben. Spannungen von messbarer Grösse können in tropfbaren Flüssigkeiten nur in Folge Einwirkung äusserer Kräfte und bis zu dem Grade ihrer absoluten Festigkeit eintreten. Ohne eine solche Einwirkung ist die Spannung jeder vollkommen tropfbaren Flüssigkeit gleich Null.

Es lässt sich leicht übersehen, dass wir uns mit Annahme dieser Hypothese, die in ihren wesentlichsten Momenten hiermit gezeichnet sein möchte, insbesondere mit der Einführung dreier Kraftsysteme, welche sich aus unendlich vielen Krafteinheiten zusammensetzen, deren Intensität wiederum sich mit ihrer gegenseitigen Entfernung ändert, einen durchaus wissenschaftlichen Rahmen geschaffen haben darum, weil er nach keiner Seite hin die weitere Forschung in unnatürliche Grenzen einzwängt, sondern für die Erklärung aller Erscheinungen der physischen Welt unendlich viele weitere Hypothesen zulässig macht, die nicht damit und unter einander in Widerspruch treten.

§ 2.

Wahrscheinliche Form der Wasser-Moleküle.

Fügen wir nun in diesen Rahmen die wahrscheinliche Molekular-Bildung des Wassers in millionenfacher Vergrösserung ein. Ueberall stösst uns ja in der Natur der organischen und anorganischen Welt eine wunderbare Homogenität des unendlich kleinsten Theiles mit dem Ganzen auf. Sollten wir allein in dem Wasser eine Ausnahme hiervon finden wollen? So sind wir denn auch mit allen Physikern in Uebereinstimmung, wenn wir uns die nach allen Axenrichtungen hin ganz gleiche Volumenänderung und ausserordentlich leichte Verschiebbarkeit des Wassers nicht anders mechanisch zu erklären vermögen, als wenn wir auch den einzelnen Molekülen nach allen Richtungen hin gleiche Axen, also Kugelform, zuschreiben, und die Gruppierung der einzelnen Dynamiden gleich der in Pyramiden aufgeschichteter Kugeln setzen, dergestalt, dass die äussersten Grenzen von je 4 Aetherhüllen sich berühren, und einen leeren Raum zwischen sich lassen, der vielleicht durch die Atome der vom Wasser verschluckten Gasarten, oder darin aufgelösten festen Substanzen ausgefüllt wird. Wir finden merkwürdiger Weise diese Pyramidenform bei Hagelkörnern zuweilen in grosser Vollkommen-

heit und Schärfe ausgebildet. Eine einfache statische Betrachtung, die man mit Pyramiden von 4 oder 5 Billardkugeln anstellen kann, ergibt ferner, wie die Eigenschaft der nach allen Richtungen gleich starken Druck-Uebertragung, welche allen vollkommen tropfbaren Flüssigkeiten eigen ist, sich als nothwendig aus dieser vorausgesetzten Molekül-Form und Lagerung ergibt, und dass sie alle andern möglichen Voraussetzungen in dieser Hinsicht ausschliesst. Nach den Ergebnissen der Experimental-Physik müssen wir ferner das Wasser zu denjenigen Körpern zählen, deren Moleküle die stärkste Attraktion zu den Aether-Atomen äussern, deren Aether-Hüllen also am dichtesten, und deren Moleküle am dichtesten gelagert sind. Die Experimental-Physik ergibt nämlich die bekannte höchst merkwürdige Beziehung, dass bei allen einfachen Stoffen das Produkt aus der Verhältnisszahl der specifischen Wärme, zu der des Wassers und dem Atomgewichte nahezu eine Constante = 38,5 bis 40,8 ist.

Da nun aber die Atom-Gewichte die Verhältnisszahlen für die absoluten Gewichte, also die Massen der Atome verschiedener Stoffe ausdrücken, und die in gleichen Gewichtsmengen verschiedener Stoffe enthaltene Anzahl der Atome sich umgekehrt wie die Gewichte der einzelnen Atome verhalten muss, so folgt daraus, dass die specifische Wärme nicht der Masse eines Stoffes, sondern direkt proportional der in gleichen Gewichtsmengen verschiedener Stoffe enthaltenen Anzahl von Dynamiden oder Aether-Hüllen sein muss.

Es enthält beispielsweise:

1 Kilogr. Wasser ungefähr 9, 30, 5, 18, 30 mal so viel Dynamiden, als 1 Kilogr. Eisen, Platin, Schwefel, Silber, Quecksilber, nimmt aber trotzdem nur den 7, 23, 2, 10, 13fachen Raum des letztern ein.

Zudem finden wir, dass das Wasser bei seinem Uebergange aus dem flüssigen in den festen Zustand einen ausserordentlich starren, spröden und kaum elastischen Körper bildet. Wir vermögen uns aber bei der elastischen und leicht beweglichen Natur, die wir dem Aether zuschreiben, kaum einen starren Körper vorzustellen, wenn wir dabei nicht mindestens in einzelnen Axenrichtungen eine so innige Annäherung der Körper-Atome voraussetzen, dass sie einer Berührung nahe kommt. Man wird sich also mit einigem Rechte den Molekular-Zustand des Wassers im Zustande der höchsten Dichtigkeit bei 4° C. durch Kügelchen von Körper-Molekülen versinnlichen können, die sich einander nahezu berühren, und da sich Wasser von 4° C. bis zum Siedepunkte nur um 1,04315 seines Volumens auszudehnen vermag, müssen wir voraussetzen, dass sich in jeder von drei auf einander senkrechtstehenden Axenrichtungen ein Molekül von dem andern um mindestens $\frac{0,04315}{3} = 0,01438$ seines Durchmessers zu entfernen vermag, ehe die

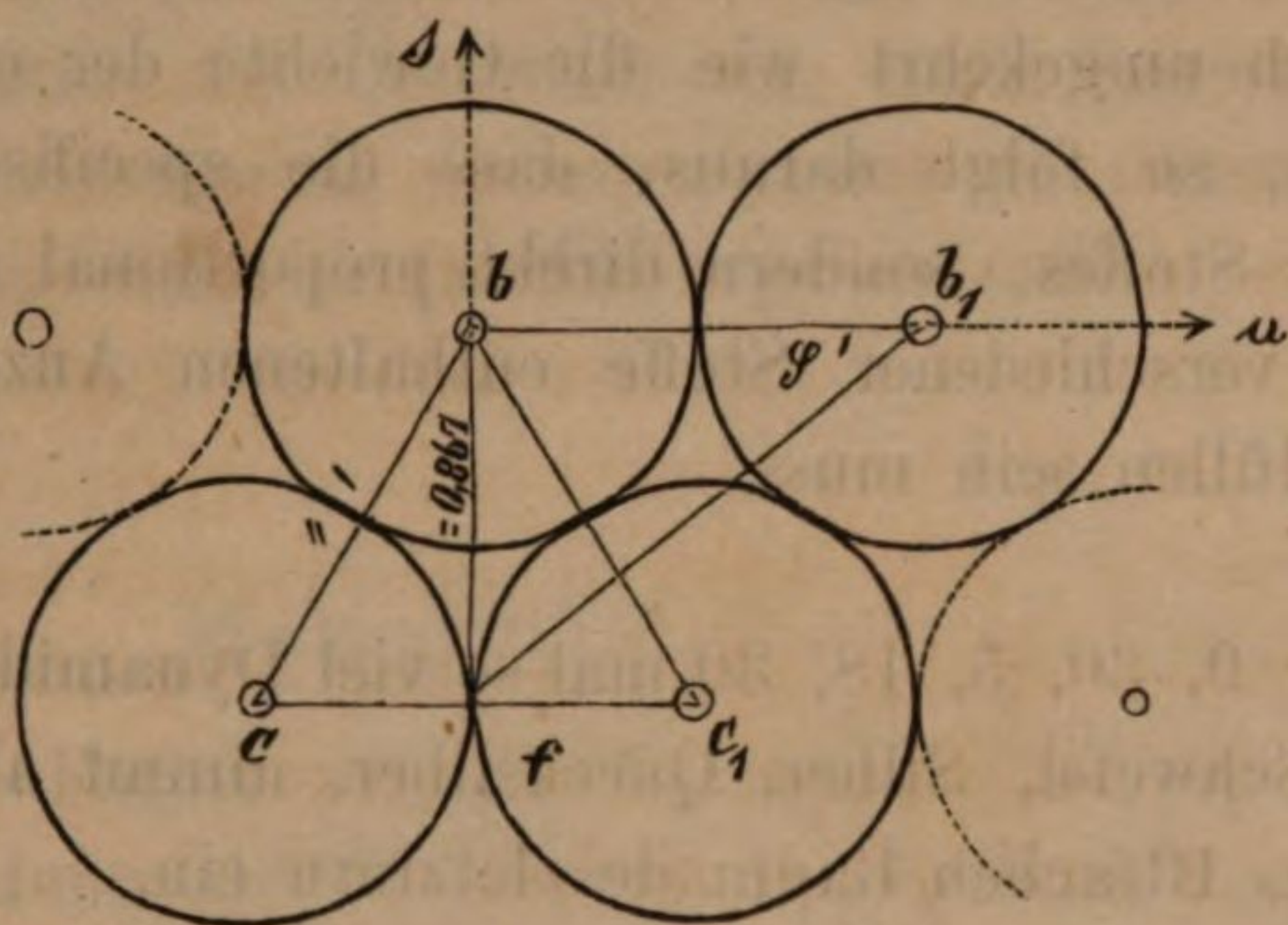
Körperattraktion vollständig aufgehoben ist. Diese Arbeit verrichtet also die Wärme von $4-100^{\circ}\text{C}$. in jeder von 3 zu einander normal gedachten Molekül-Ebenen, und die Kraft und Gewalt, mit welcher sich das Wasser dabei ausdehnt und zusammenzieht, ohne eine bleibende Volum-Veränderung zu erleiden, lässt uns keinen Zweifel darüber aufkommen, dass innerhalb dieses Weges von 0,01438 des Dynamiden-Durchmessers, die Ausdehnung und Zusammenziehung des Wassers zwischen je zwei Molekül-Ebenen mit vollkommener Elastizität erfolgt.

§ 3.

Molekül-Lagerung beim Wasser.

Bezeichnen wir mit den sich berührenden Kreisen $bb_1 cc_1$ in Figur 1 die Dynamidengrenzen, also die Moleküle mit sammt ihren Aetherhüllen, resp. Zwischenräumen, und setzen die Durchmesser dieser Kreise $= 1$.

Fig. 1.



Wenn wir nun die Molekül-Lagerung gleich der in Pyramiden aufgeschichteter Kugeln annehmen, nur mit dem Unterschiede, dass jede obere Kugel nicht drei, sondern nur zwei der untern Lage berührt, so entspricht die hier bezeichnete Lage cc_1bb_1 einem Vertikalschnitte.

Durch den Druck einer Atmosphäre lässt sich Wasser nur um etwa 48 Milliontheil seines Volumens verdichten. Wir können daraus den Widerstand ermessen, den die Moleküle der Annäherung über die Entfernung des doppelten Radius hinaus, in welchem sich Attraktion und Repulsion im Gleichgewicht befinden, entgegensetzen; während durch die absolute Festigkeit die zu ihrer Entfernung von einander erforderliche Maximal-Zugkraft ausgedrückt wird. Die Folge davon muss sein, dass bei allen Bewegungen die einzelnen Moleküle bestrebt sind, ihre Entfernung von einander beizubehalten. Denken wir uns nun durch den Angriff einer äussern Kraft die obere Lage über der untern in horizontaler Richtung nach μ fortgezogen, so wird diese Bewegung möglich, ohne dass die einzelnen Körperchen sich in der Richtung s von einander zu entfernen brauchen, wenn in allen untern Lagen eine fortwauernde wellenförmige Auf- und Abwärts-Bewegung, bei der sich die abwärtssteigende Reihe gegen die aufwärtssteigende um einen ganz

geringen Winkel verschiebt, um die Höhe $1 - \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,13$ des Dynamiden-Durchmessers vor sich geht. Es ist leicht zu übersehen, dass durch diese Hebungen und Senkungen, welche sich also nur auf Milliontheile der Wassertiefe beschränken können, vorausgesetzt, dass die obere Schicht selber verhindert wäre, diese Bewegungen mitzumachen, kein messbarer Theil der, auf Verschiebung wirksamen, Zugkraft μ in Anspruch genommen werden kann. Da nun auch durch eine einfache Drehung und Abwälzung der einzelnen Moleküle gegen einander, bei der sie sich nicht von einander entfernen, keine Störung des gewissermassen labilen Gleichgewichts-Zustandes eintreten, noch etwa Reibung in den Aether-Atomen vorausgesetzt werden kann, wird durch diese Betrachtung anschaulich, wie schon bei der allergeringsten Krafteinwirkung bei unendlicher Zeitdauer auch eine unendlich grosse Wassermasse sich in Bewegung zu setzen, und wie dieselbe, vermöge ihrer Massen-Trägheit, Kraft aufsammeind, und ohne die geringste Einbusse wieder abgebend, schliesslich eine bedeutende mechanische Arbeit zu verrichten vermag. Verfolgen wir nun bei der solchergestalt angefangenen Bewegung ein Molekül b bis es sich über c , abwälzend die Lage b , angenommen hat, so ist es klar, dass erst bei beginnender Weiterbewegung von b , nach μ sämtliche Moleküle der obern Lage sich von der untern zu entfernen beginnen, dass also erst auf diesem Wege die vollkommene Abscheerung aller obern Moleküle über den untern eintreten und damit erst diejenige Zugkraft erforderlich wird, welche wir pro Flächen-Einheit mit μ bezeichnet haben. Der Winkel $bb', f = \varphi'$, um welchen die Verschiebung der Lage gegeneinander bis dahin erfolgt ist, berechnet sich durch $\tan \varphi' = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,867$ auf $40^\circ 54'$, also um $1^\circ 6'$ grösser, wie der voraus als gemessen behauptete Winkel φ mit $39^\circ 48'$.

Betrachten wir nun nach Figur 2 und 3 die Verschiebungs-Vorgänge bei derjenigen Lagerung, in welcher eine obere Kugel drei der untern Lage berührt.

Fig. 2.

Ansicht von oben.

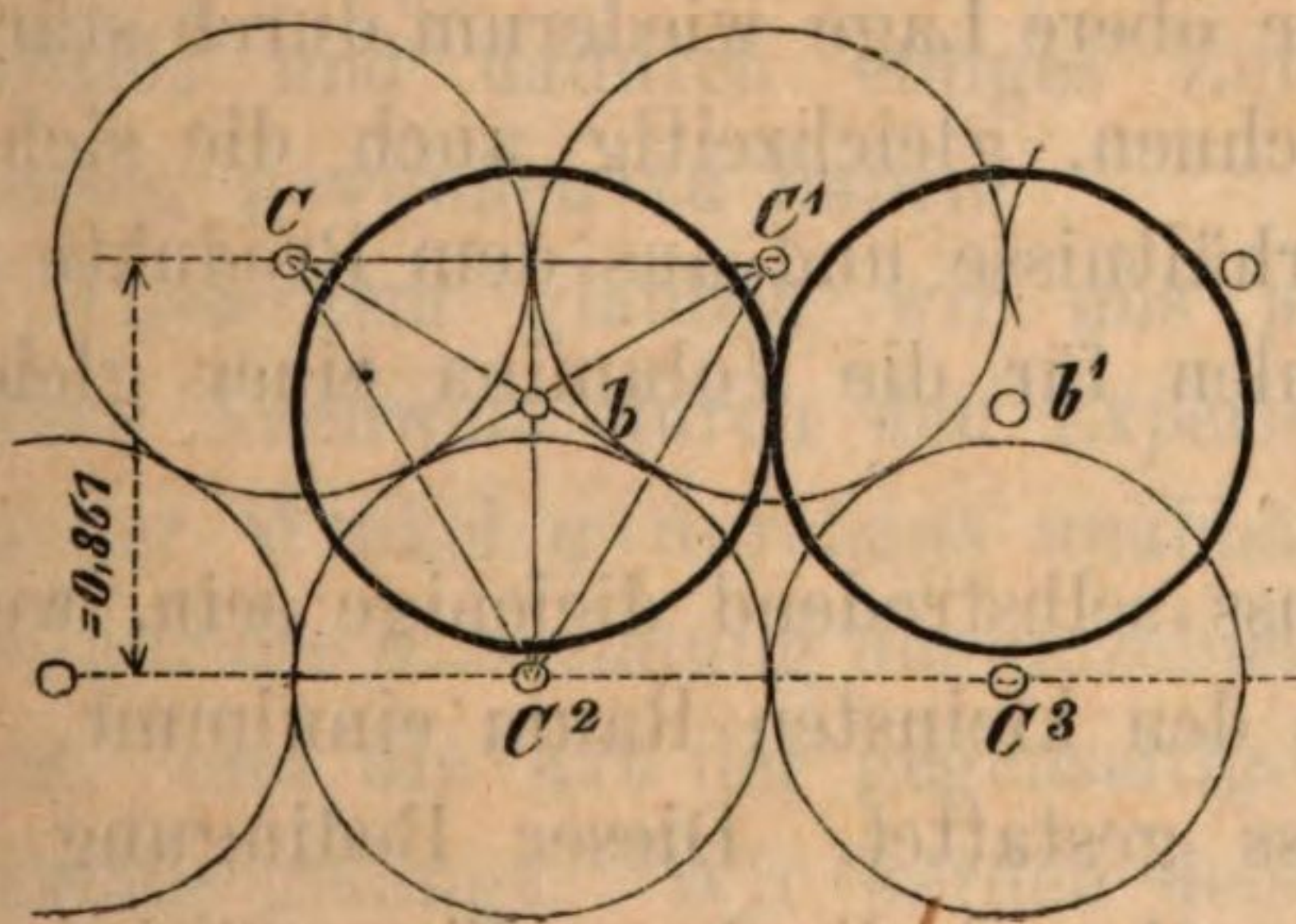
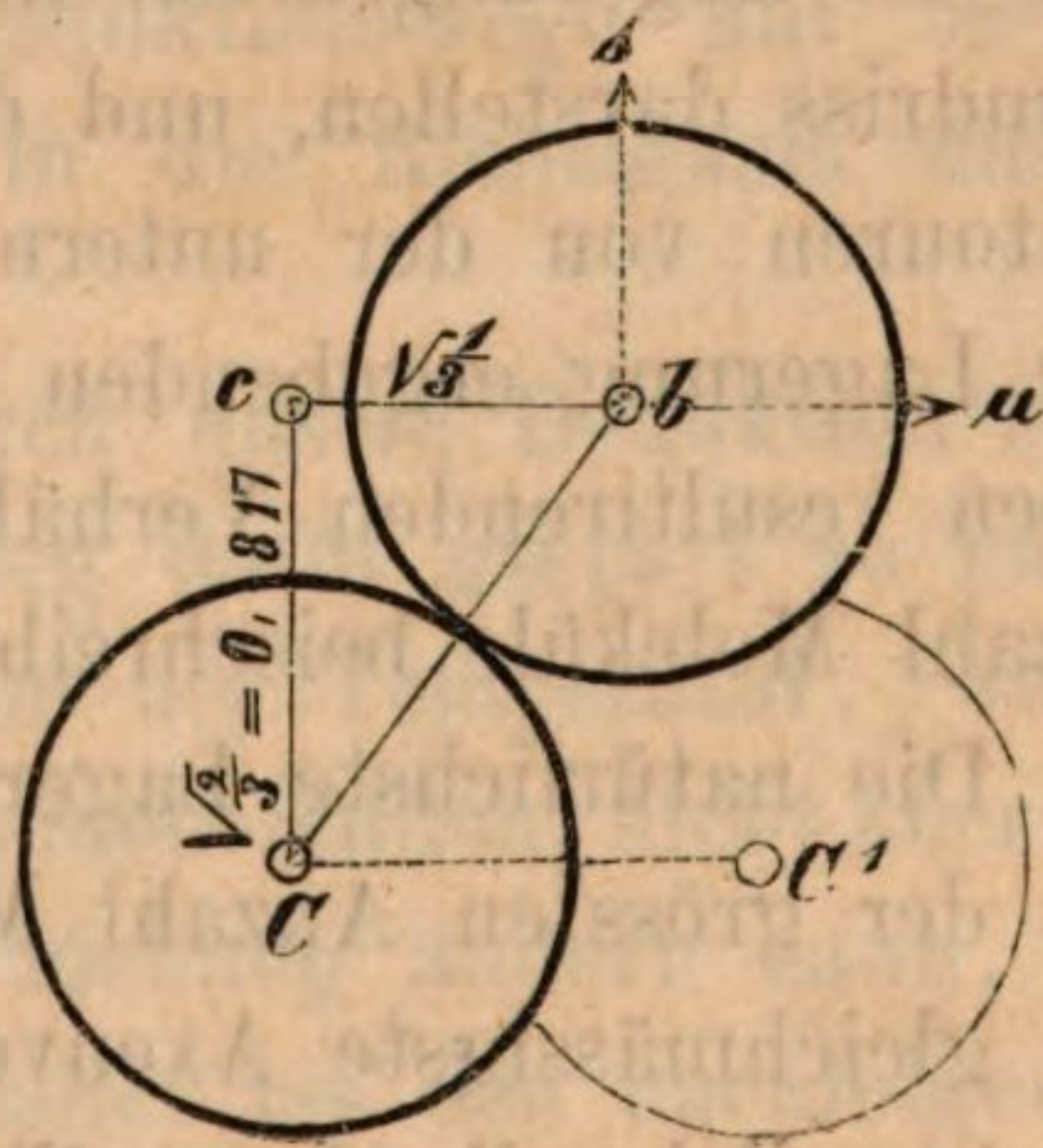


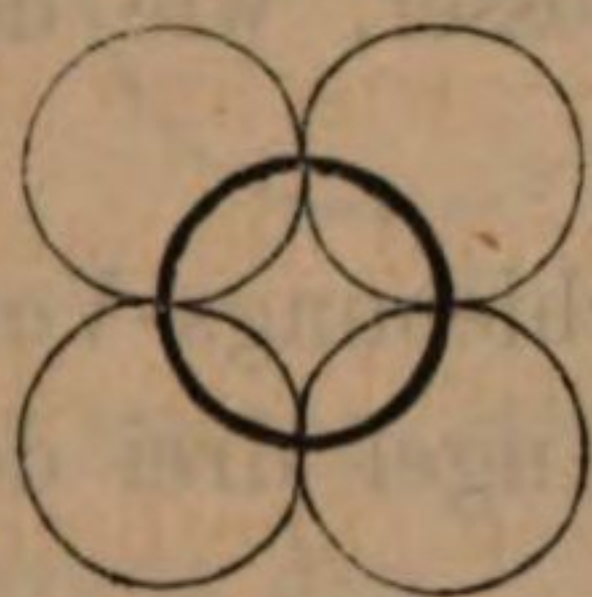
Fig. 3.

Vertikalschnitt nach cb .

Die obere Lage bb' ist in der Ansicht von oben mit stärkeren, die untere $c c^1 c^2 c^3$ mit schwächeren Contouren gezeichnet. Wird hier die obere Lage über der untern in der Richtung von b nach b' fortgezogen, so ist es wohl klar, dass jede obere Kugel bestrebt sein wird, denjenigen Weg einzuschlagen, auf dem sie sich am aller langsamsten und wenigsten von den untern drei Kugeln, mit welchen sie in Berührung stand, zu entfernen braucht. Die Kugel b wird also beispielsweise statt sich direkt über c^1 abzuwälzen, sich zunächst über die Mulde zwischen c^1 und c^2 nach c^3 hin bewegen, nachdem sie die tiefste Lage zwischen $c^1 c^2$ und c^3 erreicht hat, dieselbe Bewegung zwischen c^1 und c^3 hindurch machen, und schliesslich die Lage b^1 einnehmen, ehe sie sich von allen drei Kugeln, mit denen sie ursprünglich in Berührung stand, zu entfernen, und damit die volle Abscheerung beginnt. Sämmtliche übrigen Moleküle der obern Lage können, wie leicht ersichtlich, diese Zickzack-Bewegung mitmachen, während sie in ungestörter Berührung mit einander verbleiben. Durch diese unendlich kleinen Hin- und Herbewegungen in vertikaler und horizontaler Axenrichtung erklären sich die so eigenthümlichen Schwingungen, welche man im Wasser schon bei der leisesten Erschütterung wahrnimmt.

In Figur 2 berechnet sich die Länge cb mit $\frac{2}{3}$ der Transversale des gleichseitigen Dreiecks $c c^1 c^2 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ daraus in Figur 3 $\tan \varphi'$, die Entfernung der Ebene sämmtlicher Mittelpunkte der obern Lage von der der untern auf $\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,817$ und φ' auf $39^\circ 15'$.

Fig. 4.

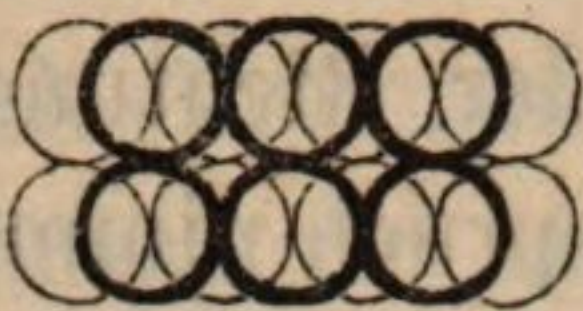


Setzen wir nun noch eine dritte Lagerung als möglich voraus, in der wie in Figur 4 eine obere Kugel vier untere berührt, so ergibt sich durch eine gleiche Betrachtung, $\tan \varphi'$ auf $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7072$, und φ' auf $35^\circ 16'$.

Untersuchen wir nun ferner, welche von diesen drei Lagerungen den physikalischen Eigenschaften des Wassers am vollkommensten entspricht, und somit die wahrscheinlichste ist. Es sind überhaupt nur vier Lagerungsarten möglich. Wir wollen dieselben nachfolgend im Grundriss darstellen, und dabei die obere Lage wiederum durch stärkere Contouren von der untern auszeichnen, gleichzeitig auch die sich für jede Lagerung ergebenden Axenverhältnisse und aus dem Produkte derselben resultirenden Verhältnisszahlen für die Volumina einer gleichen Anzahl Moleküle beischreiben.

Die natürlichste Lagerung muss selbstredend diejenige sein, welche mit der grössten Anzahl Moleküle den kleinsten Raum einnimmt, und das gleichmässigste Axenverhältniss gestattet. Dieser Bedingung entspricht allein die Lage Figur 7, während die Lage Figur 8 bei dem

Grundriss. Axenverhältnisse. Axenprodukte.

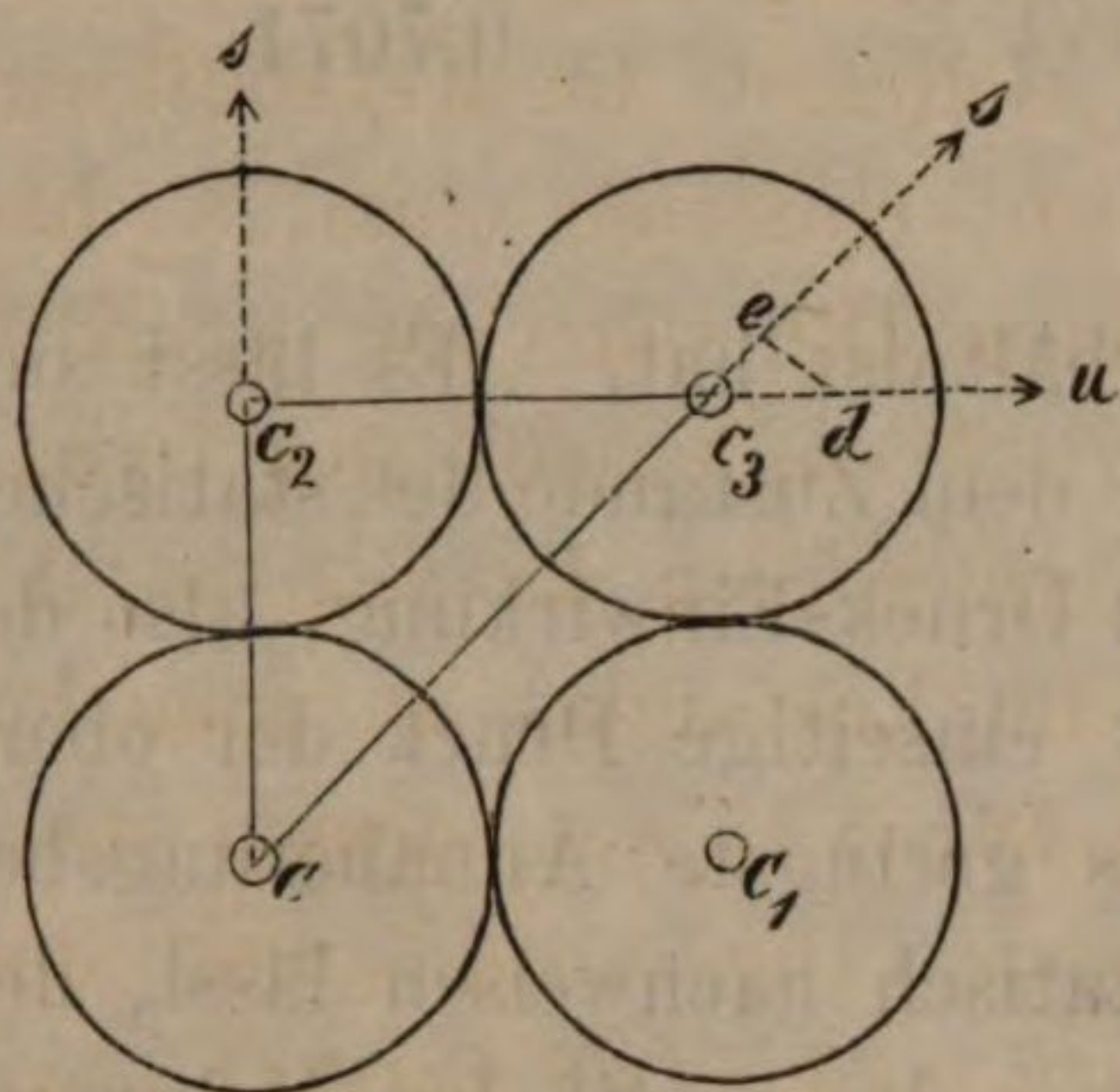
Fig. 5.		$1:1:\sqrt{\frac{3}{4}}$	0,8670
Fig. 6.		$1:\sqrt{\frac{3}{4}}:\sqrt{\frac{3}{4}}$	0,7500
Fig. 7.		$1:\sqrt{\frac{3}{4}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$	0,7071
Fig. 8.		$1:1:\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,7071

gleichen Volumen ein ungleicheres Axenverhältniss hat. Es lässt sich daraus der Schluss ziehen, dass erstere Lage dem Zustande des statischen Gleichgewichts, letztere dem der einseitigen Druck-Einwirkung, also der Bewegung entspricht. Der allergeringste einseitige Druck der obern Moleküle in Lage Figur 7, damit also das geringste Annäherungsstreben gegen die untern, muss, wie sich statisch nachweisen lässt, den Uebergang in Lage Figur 8, eine Verkürzung der vertikalen Volumenaxe und eine dem entsprechende Verlängerung einer der Horizontalen zu Folge haben, ohne dass die Moleküle eine andere als drehende Bewegung gegen einander zu machen brauchen, ohne dass also ein Cohäsionswiderstand zur Einwirkung gelangt. Es kann sogar ohne einen solchen, jede der obern Molekül-Schichten in Lage Figur 8 zwischen die untern, solche aus einander treibend, hindurchgleiten, während die nachfolgenden in ihre Stelle treten, und dieser Vorgang entspricht der Molekular-Bewegung beim Ausflusse des Wassers aus Gefässen, überhaupt bei Verzögerung oder Beschleunigung der einzelnen Wasserschichten. Wir werden später hierauf zurückkommen. Für jetzt genügt uns den Winkel φ , welchen wir im Zustande der statischen Ruhe in Lage Figur 7 auf $39^\circ 48'$ gemessen haben, auf dem Deduktionswege auf $39^\circ 15'$ ermittelt und dadurch einiges Zutrauen in die Richtigkeit unserer Messung gewonnen zu haben.

Ausserdem glauben wir uns aber durch unsere Deduktion einen weitem Nachweis durch den Experimentalweg dafür gespart zu haben, dass der Winkel φ durchaus unabhängig von der Temperatur, welche doch nur die Ausdehnung der einzelnen Dynamiden-Hüllen, nicht aber ihre Form, und die Art der gegenseitigen Verschiebung ändern kann, zur Wirkung gelangt. Wir werden denselben daher bei den nachfolgenden Untersuchungen mit vollkommenem Rechte als konstant annehmen.

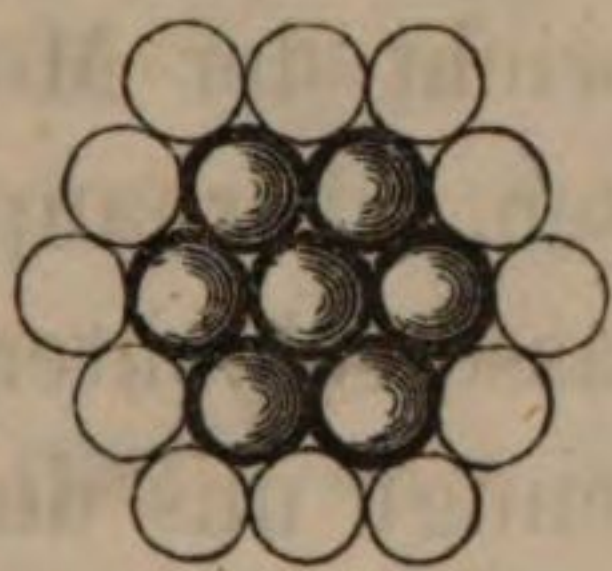
Denken wir uns nun eine Kraft s bestrebt, die obere Lage von der untern in normaler Richtung gegen die Lagerebene zu entfernen. Es muss dann selbstredend erst diejenige Bewegung in der Richtung nach s erfolgen, welche den geringsten Kraftaufwand in Anspruch nimmt. Dies kann keine andere sein als eine abwälzende Bewegung, in welcher die beiden Lagen aus der vorhin unter Figur 7 im Grundrisse betrachteten in die nachstehend Figur 9 im Aufrisse dargestellte gelangen, welche, im Falle die obere Schicht unverrückbar festgehalten wird, die untern Schichten wieder entsprechend mitmachen müssen, sofern man sich ihre Schwerkraft aufgehoben denkt.

Fig. 9.



Es würden nunmehr alle Senkrechten durch die Mittelpunkte der einen Lage sämtliche Mittelpunkte der darunter liegenden, statt abwechselnd, einmal Mittelpunkt, und einmal Zwischenraum schneiden. Selbstverständlich können wir uns diese Verschiebung auch in jeder andern beliebigen Richtung als möglich denken, sofern die natürliche Lagerung, welche wir uns des Vergleichs halber in der Horizontalebene einer Kugelpyramide vorgestellt haben, sich in vertikaler oder geneigter Axenrichtung hergestellt hat. Je 7 Kugeln würden dann den Kern einer normal gegen diese Lagerung durchschiessenden sechsseitigen Säule von dem Querprofil Figur 10 bilden.

Fig. 10.



Das Ausdehnungsverhältniss, welchem das Wasser bei diesem Vorgange unterworfen ist, berechnet sich auf $1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,817 : 1$. Höchst merkwürdig ist jedenfalls die Beziehung, dass das Wasser beim Gefrieren nicht nur sechsseitige Säulen bildet, sondern das specifische Gewicht 0,927 annimmt, dass sich also das specifische Volumen des Wassers zu dem des Eises wie 0,927:1 verhält, und dass man ferner aus vielfachen Beobachtungen und Erscheinungen beim Gefrieren desselben in theilweise, oder ganz verschlossenen Gefässen den Schluss ziehen muss, dass die Ausdehnung nicht nach allen Axenrichtungen gleich, sondern nur nach einer, höchstens zweien erfolgt sein kann. Auch bei der dreiseitigen Pyramidenform der Hagelkörner nehmen wir zwei Axen als gleich, und die dritte als länger wahr. Dass das Wasser diese Axenrichtung nach einem bestimmten Gesetze wählen muss, möchte nicht bestritten werden können. Es liegt zu nahe, dasselbe in der dreigliedrigen Atombildung der einzelnen Moleküle zu suchen, und die gesuchte

Axenrichtung in die der Wasserstoff-Atome zu verlegen. Sofern der Uebergang zu dieser Molekular-Verschiebung sich allmählig vorbereitet, würde die auffallende Volumen-Zunahme von 4° C. bis 0° , trotz fortschreitender Annäherung der einzelnen Moleküle, worauf die gleichmäßig fortschreitende Zunahme der absoluten Festigkeit schliessen lässt, nicht mehr unerklärlich erscheinen. Auch mag wohl das Anschliessen der Crystalle an eingetauchte feste Körper, die Bildung von Grund- und Ufereis, durch die hier stetig stattfindende Abscheerung, welche auf mechanischem Wege die Molekular-Verschiebung befördert, eine Erklärung finden. Halten wir unsere frühere Hypothese aufrecht, nach welcher bei dem Uebergange aus dem tropfbar flüssigen in den festen Zustand, eine mindestens unendlich annähernde Berührung der Moleküle in einzelnen Axenrichtungen, über die uns vielleicht die Krystallform resp. die Spaltflächen nähern Aufschluss geben, eintreten muss, so behalten wir bei obiger Vergleichsrechnung eine Differenz von $0,927 - 0,817 = 0,110$, also in jeder Axenrichtung $\frac{0,110}{3} = 0,0367$ des Dynamiden-Durchmessers übrig, um welche die Aetherhüllen der sich berührenden Moleküle in der Berührungs-Axe beim Eise näher an einander gerückt sein müssen, wie sie im Wasser von $18\frac{3}{4}^{\circ}$ C. war, dessen spec. Gewicht wir als Einheit angenommen haben. Die Ausdehnung des Wassers in einer Axenrichtung, zwischen $18\frac{3}{4}$ und 4° C. beträgt etwa 0,0005. Wir würden dann das von uns mit 0,0143 angenommene wahrscheinliche Verhältniss der Aetherhüllen zu den Molekülen zunächst auf $0,0143 + 0,0367 - 0,0005 = 0,0505$ des Dynamiden-Durchmessers bei Wasser von 100° C. zu berichtigen haben. Kehren wir nunmehr zu unserer letzten Handzeichnung, und der Untersuchung des Verhältnisses zwischen s und μ zurück.

Denkt man sich in Figur 9 das Molekül C_3 in der Richtung einer horizontal wirkenden Kraft μ um einen sehr kleinen Weg $c_3 d$ fortbewegt, so verhält sich letzterer zu der dadurch in centraler Richtung von c gewonnenen Entfernung wie $cc_3 : c_2 c_3 = \sqrt{2} : 1$, was sich durch Aehnlichkeit der Dreiecke $cc_2 c_3$ und $c_3 ed$ leicht beweisen lässt.

Da nun die zur Hervorbringung gleicher Entfernungen eines Moleküles von dem andern erforderliche mechanische Arbeit eine constante ist, so müssen sich folgerichtig die dabei erforderlichen Zugkräfte, umgekehrt wie die zurückgelegten Wege verhalten, und es muss also die Zugkraft μ sich zu der, in centraler Richtung von c nach c_3 auf Entfernung wirkenden Kraft s wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten. Durch eine gleiche Relation ergiebt sich in Figur 3, dass der Weg, welchen das Molekül b in der Richtung nach μ zurücklegen muss, um in eine gewisse sehr kleine centrale Entfernung von c zu gelangen, sich zu dem Wege in der Richtung nach s , um in die gleiche Entfernung zu gelangen wie

$cc : cb = \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} : 1$ mithin also auch hier $\mu : s$ wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten muss.

Wenn dies Resultat nun mit dem Ergebnisse unserer Versuche so genau übereinstimmt, dass wir diese Uebereinstimmung nicht mehr der Genauigkeit und Sorgfalt dieser Versuche, sondern nur einem Zufalle oder einer glücklichen Schätzung zuzuschreiben vermögen, so gestattet es auf dem umgekehrten Wege wiederum einen Rückschluss auf das Zutreffen der Hypothesen, von denen wir bei dieser Untersuchung ausgegangen sind.

§ 4.

Cohäsion und Adhäsion.

Ehe wir nun zu der Beschreibung der Versuche zur Ermittlung der Constanten s , μ und φ übergehen können, bedarf es zur Herbeiführung eines allgemeinen Einverständnisses einer eingehenden kritischen Untersuchung der Beziehungen zwischen der Cohäsion der Wasser-Moleküle, und der Adhäsion derselben zu den Molekülen fester Körper, welche mit ihnen in Berührung kommen.

Die Vorstellung, dass gleichartigen Atomen zu ungleichartigen eine grössere Anziehungskraft beiwohnen soll, wie zu einander, ohne dass chemische Verwandtschaftsverhältnisse, oder elektrische und magnetische Spannungen thätig sind, erscheint uns schon an und für sich unvereinbar mit unserer Naturanschauung und keine Erscheinung vermag uns das Gegentheil zu beweisen, wenn wir kritisch auf ihre letzten Gründe zurückgehen. Wir glauben uns vollkommen mit den Lehren der Physik im Einverständniss zu befinden, wenn wir als Massstab für die Grösse der Adhäsion die Schnelligkeit annehmen, mit der ein auf die horizontale und ebene Oberfläche eines Körpers gehefteter Wassertropfen darauf zerfliesst, und den Umfang mit welchem er dieselbe schliesslich benetzt, nur dass wir dabei von den in Vergleich zu ziehenden Flächen gleiche Dichtigkeit und gleiche Ebenheit resp. Glätte beanspruchen müssen. Dem Verfasser ist es wenigstens nicht gelungen, eine andere Körperfläche aufzufinden, auf der ein Tropfen Wasser schneller zerfliesst, und sich weiter ausbreitet, als die des feinsten Spiegelglases, und dennoch erfolgt dieser Vorgang hier noch nicht so schnell und vollkommen als auf der gleich glatten Fläche des Eises in vollkommen unbenetztem Zustande.

Es kommt also die Adhäsion des Wassers zum Glase der eignen Cohäsion zwar sehr nahe, aber erreicht sie noch nicht.

Abgesehen davon ferner, dass wir bereits auf dem Gebiet der Hypothese alle Repulsivkräfte dem Aether und den Aether-Schwingungen, und sie den Körper-Atomen nur als Differenzial-Erscheinungen der chemischen Verwandtschaft zugeschrieben haben, vermögen wir durch kein

erdenkliches Experiment nachzuweisen, dass sich ungleichartige Körper-Atome oder Moleküle von einander abstossen. Wir vermögen nämlich keine Körperfläche aufzufinden, die auf Wasser gelegt, sich mit geringerer Kraft-Anstrengung davon losreissen lässt, als mit der, welche die eigene Cohäsion des Wassers ausdrückt, und wenn wir finden, dass Quecksilber, in einer Glasröhre aufsteigend, die darin eingesenkt wird, nicht nur eine convexe Oberfläche bildet, sondern auch nicht bis zu dem vollen Druck-Niveau aufsteigt, so lässt sich durch eine einfache statische Betrachtung nachweisen, dass die Form dieser convexen Oberfläche, lediglich eine Funktion der eignen Cohäsion, und der Biegungsfähigkeit des Quecksilbers unter der Voraussetzung wird, dass die einschliessende Glaswand weder Anziehungs-Kraft noch Abstossungs-Kraft äussert. Wenn ferner die Oberfläche des Glases, trotzdem sie spiegelglatt erscheinen mag, nur Poren enthält, von der halben Tiefe eines Quecksilber-Atoms, so muss dem Aufsteigen desselben, ein Abscheerungs-Widerstand, oder, wenn wir den dafür bisher gebräuchlichen Ausdruck setzen, „Reibungs-Widerstand“ entgegentreten, zu dessen Ueberwindung ein gewisser Ueberdruck des Quecksilber-Standes ausserhalb der Glasröhre erforderlich wird, und der im umgekehrten Verhältnisse mit dem Durchmesser der Röhre wächst. Zieht man nun die Glasröhre in die Höhe, so treten ganz veränderte Verhältnisse ein. Entweder reicht schon diejenige, ausser der Schwere in dem untern Röhren-Querschnitte wirksam werdende Zugkraft, welche durch die absolute Festigkeit und die Luft-Spannung gemessen wird, zur Ueberwindung des Abscheerungs-Widerstandes in der Richtung abwärts aus, oder der überschüssige Theil des letztern wird durch unendlich kleine Bewegungs-Momente, die sich in Folge der Biegsamkeit der Massen-Trägheit und der Beschleunigung durch die Schwere in, wenn auch unendlich kleinen, Intervallen auf sammeln, vollends überwunden. Es kann demnach die ursprüngliche Niveau-Differenz auch beim Aufziehen der Röhre, wenn auch nicht genau in demselben Maasse bestehen bleiben. Uebrigens ergeben aber auch die mit verschiedenen Flüssigkeiten angestellten Kapillaritäts-Versuche, dass die Aufsteighöhen und Compressionstiefen, ausser von dem Durchmesser der Röhren, nur von der Natur der Flüssigkeit und der mechanischen Beschaffenheit der Oberfläche, nicht aber vom Stoffe der letztern abhängig sind.

Wir können also bis zur Führung des Gegenbeweises den Satz unserer weitem Untersuchung zu Grunde legen:

Dass wir es bei der Berührung des Wassers mit den Flächen fester Körper nur mit solchen Körpern zu thun haben, deren Adhäsion zum Wasser entweder = Null oder kleiner, als die Cohäsion desselben ist.

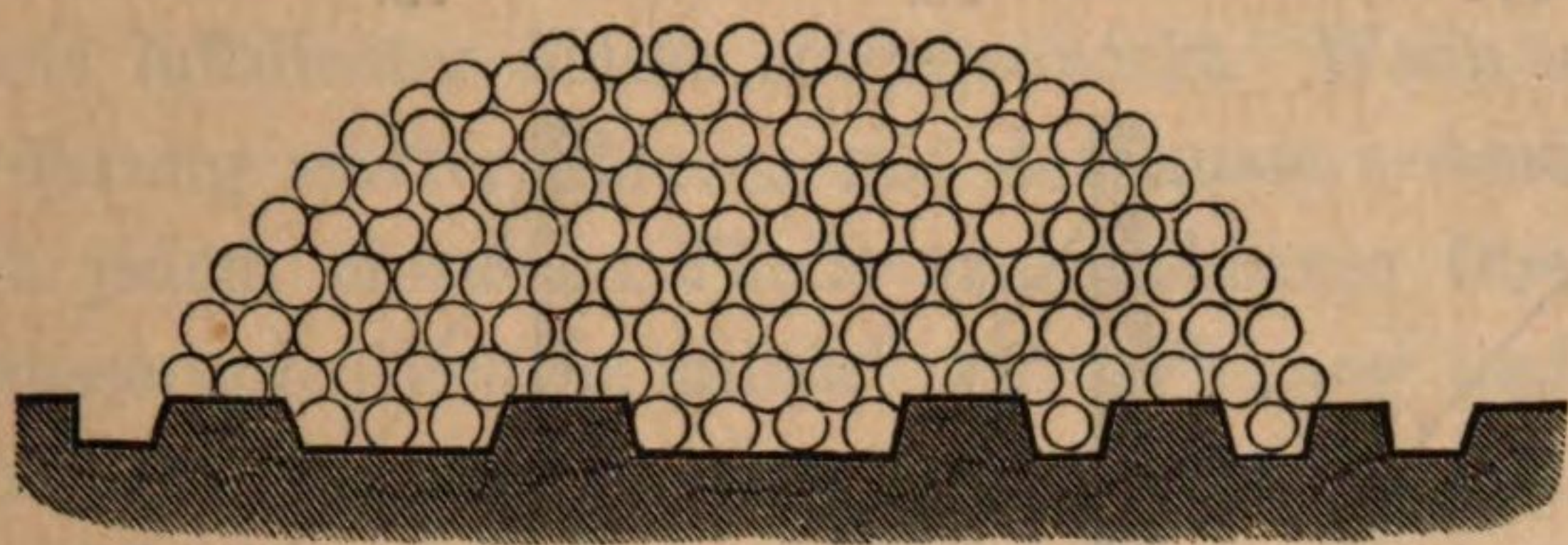
Es wird kaum nöthig sein, uns noch einmal daran zu erinnern, dass die Attraktion als Molekular-Kraft überhaupt schon in unendlich kleiner Entfernung der Atome von einander ihre Wirkung nicht mehr zu äussern vermag, so dass wir diese Kraft erst bei einer augenscheinlichen Berührung wahrzunehmen vermögen.

Aus den früheren Betrachtungen kann aber auch wohl kein Zweifel darüber bleiben, dass diese unendlich kleine Entfernung den Dynamiden-Durchmesser jedenfalls nicht erheblich überschreiten kann, wenn der ursprüngliche Zusammenhang nicht aufgehoben werden soll, also auch kaum von dem zunächst lagernden Atome sich auf das 3te und 4te hinaus zu erstrecken vermag. Damit fällt nun jede Veranlassung fort, uns mit denjenigen Fällen weiter zu beschäftigen, in denen Wasser an Flächen haftet, oder sich darüber fortbewegt, welche davon benetzt bleiben, denn es haben sich in diesem Falle nicht Wasser-Moleküle von ungleichartigen Körper-Molekülen, sondern lediglich erstere von einander getrennt, und mit der Kraft, welche in solchen Fällen der Bewegung hinderlich entgegentritt, kann also nichts anderes, als die eigne Cohäsion des Wassers, entweder die absolute Festigkeit s , oder die Abscheerungs-Festigkeit μ gemessen sein, weil die Bewegung, wie schon die Erfahrung lehrt, entweder in normaler Richtung von der Fläche ab, oder in paralleler Richtung längs derselben hin erfolgt.

Hiermit ist der Nachweis dafür, dass keine sogenannten Adhäsions- oder Reibungs-Widerstände irgend einer Bewegung des Wassers, sondern nur unsere beiden Grössen s und μ entgegentreten können, während die Grösse von φ wieder zu Gunsten des Bewegungs-Anfanges vorhanden ist, vollkommen erschöpft, denn in der Natur vermögen wir keine Körperflächen aufzufinden, die nicht bei fortgesetzter und andauernder Berührung des Wassers, schliesslich davon benetzt werden. Nur der Vollständigkeit halber, wollen wir auch den Fall in Betracht ziehen, indem eine Körperfläche nicht von dem Wasser benetzt wird, also beispielsweise bei geneigter Lage ein Wassertropfen daran herunterläuft, ohne eine sichtbare Spur zu hinterlassen. Wir werden als Beispiel dazu nicht nur eine möglichst dichte und porenfreie Fläche, sondern auch eine möglichst spiegelglatte und ebene nehmen, deren Adhäsion gegen die Wasser-Moleküle sich möglichst der Null nähert. Von allen solchen finden wir diese Eigenschaften am meisten bei einer Lack- oder Wachfläche, die vorher mit Oel, jedoch möglichst trocken abgerieben war, so dass die darin enthaltenen Luftporen mit der Oelmasse ausgefüllt und geschlossen wurden. Bleibt überschüssiges Oel darauf, so kommt das Wasser gar nicht mit den Körper-Molekülen in Berührung und gleitet, wie man dies leicht beobachten kann, nicht über letztern fort, sondern die Oelschicht gleitet, während das Wasser fest

an derselben hängen bleibt, und man damit nur die Cohäsion und Verschiebbarkeit des Oels beobachtet. Weder Natur-, noch Schleif- und Polier-Kunst vermögen aber Flächen herzustellen, die sich dem Auge bei millionenfacher Vergrösserung anders, als in dem Figur 11 skizirten Querschnitt darstellen, denn die äussersten Ecken unsers feinsten Polierpulvers würden unter solcher Vergrösserung immer noch als Felsblöcke gegen die Grösse eines Wasser-Moleküls erscheinen, und die von ihnen eingerissenen Furchen sich als tiefe Schluchten darstellen.

Fig. 11.



Es ist klar, dass hier die unterste Molekül-Lage am Hinweggleiten über die Flächen verhindert wird. Ist nun weder Adhäsion noch Repulsion der Flächen-Moleküle thätig,

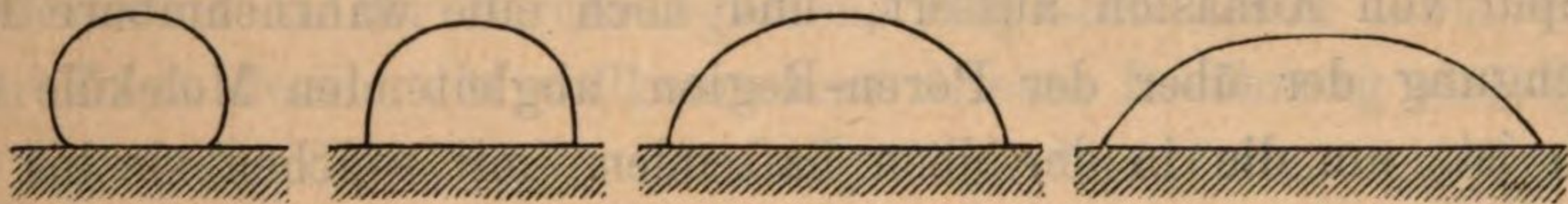
so wirkt trotzdem einer Ausdehnung oder Verschiebung der zweiten Molekül-Lage durch den hydrostatischen Seitendruck die eigene Cohäsion entgegen. Eine solche kann augenscheinlich nicht anders vor sich gehen, als wenn die Moleküle der untern Lage in centrifugaler Richtung auseinander gerissen werden, und die der obern Lagen gleichzeitig sich dazwischen schieben. Ein Wassertropfen wird dann diejenige Form annehmen, welche lediglich durch das Gleichgewicht der Schwerkraft mit der Cohäsions-Kraft in jeglicher Ebene und Axen-Richtung bedingt wird, und die wir später zum Gegenstande der Untersuchung machen werden. In diesem Zustande beobachten wir, je nachdem die Adhäsion 0 ist, oder eine messbare Grösse annimmt, nachstehende Tropfen-Querschnitte.

Fig. 12.

13.

14.

15.



Die Form 12 lässt sich nur bei der grössten Vorsicht und auf ganz kurze Momente herstellen, und geht auch schon bei der allerleichtesten Erschütterung, durch welche die Wassermasse ein Bewegungsmoment erlangt, in die Form 13 über, bei der die Querschnitts-Kurve rechtwinklig die Berührungs-Fläche schneidet. Auf Spiegelglas wird diese Kurve natürlich noch flacher und nähert sich schliesslich bei weiterer Ausbreitung tangirend einer durch ihren Scheitelpunkt gelegten Horizontale. Man kann auch schon mit blossen Auge, während der Ausbreitung wahrnehmen, dass dieselbe nicht allmählig, sondern in un-

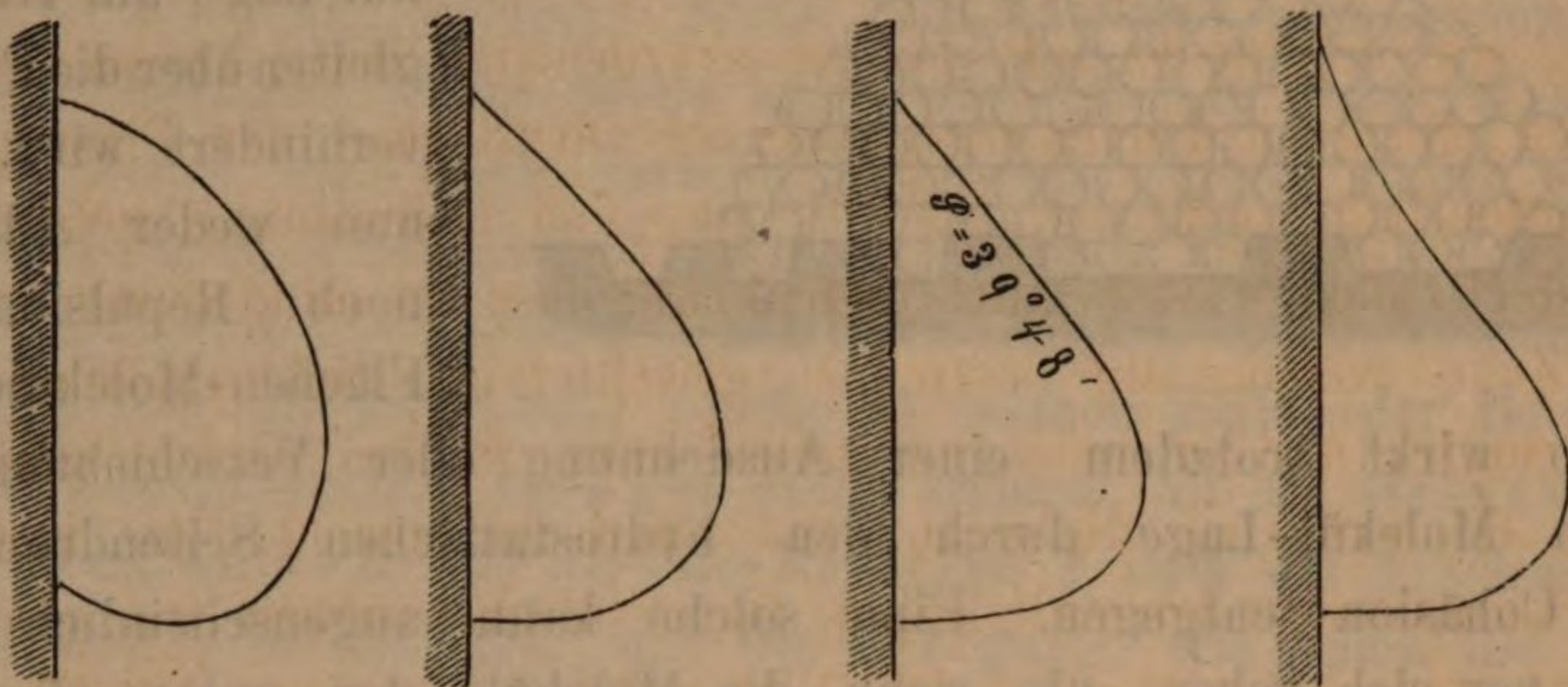
endlich kleinen Bewegungs-Momenten, entsprechend den Poren der Berührungs-Fläche erfolgt, und durch die leichteste Erschütterung befördert wird. Neigen wir die Fläche mit dem darauf ruhenden Tropfen bis derselbe sich anfängt in Bewegung zu setzen, ohne eine Netzspur zu hinterlassen, so finden wir im Augenblicke des Bewegungs-Anfanges nachstehende 4 Formen. Die Neigung der Fläche hängt dabei selbstredend von der Grösse und dem Gewicht des Tropfens ab. Wir wollen dieselben der Bequemlichkeit halber, alle an vertikaler Fläche hängend, darstellen.

Fig. 16.

17.

18.

19.



Die Form 16 finden wir nur bei einer Wachs- oder Lackfläche mit überflüssigem Oel, bei der nicht das Wasser, sondern das Oel mit geringer Cohäsion und grösserer Biegsamkeit über die Fläche hinweggleitet, ehe sich die Form des Tropfens, seinen eignen Cohäsions-Verhältnissen gemäss, hat anspannen können. Die Form 17 finden wir im Moment, ehe die Bewegung beginnt. Die Form 18 im Moment des Bewegungs-Anfanges und mit ihr zugleich den Winkel $\varphi = 39^\circ 48'$, wie dies denn auch bei der nähern Betrachtung nicht anders sein kann. Die Form 19 während der Bewegung, sofern die berührte Fläche noch eine Spur von Adhäsion äussert, und noch eine wahrnehmbare Kraft-Anstrengung der über der Poren-Region abgleitenden Moleküle erforderlich ist, um die in derselben haftenden, mit welchen sie bis dahin in Berührung waren, nach sich und aus den Poren heraus zu ziehen. In allen 4 Fällen hinterlässt sodann der Tropfen keine wahrnehmbare Spur. Und doch wird es hiernach keines weitem Beweises bedürfen, dass auch in diesen Fällen die Bewegung nicht eher erfolgen kann, als bis die volle Abscheerungs-Kraft der zweiten Molekül-Lage über der in den Poren einstweilen zurückgehaltenen in Anspruch genommen ist.

§ 5.

Versuche zur Bestimmung der drei Constanten s , μ und φ .

Die Grösse s , welche die absolute Festigkeit des Wassers ausdrückt, hätte sich nach unserer Meinung schon bei vielfältigen Versuchen als beziehungsweise Constante ergeben müssen, wenn nicht ein einziger Umstand bei allen diesen Versuchen, insbesondere dem Abheben von Platten von der Oberfläche verschiedener Flüssigkeiten, ohne Erwägung und Berücksichtigung geblieben wäre, nämlich der Luftdruck, welcher der Trennung zweier luftdicht auf einander accommodirten Körperflächen aus luftdichter Masse entgegenwirkt. Wenn schon derselbe bei der Berührung starrer Flächen mit den ausserordentlich leicht biegsamen und in jedem einzelnen Theile verschiebbaren Oberflächen der Flüssigkeiten ausserordentlich modifizirt zur Wirkung und Erscheinung gelangt, so ist es doch auch wieder ganz undenkbar, dass er mindestens bei dem ersten Zuge, welcher auf Lostrennen gerichtet ist, nicht zu solcher gelangen sollte, und er muss zweifellos dazu in dem Grade gelangen, als die Körperflächen dicht und für elastische sowohl, als tropfbare Flüssigkeiten undurchdringlich sind, ferner die Flüssigkeit frei von Lufttheilchen und wenig biegsam ist. Wie sollte sich die von Gay Lussac beobachtete Erscheinung erklären, dass um eine 120 mm. grosse Glasplatte von der Oberfläche des Quecksilbers abzureissen eine Zugkraft von 150 gr., und wenn dieselbe längere Zeit darauf gelegen hat, schliesslich von 300 gr. erforderlich ist, da doch kein Zweifel dagegen aufkommen kann, dass die Adhäsions-Kraft hier verschwindend klein, scheinbar sogar negativ ist. Sollte man, um die Erklärung dafür zu suchen, die Existenz noch ganz unbekannter und geheimnissvoller Kräfte voraussetzen, so lange die bekannten dafür hinreichen? Je länger das eigne Gewicht der Glasplatten auf Entweichen der bei dem ersten Auflegen derselben in der Berührungsebene eingeschlossenen Lufttheilchen, und in Folge dessen auf vollkommnere direkte Berührung des Quecksilbers hinwirkt, desto mehr muss der bei dem ersten Abheben entstehende unendlich kleine Zwischenraum sich vom luftverdünnten dem luftleeren nähern, desto grösser also die Spannung werden. Das Wasser hat stets eine verhältnissmässig bedeutende Menge atmosphärischer Luft verschluckt. Trennt man nun zwei Wassermassen, die beide in hinlänglicher Berührung mit der äussern Luft stehn, von einander, so wird natürlich dabei eine gewisse, aber darum höchst unbedeutende Luftspannung eintreten, und ausser der Cohäsion der Trennung entgegenwirken, weil bei der unendlich kleinen Entfernung der Moleküle, die zur Trennung genügt, sehr bald aus den zunächst liegenden Wasserschichten eine ausreichende Luftmasse nachgesogen sein wird, um den

Einfluss der Luftspannung ganz verschwinden zu lassen. Wie leicht ein solches Nachsaugen in den Zwischenräumen der Moleküle erfolgt, darüber giebt uns das Verhältniss Aufschluss, indem die theoretische Saughöhe in Leitungs-Röhren zu der erfahrungsmässigen steht, wie 32 Fuss etwa zu 27 Fuss. Es mag trotzdem immerhin sein, dass auch, wenn wir den wahren Werth der Cohäsion der Flüssigkeiten gemessen zu haben glauben, wir damit immer noch einen Theil der Luftspannung gegriffen haben, und es ist wohl nicht unmöglich, dass das so sehr verschiedene Verhältniss, in dem Cohäsion und Volumen mit der Temperatur ab- und zunehmen, beim Wasser durch Entweichen von Lufttheilchen während der Erwärmung beeinflusst wird; wir können aber die Cohäsion doch einmal nicht anders messen, wie sie im natürlichen Zustande des Wassers zur Wirkung gelangt, und haben einstweilen auch kein Interesse daran dies zu thun. Wollen wir dies aber thun, dann dürfen wir sie ganz gewiss nicht durch das Gewicht derjenigen Wassersäule messen, welche eine Platte von vollkommen luftdichtem Stoffe beim Abheben von der Oberfläche eines stillstehenden Wassers nach sich zu ziehen vermag, ehe die Lostrennung erfolgt. Es würde in diesem Falle das Nachsaugen behufs Ausgleichung der Luftspannung nur einseitig von der Wasserseite her, und daher halb so vollständig vor sich gehen können. In Folge dessen muss in den zunächst die Fläche berührenden Wasserschichten die doppelte Anspannung stattfinden, und daher eine ungleich höhere Wassersäule hängen bleiben, als bei einem Stoffe, der in Bezug auf Luftgehalt und Durchdringlichkeit dem Wasser nicht nachsteht.

Bei seinen Versuchen bediente sich der Verfasser daher eines kreisrund geschnittenen, von beiden Seiten abgehobelten und abgeschliffenen, 12 Zoll $11\frac{1}{2}$ Lin. im Durchmesser, also 0,9158 pr. □Fuss Fläche enthaltenden, $1\frac{1}{4}$ Zoll dicken Brettstückes von ausgesucht porösem und weichem Tannenholz, und ging dabei von der Betrachtung aus, dass in sämtlichen Poren, so lange dieselben noch nicht vom Wasser angefüllt sein sollten, eine hinreichende Luftmenge zum Nachsaugen enthalten sein würde, damit der störende Einfluss der Luftspannung dadurch paralysirt werde. Sollten dagegen durch Aufsaugen sämtliche Poren mit Wasser angefüllt sein, so würde gewissermassen auch das Wasser an der Berührungs-Fläche durch unendlich viele kleine Kanäle in möglichst vollkommene Verbindung mit der äussern Luft gesetzt, und hiermit der beabsichtigte Zweck erreicht werden. Es ergab sich dann auch in der That, dass sowohl bei der ersten, als bei fortgesetzter Berührung mit dem Wasser ein Gewicht von genau 20 Loth die Trennung der Holzplatte von demselben herbeiführte. Zur Gewichts-Bestimmung wurde ein etwa 10 Zoll langer Wagebalken, welcher auf einen Aus-

schlag von $\frac{1}{30}$ Loth geprüft war, benutzt. Es wurden so lange Gewichte nachgelegt, bis das Brett sich bei langsamem Aufziehen gleichzeitig mit dem Einspielen der Wagebalken-Zunge hob. Der Versuch wurde zunächst 10mal hinter einander wiederholt, und es ergab sich die grösste Abweichung auf 0,1 Loth, der mittlere Werth für s auf 0,728 Pfund. Benutzt wurde dazu frisches Quellwasser von 13° R. Um sich noch zuverlässiger zu überzeugen, ob die Porosität des Tannenholzes hinlänglich den störenden Einfluss der Luftspannung beseitige, wurde sodann ein Controll-Versuch mit einer 3 Zoll im Durchmesser grossen Korkscheibe angestellt, welche denselben Werth für $s = 0,73$ ergab. Hiernach ist bei allen spätern Versuchen lediglich die Holzscheibe benutzt worden. Mit derselben hat der Verfasser in verschiedenen Zeit-Abschnitten während der folgenden sechs Monate für die Temperatur von 13° R. bei frischem Brunnenwasser und reinem sowohl als lehmigem Flusswasser den Versuch wiederholt, und denselben Werth für s zwischen 0,728 und 0,73 wieder gefunden. Nach jedem Versuche wurde auch eine sorgfältige Korrektur des Flächen-Inhalts in Folge Quellens der Holztafel bei längerer Berührung mit dem Wasser, in der Richtung normal auf die Holzfasern in Berücksichtigung genommen. Wenn dieselbe in ausgetrocknetem Zustande nur von einer Seite mit dem Wasser in Berührung kam, war, wie dies in der Natur der Sache liegt, schon nach längerem Gebrauch ein Werfen der Holztafel, bei der die obere Fläche sich cylindrisch-concav krümmte, wahrzunehmen. Eben sobald stellte sich dieselbe jedoch wieder vollkommen eben dar, nachdem durch Umdrehen die trockene Seite mit dem Wasser in Berührung kam. Bei cylindrisch gekrümmter Fläche erfolgt die Ablösung nicht von der ganzen Fläche zugleich, und ergab deshalb merklich geringere Werthe, ohne Unterschied, ob die concave, oder die convexe Seite vom Wasser abgehoben wurde. Die Form-Veränderung der Holzplatte wurde später durch zwei mit Schwalbenschwanz-Nuth aufgeschobene Querleisten beseitigt. Sämmtliche Versuche sind in Behältern von 6 bis 8 Fuss Durchmesser bei 1 bis 3 Fuss Wassertiefe angestellt. Ausser der bereits erwähnten Abhängigkeit der Grösse s von der Temperatur hat der Verfasser bei vielfältigen Versuchen kein anderes von Erheblichkeit aufzufinden vermocht.

Die von Hagen und andern Autoritäten beobachtete Erscheinung, dass abgestandenes Wasser eine erheblich geringere Spannung zeigen solle, muss daher wohl darin seinen Grund gehabt haben, dass während des Abstehens eine Erwärmung desselben eingetreten, und dass die darauf beobachtete Cohäsions-Abnahme lediglich der eingetretenen Temperatur-Erhöhung entsprochen hat. Der Verfasser hat wenigstens bei einem Versuche mit frischem Quellwasser von 4° R., welches 15 Stun-

den stehen blieb, nachdem dasselbe bis zu 45° erwärmt war, keine Spannungs-Abnahme wahrnehmen können, sondern damit am folgenden Tage genau die Resultate des vorhergehenden wieder erhalten. Dagegen ergab eine Beimischung von 2% Kochsalz bei 10° R. den Werth von s um 0,007 grösser, und es möchte diese Erscheinung wohl mit dem höhern Siedepunkt des Salzwassers im Zusammenhange stehen. Den Experimental-Physikern wird es leicht sein, in dieser Hinsicht unsere ersten Versuche zu ergänzen und einer Korrektur zu unterziehen. Auf unsere Theorie kann dies keinen Einfluss haben, indem wir allgemein gültige Beziehungen mit den Buchstaben s , μ und φ herzuleiten vermögen, und der Zahlen nur bedürfen, um die Uebereinstimmung der Ergebnisse mit den Erscheinungen nachzuweisen.

Die Versuche zur Ermittlung des Abhängigkeits-Verhältnisses von der Temperatur, sind vom Verfasser innerhalb eines Zeitraumes von zwei Jahren dreimal zu verschiedenen Jahreszeiten angestellt. Jeder einzelne Versuch wurde jedoch nur 3 höchstens 4mal wiederholt, und die Gewichts-Bestimmung sowohl als die grösste Abweichung dabei wiederum auf 0,1 Loth beobachtet. Bei den Versuchen für Temperaturen über 13° wurde ein Gefäss mit Wasser auf einer Heerdplatte allmählig bis zum Siedepunkt erwärmt.

Das Ergebniss war:

Für Wasser von	0° R.	$= s =$	0,796	pr. Pfund für den	pr. □Fuss.
"	"	"	3° "	$= s =$	0,780 " " " "
"	"	"	5° "	$= s =$	0,769 " " " "
"	"	"	13° "	$= s =$	0,728 " " " "
"	"	"	21° "	$= s =$	0,687 " " " "
"	"	"	28° "	$= s =$	0,655 " " " "
"	"	"	35° "	$= s =$	0,621 " " " "
"	"	"	40° "	$= s =$	0,594 " " " "
"	"	"	43° "	$= s =$	0,574 " " " "
"	"	"	44° "	$= s =$	0,576 " " " "
"	"	"	70° "	$= s =$	0,439 " " " "
"	"	"	78° "	$= s =$	0,396 " " " "

Bei 80° stellte sich wegen der wallenden Bewegung der Wasseroberfläche in Folge des Siedens der Versuch als unausführbar heraus und gelang nur noch bei 78° .

Es ergibt sich hiernach also eine ziemlich gleichmässige Abnahme von s , mit zunehmender Temperatur und zwar um 0,005 Pfund. Bis zu 70° C. ist diese gleichmässige Abnahme schon von Hagen bei seinen Versuchen über den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren aufgefunden (vergl. Erbkam'sche Zeitschrift f. Bauw. Jahrg. IV Seite 363), nur dass diese Versuche ein bei weitem

geringeres Abnahme-Verhältniss mit 958 : 780 ergeben haben. Es lässt sich dies indessen wohl erklären. Einmal geht nämlich aus der Beschreibung der Hagen'schen Versuche, die mit Abtropfen von einem cylindrischen Stabe angestellt sind, nicht hervor, ob auch der Umstand dabei berücksichtigt ist, dass gleich schwere Tropfen bei höhern Temperaturen der Volumen-Zunahme des Wassers entsprechend auch grössere Abtropfungsquerschnitte haben müssen. Dann aber wird sich später bei der nähern Untersuchung über die Tropfen-Bildung ergeben, dass nur bei einer einzigen ganz bestimmten Stabdicke von 3,86 mm. oder = 1,77 Linien, ein Schluss von dem Gewicht des Tropfens auf die absolute Festigkeit der abtropfenden Flüssigkeit überhaupt zulässig ist.

Von besonderm physikalischen Interesse muss bei den vorstehenden Versuchen das Ergebniss erscheinen, dass die grösste absolute Festigkeit des Wassers nicht mit dem Zustande des kleinsten spec. Volumens und der grössten Dichtigkeit zusammen fällt, dass also zwischen 3 und 0° R. trotz der Volumen-Zunahme die Annäherung der einzelnen Moleküle, mit welcher doch die Attraktion wachsen muss, fortschreitet. Es möchte kaum eine andere Erklärung dafür übrig bleiben, als die von uns vorausgesetzte Molekular-Verschiebung beim Gefrieren, welche sich zwischen 3 und 0° R. vorbereitet. Um nun auch die Richtigkeit der früheren Voraussetzung in Betreff des Einflusses der Luftspannung zu prüfen, wurde die Oberfläche der Holztafel in vollkommen ausgetrocknetem Zustande einige Stunden hindurch wiederholt mit Oel getränkt. Der Versuch mit der geölten Fläche, und für dieselbe Temperatur, bei der sich s auf 0,73 Pfund ergeben hatte, ergab zunächst $s = 0,80$ und bei wiederholtem Abheben zuletzt $s = 0,77$. Eine Untersuchung der geölten Oberfläche ergab, dass durch fortgesetztes Abheben das eingesogene Oel grösstentheils aus den Holzporen entfernt war, und dass dieselbe wieder vom Wasser vollkommen benetzt wurde. Es hatte also ein wirkliches Saugen in den Holzporen bei dem Abheben stattgefunden. Dieselbe Fläche erhielt, nachdem sie wieder trocken geworden war, einen dreimaligen deckenden Oelfarben-Anstrich. Hiermit ergab sich:

s bei	5° R.	auf	0,91 Pfund
„ „	13° „	„	0,86 „
„ „	45° „	„	0,67 „

die Differenzen also ziemlich übereinstimmend mit denen bei Versuchen mit der reinen Holzfläche.

Wir gehen nun zu der Bestimmung von μ über.

Ein auf einer ruhenden Wasserfläche schwimmender Körper lässt sich durch den allerunbedeutendsten Zug in eine so allmähliche Bewegung setzen, dass das Trägheits-Moment verschwindend klein wird. Der Augenschein genügt aber auch schon, um festzustellen, dass derselbe in

diesem Falle nicht durch oder über das Wasser, sondern mit dem Wasser und zwar mit einer gewissen Wassermenge, deren Grösse und Umfang lediglich ausser von μ eine Funktion der Grösse der Körperfläche, welche mit dem Wasser in Berührung steht, der Grösse der stattgehabten Kraft-Einwirkung, der Zeitdauer derselben und des Biegungs-Widerstandes des Wassers ist.

Man muss also, um μ zu ermitteln, zunächst den Biegungs-Widerstand eliminiren. Dies erreicht man dadurch, dass man die Wassermasse, an der man μ messen will, verhindert, eine Bewegung zu machen. Man lege also eine möglichst leichte und dünne plangeschliffene Kork- oder Holzscheibe auf den plangeschliffenen Rand eines Glases oder einer Krystallschale, die reichlich mit Wasser gefüllt ist, und drücke das überschüssige Wasser so lange ab, bis die Scheibe vollkommen eben sich über Rand und Wasser zugleich abzieht, ohne dass Wassertheilchen dabei noch mit hinausgezogen werden. Es bleibt in diesem Falle kein Raum zu einer innern Bewegung der Wassertheilchen übrig. Gelingt es nun auch noch die Reibung der Scheibe auf dem Glasrande zu eliminiren, so hat man bei dem Abziehen der Platte über demselben μ gemessen. Sobald das Wasser in dem Gefässe jedoch noch die geringste Bewegung mitmachen kann, ergiebt sich der Werth für μ sofort kleiner, als er wirklich ist. Mit Hülfe einer chemischen Wage war es möglich, eine genaue Gewichts-Theilung bis zu 0,001 Loth herzustellen. Der Zug wurde durch einen, über ein feines und sorgfältig gearbeitetes Leitröllchen von Messing auf Stahlaxe geführten seidenen Faden, an dem eine Nusschale mit den Gewichten hing, gemessen. Die Korkscheibe sowohl als die Holzscheiben, die aus Fourniren verschiedener Holzarten geschnitten waren, hatten $3\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und waren ausserdem mit Bimsstein genau abgeschliffen und geebnet. Die grössten Poren der Korkscheibe waren nicht über $\frac{1}{2}$ □ Linien gross. Zu den Versuchen wurde wiederum frisches Flusswasser von 13° R. benutzt.

Der erste Versuch wurde auf einem Glase mit convex geschliffenem Rande von $33\frac{1}{2}$ Lin. mittlern Durchmessers mit der Korkscheibe angestellt.

Die Poren der letzteren hatten sich so vollständig mit Wasser angefüllt, dass dieselbe beim Abziehen augenscheinlich nicht auf dem Wasser, sondern auf dem Glasrande aufruhte. Bei gefülltem Glase setzte sich die Scheibe bei einem Brutto-Gewicht (Fadendifferenz, Wageschale und Gewicht) von 1,020 Loth, bei leerem Glase bei 0,354 Loth in Bewegung und verharrte darin ziemlich gleichmässig. Die Differenz ergab $\mu = 0,523$ Pfund.

Der zweite Versuch wurde in gleicher Weise an einem Glase mit 34 Linien äussern, 32 Linien innern Durchmessers und plangeschliffenem Rande angestellt und ergab $\mu = 0,507$.

Bei dem dritten Versuche an demselben Glase mit einem Cigarrenkisten-Brettchen suchte Verfasser die Reibung dadurch zu eliminiren, dass er durch ein in der Mitte desselben eingeschnittenes Löchelchen während des Versuches in dem Maasse Wasser nachfüllte, dass das Brettchen nicht in unmittelbare Berührung mit dem Glasrande kam, sondern stets durch eine unendlich kleine Netzschicht über demselben getragen wurde, und daher die Randfläche ebenfalls als Wasser-Berührungsfläche in Rechnung gestellt werden konnte. Es ergab sich für μ der Werth 0,536.

Ein vierter Versuch, wobei das Brettchen an der Wasserseite mit Seidenpapier überzogen war, und der im Uebrigen wie Versuch 2 angestellt wurde, ergab wiederum $\mu = 0,507$.

Bei etwa 5maliger, jedoch weniger sorgfältiger Wiederholung vorstehender Versuche blieb μ in den Grenzen von 0,507 und 0,536 eingeschlossen.

Da nun wohl bei Versuch 2 und 4 die Reibung bei gefülltem Glase immerhin etwas kleiner, wie bei leerem und bei Versuch 3 dieselbe nicht ganz vollkommen aufgehoben gewesen sein mag, ist μ mit vorläufig für den Zweck hinreichender Sicherheit auf 0,52 pr. Pfund für den □Fuss angenommen. Verfasser ist auch später nicht auf eine Wiederholung der Versuche zurück gekommen, weil er durch den nachfolgend beschriebenen Controll-Versuch hinreichende Ueberzeugung für die Richtigkeit des erlangten Resultates gewann.

Eine 3 Fuss lange Rinne aus starkem Zinkblech, 2 Zoll 8 Lin. im Lichten breit mit 2 Lin. hohem Rande, wurde mittelst einer Oese an dem Haken einer genauen Federwage vertikal aufgehangen. Durch einen freien Ueberfall aus einem Gefässe mit Wasser wurde darauf das obere Ende der hängenden Rinne mittelst eines dem Querschnitt der letzteren entsprechenden Wasserstrahles aus verschiedenen Fallhöhen möglichst tangential getroffen, so dass der die Rinne berührende Wasserstrahl in letzterer haftend weiter zur Erde niederfloss. Bei den ersten drei Versuchen gelang es ziemlich vollkommen den Ueberfall des frei fallenden Strahles auf die Rinne in tangentialer Richtung, also ohne Stoss, zu ermitteln. Bei dem vierten weniger.

Die benetzte Fläche der Rinne betrug 0,75 □Fuss, der Zeiger der Wage ergab einen dauernden Ausschlag:

- 1) bei $\frac{1}{4}$ Zoll Fallhöhe, also etwa 1 Fuss Anfangs-Geschwindigkeit, von 0,39 Pfund.
- 2) bei 3 Zoll Fallhöhe, also etwa 4 Fuss Anfangs-Geschwindigkeit, von 0,39 Pfund.
- 3) bei 12 Zoll Fallhöhe, also etwa 8 Fuss Anfangs-Geschwindigkeit, von 0,39 Pfund.

4) bei 48 Fuss Fallhöhe, also etwa 15 Fuss Anfangs-Geschwindigkeit, von 0,58 Pfund.

Also μ bei den ersten drei Versuchen, unabhängig von der Geschwindigkeit, auf 0,52 Pfund für den □Fuss, während der um etwa die Hälfte grössere Werth des vierten Versuches wohl ohne Bedenken der Stoss-Wirkung des auffallenden Strahles auf die Unebenheiten der Zinkfläche zugeschrieben werden kann. Wir hatten es hier mit dem der Abscheerung identischen Widerstande zu thun, den fließendes Wasser auf einer als eben zu denkenden Flusssohle zu überwinden hat, und dürften durch diesen einfachen, wenn auch keineswegs auf grosse Genauigkeit Anspruch machenden Versuch überzeugt werden, dass mindestens letzterer Widerstand, weder mit der ersten, noch mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit, sondern dass dessen mechanische Arbeit allerdings mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit zunehmen muss.

Es hätten nun noch vielfältige Versuche angestellt werden können, um auch dasselbe Abhängigkeits-Verhältniss der Grösse μ von der Temperatur zu bestätigen und es wird nicht schwierig sein, hierin eine Ergänzung vorzunehmen, falls Zweifel in dieser Hinsicht auftauchen sollten. Grössere technische Schwierigkeiten stellen sich der genauen direkten Messung des Verschiebungs-Winkels φ entgegen, obschon dieselbe mit Hülfe geeigneterer Vorkehrungen und genauerer Mess-Instrumente, als sie dem Verfasser zu Gebote standen, keineswegs als unausführbar bezeichnet werden kann.

An dem in dem Vorhergehenden Figur 18 dargestellten Wassertropfen, wenn dessen Grösse durch Nachdrücken oder Nachsaugen mittelst einer kleinen Spritze so bemessen war, dass derselbe bei lothrechter Stellung einer mit Lackfirniss überzogenen Metallplatte an derselben hängend, eben in Begriff kam, sich abwärts in Bewegung zu setzen, ohne eine Spur zu hinterlassen, kann man durch Visiren gegen einen rechtwinkligen und ebenfalls lothrecht gestellten Rahmen, über welchen diagonaliter in verstellbarer Richtung ein Faden gespannt ist, den Winkel φ zwischen den Grenzen von $39,5^\circ$ bis 40° messen.

Eine genauere Messung erachten wir einstweilen desshalb zu dem vorliegenden Zweck für überflüssig, weil sich später ergeben wird, dass seine Grösse sich durch Rechnung genau finden lässt, wenn μ , das spec. Gewicht und die Aufsteige-Höhe des Wassers an einer aus demselben gezogenen und von ihm benetzten Platte bekannt sind. Es liegt darüber bereits eine zu grosse Zahl genauer und zuverlässiger Versuchs-Resultate vor, die auch mit den unsrigen bis auf 0,01 mm. übereinstimmen, und von denen wir vor allem die Hagen'schen zu benutzen beabsichtigen, als dass wir es nöthig hätten eine Ergänzung dazu zu liefern.

Zweiter Abschnitt.

Tropfenbildung, Synaphie und Kapillarität.

Eine grosse Zahl mannigfaltig und harmonisch geschwungener Umrisslinien bietet uns die Beobachtung von Wassertropfen verschiedenster Grösse und in den verschiedensten Gleichgewichtslagen. Wäre der seinen Schülern unvergessliche Meister der antiken Formenkunst W. Stier nicht ein so entschiedener Feind aller Kleinigkeitskrämerei gewesen, er würde vielleicht schon in dem Wassertropfen die schönen Wellenlinien der Wogen des adriatischen Meeres und des weiblichen Körpers, deren Auffindung ihm nach seinen Erzählungen einst schlaflose Nächte machte, entdeckt haben.

Wir finden darin vertreten den Kreisbogen, die Ellipse und logarithmische Kurven der verschiedensten Art, mit der geraden Linie in den mannigfaltigsten Uebergängen und Zusammensetzungen. Nur die eigentliche Parabel vermissen wir.

§ 6.

Tropfenbildung ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Immerhin mag es wohl äusserst schwierig sein, sich mit den Vorstellungen von Dingen zu befassen, die gänzlich ausserhalb unseres Wahrnehmungskreises liegen. Das finden wir auch, wenn wir es versuchen, uns eine klare Vorstellung von der äussern Form einer Wassermasse zu machen, die sich lediglich nach ihren Molekülarkräften und unabhängig von jeder Einwirkung einer äussern Kraft, also insbesondere auch der Schwerkraft bildet. Schon direkte Beobachtungen unter der Wirkung der letztern allein anzustellen, ist uns geradezu unmöglich, weil nur der Zustand des freien Falles in luftleerem Raume uns Gelegenheit dazu bieten kann. Auch in dieser Richtung vermögen wir nur auf indirektem Wege durch Beobachtung der verschiedenen Formen, welche sich bei der Fabrikation von Bleischrot ergeben, Schlüsse zu ziehen, wenn wir uns die Einwirkung des dem freien Falle entgegenwirkenden Luftwiderstandes wegdenken. Im Zustande des statischen Gleichgewichtes, der uns allein die zu genauen Beobachtungen und Messungen unentbehrliche Zeit giebt, haben wir es immer noch mit der Einwirkung von mindestens zwei äussern Kräften zu thun, der Schwerkraft und einer dieselbe aufhebenden, entgegengesetzten Kraft.

Wenn wir aber einmal Interesse daran gewinnen wollen, uns eine Vorstellung von der wahrscheinlichsten Gestalt eines Wassertropfens, der keiner Einwirkung äusserer Kräfte unterworfen ist, zu machen, so

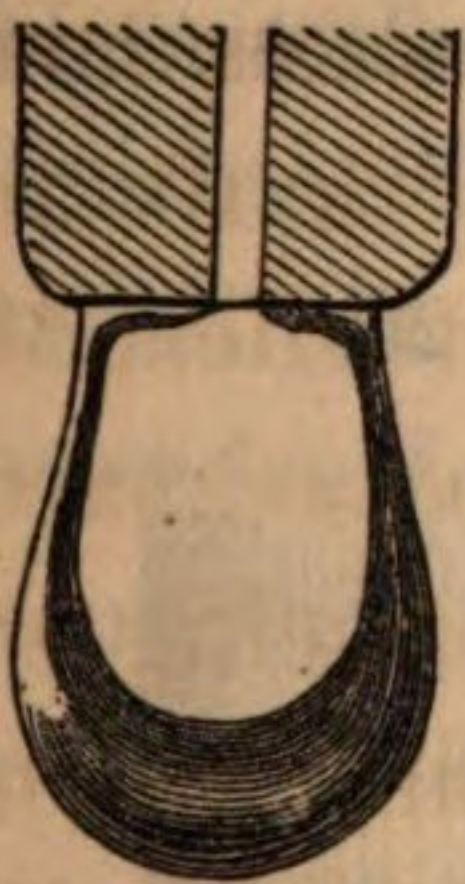
finden wir keine Herleitung einer solchen, der wir vollständiger zustimmen können, als in dem Kapitel der Physik von Müller-Pouillet, welches die Molekular-Wirkungen zwischen festen und flüssigen Körpern behandelt. Wir können daher wohl im Allgemeinen hier darauf verweisen. Es wird hier durch die Vorstellung und Unterscheidung einer normalen Molekül-Lagerung gleich der in Pyramiden aufgeschichteter Kugeln von einer anomalen, welche nothwendig bei gekrümmter Umgrenzungsfläche von denjenigen äussern Molekülen gebildet werden muss, die sich dieser normalen Lagerung nicht gesetzmässig anfügen lassen, der Beweis geführt, dass ein sich frei, ohne Einwirkung äusserer Kräfte bildender Wassertropfen Kugelgestalt haben müsse. Sobald nämlich diese anomal angefügten Moleküle unter einander in paralleler Richtung mit der Umgrenzungsfläche in zusammenhängende Berührung treten oder vielmehr in diejenige unendlich kleine Entfernung von einander gerathen, in welcher die Attraktion überwiegend wird, muss eine gewisse Spannung in ihnen wirksam werden, mit welcher sie die eingeschlossene normale Molekül-Lagerung wie eine elastische Haut umschliessen, und da diese wegen ihrer leichten Verschiebbarkeit innerhalb gewisser Grenzen keinen Widerstand entgegensetzt, muss die geringste derartige Spannung hinreichen, nun diejenige Körperform zu bilden, welche bei gleichem Inhalt den kleinsten Umfang hat, also die Kugelform.

Zwar hat nun auch dieser, wie mancher derartige Beweis, eine sehr schwache Seite. Er fängt nämlich eigentlich damit an, dasjenige, was er beweisen will, schon vorauszusetzen, nämlich die Krümmung der einschliessenden Flächen, während sich gar kein Grund auffinden lässt, daran zu zweifeln, dass sich auch jede normale Molekül-Lagerung in Gestalt einer gleichseitigen dreieckigen, vollen oder abgestumpften Pyramide, wenn man sich in jedem einzelnen Molekül die Schwerkraft aufgehoben denkt, im Gleichgewicht befinden kann, da nämlich jedem Molekül hier gestattet ist, in derjenigen Entfernung von den benachbarten zu verweilen, in welcher Repulsion und Attraktion sich gegenseitig aufheben. Es lassen sich auch noch Tausende von Molekülen einer solchen Form angefügt denken, ohne dass sie unter einander in der Axenrichtung parallel mit den Umgrenzungsflächen in Berührung treten und diejenige Spannung zu äussern vermögen, welche auf Bildung der Kugelform hinwirken muss. Wir finden beispielsweise bei Schneeflocken und Hagelkörnern, von denen man wohl voraussetzen kann, dass die Erstarrung ziemlich gleichzeitig mit der Zusammenfügung der Moleküle erfolgt ist, am allerwenigsten die Kugelform, sondern bei Hagelkörnern fast ausschliesslich die dreiseitige Pyramidenform ausgebildet, wenn dieselbe auch wohl durch die beim Gefrieren eintretende Molekular-Ver-

schiebung befördert werden mag. Indessen vermögen wir uns ja kaum eine Vorstellung davon zu machen, dass sich ein Wassertropfen ganz ohne die Mitwirkung äusserer Kräfte zusammenfügen und formen könne, und es widerspricht unserer Anschauung durchaus nicht, dass schon die allergeringste zufällige Einwirkung einer äusseren Kraft hinreichen muss, um die erwähnte Umgrenzungshülle zum Schluss zu bringen und damit die Bildung der Kugelform anzubahnen. Wir wollten aber mit der unbedingten Annahme jener Beweisführung nicht mit unserer früheren Behauptung in Widerspruch treten, dass eigentliche Anspannungen ohne die Einwirkung äusserer Kräfte in tropfbaren Flüssigkeiten nicht stattfinden können.

Von der Bildung und Dicke eines solchen Wasserhäutchens, wie es die Tropfen umschliesst, kann man sich eine ganz gute Anschauung verschaffen, wenn man eine kleine zinnerne Spritze, wie sie wohl zu chirurgischen Zwecken gebraucht wird, unterhalb des Kolbens durch Aufsaugen theils mit Luft, theils mit Wasser füllt. Bei einiger Geschicklichkeit und Vorsicht beim Ausdrücken erhalten wir dann recht schön ausgebildete Luftblasen von ellipsoidischer Form. In vertikal hängender Lage zieht sich dann, wenn die Grösse der Blase ihr Maximum erreicht hat und man sich hütet, durch Fortsetzung des Druckes dieselbe zum Platzen zu bringen, augenscheinlich an den innern Wandungen des einschliessenden Wasserhäutchens gleichmässig vertheilt, das nachfolgende Wasser herunter und sammelt sich auf dem Boden des Bläschens so lange, bis das Gewicht des darauf angesammelten Wassers die absolute Festigkeit der einschliessenden Hülle erreicht und abfallend dieselbe zerreisst. Vor dem Zerreißen kann man denn nebenstehende Form

Fig. 20. Figur 20 in vertikalem Durchschnitt beobachten.



Bei einem Durchmesser der Luftblase von 1,77 Lin., also 5,56 Lin. Umfang, findet man je nach der Schnelligkeit, mit der man das Wasser zum Ansammeln bringt, das Gewicht des abfallenden Wassertropfens auf 0,9 bis 0,2 Centigr. = 0,000018 resp. 0,000004 Pfund. Durch die Gleichung $5,56 \cdot d \cdot s = 0,000018$ resp. $0,000004$ berechnet sich d die Dicke des Wasserhäutchens, wenn man s die absolute Festigkeit pr. Quadratfuss auf = 0,73 Pfund und pr. Quadratlin. = 0,0000355 Pfund setzt, auf 0,093 bis 0,021 Lin.

§ 7.

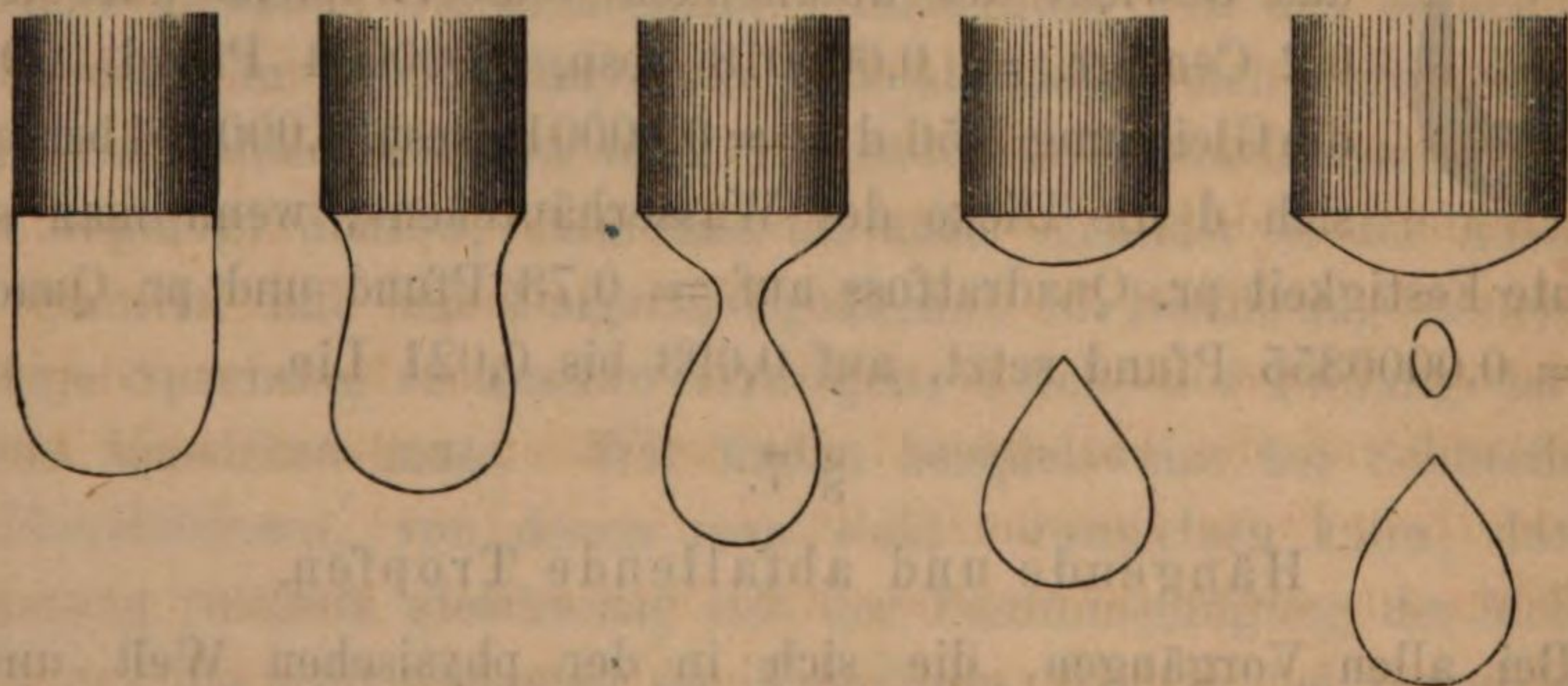
Hängende und abfallende Tropfen.

Bei allen Vorgängen, die sich in der physischen Welt unserer Wahrnehmung nicht entziehen, haben wir es ausschliesslich mit einer Bildung und Absonderung von Wassertropfen im Zusammenhange ent-

weder mit grösseren Wassermassen oder festen Körpern unter Einwirkung der Schwerkraft zu thun. In Folge dessen muss hier überall die zur Bildung der Kugelform nothwendige Spannung in den einschliessenden Molekül-Schichten entstehen. Wir würden uns daher ohne allen vernünftigen Grund die Aufgabe, aus unsern 3 Constanten das Gesetz, nach welchem sich Wassertropfen unter den verschiedensten Verhältnissen formen müssen, herzuleiten erschweren, wollten wir die Nothwendigkeit dieser Formbildung, soweit nicht äussere Kräfte ihr entgegenwirken, ignoriren. Zudem stimmt die Voraussetzung derselben so augenscheinlich mit allen Beobachtungen, welche wir in dieser Hinsicht anstellen vermögen, überein, dass uns kein Zweifel dagegen aufkommen kann. Ihre Zahl und Mannigfaltigkeit ist jedoch eine so grosse, dass ein Mathematiker, der sich die Aufgabe stellt, rationale und exacte Bedingungs-Gleichungen für alle erdenkbaren Tropfenformen aufzufinden und zu lösen, Jahre lang damit beschäftigt sein kann. Wir können uns daher hier nur darauf beschränken, diejenigen Beziehungen einer nähern Untersuchung zu unterwerfen, bei denen wir am leichtesten und sichersten unsere 3 Constanten durch genaue Beobachtung und Messung wieder zu finden vermögen.

Lassen wir einzelne Wassertropfen von einer benetzten Fläche, von einem cylindrischen Stabe oder durch Ausdrücken von einem Schwamm sich ablösen und frei zur Erde niederfallen, so erkennen wir bei einiger Uebung und scharfem Hinsehen mit blossen Auge ganz deutlich, dass die Ablösung niemals in einer Fläche, sondern vermittelt einer Art Nabelschnur erfolgt, die sich vermöge der Biegungs-Fähigkeit des Wassers durch allmähliche Verdünnung bildet und durch welche der bereits vollkommen ausgebildete Wassertropfen bis zum letzten Augenblicke in Verbindung mit der übrigen Masse bleibt, von der er sich abzusondern im Begriff steht.

Fig. 21. 22. 23. 24. 25.



Figur 21 stellt beispielsweise einen an einem runden Stabe von 3,85 mm. hängenden Tropfen dar, dessen grösster Durchmesser hier

gleich dem Stab-Durchmesser wird, so lange das Gewicht des Tropfens noch nicht der Grenze der absoluten Festigkeit nahe kommt; bei Figur 22 deutet die Einbiegung unterhalb des Stabes schon die Nähe dieser Grenze an; Figur 23 stellt den Augenblick vor dem Abfallen des Tropfens, Figur 24 die Form des abgelösten Tropfens und der am Stabe hängen bleibenden Wassermasse, nachdem sich die Trennungsnarbe bei beiden wieder geschlossen hat, dar, und Figur 25 zeigt, wie bei grösseren Tropfen sich ganz regelmässig noch ein Stück der gebildeten Nabelschnur zu einem zweiten, selbständigen, ganz kleinen Tropfen ausbildet, an dem man deutlich zwei Abtrennungs-Narben gegen den Stab und gegen den grossen Tropfen hin erkennen kann. Betrachtet man diese Tropfen in 5 bis 10facher Vergrösserung durch eine Lupe, so bleibt kein Zweifel darüber, dass der untere Theil genau die Form eines Kugel-Abschnittes hat, dessen Höhe bei den grössten Tropfen mindestens $\frac{1}{3}$ des Kugelradius beträgt und bei den kleinsten Tropfen bis zur Halbkugel und darüber wächst.

Einer bequemerer Untersuchung kann man dem Vorstehenden ganz analoge Tropfenbildungen unterziehen, wenn man geschmolzenes Blei durch ein Sieb von Eisenblech aus gewisser Entfernung in kaltes Wasser fallen und darin erstarren lässt, nur dass man hier je nach dem Flüssigkeits- resp. Cohäsions-Grade des Bleies ausser den vorhin gezeichneten auch bei weitem länger gezogene, rübenähnliche Formen erhält. Genau findet sich aber auch hier die Kugel-Abschnittsform am unteren Ende.

Es kann nun wohl keinem Zweifel unterliegen, dass alle diese Gestaltungen beim Weiter-Fallen im luftleeren Raume vermöge der durch den Vorgang der Lostrennung erhaltenen Spannung in der Oberfläche sich zu vollständigen Kugeln ausbilden müssen, wenn die Fallzeit dazu ausreicht. Dass diese Ausbildung nahezu auch schon beim Fall im luftgefüllten Raum erreicht wird, dann aber in Folge des stärker pressenden Luft-Widerstandes in die entgegengesetzte platt ellipsoidische, linsenartige Form übergeht, darüber giebt uns der Vorgang des Bleischrot-Giessens sichere Auskunft. Die Kunst dieser Fabrikation wird ohne Zweifel mit darauf beruhen, die Temperatur und durch geeignete Zuschläge die sensible Wärme und Wärmeleitungs-Fähigkeit des geschmolzenen Bleies derart zu reguliren, dass das Erstarren der Bleitropfen während des Fallens mit der möglichst vollkommenen Ausbildung der Kugelform zusammenfällt.

Schon aus dieser Betrachtung wird ohne weitere Ausführung ersichtlich, dass uns aus dem Gewicht der von verschiedenen Stabdicken abfallenden Tropfen gar kein zutreffender Schluss auf die absolute Festigkeit der Flüssigkeiten gestattet ist, indem die Ausbildung aller dieser Tropfen-

formen gleichzeitig eine Funktion der absoluten Festigkeit und des Biegungswiderstandes ist. Wir müssten denn erst bei derartigen Versuchen die Einwirkung des letztern eliminiren, wie wir dies bei den Versuchen zur Ermittlung der Abscheerungsfestigkeit gethan haben.

Es lassen sich kaum leichter und einfacher anzustellende Versuche auffinden, als diejenigen mit dem Abtropfen von cylindrischen Stäben der verschiedensten Dicke, welche geeigneter sind, uns die Gesetze, nach welchen die Bewegung der tropfbaren Flüssigkeiten sich regelt, zur lebendigen Anschauung zu bringen. Wir haben solche Versuche in ziemlich erschöpfender Zahl und Auswahl angestellt, dabei aber auch die Erfahrung gemacht, dass nicht nur Uebung, sondern auch eine ausserordentlich scharfe Anspannung aller Sinne in Anspruch genommen wird, wenn man dadurch zu einem zuverlässigen Resultate gelangen will. Unsere Messinstrumente schlossen die Voraussetzung zufälliger Fehler aus; denn wir bedienten uns einer chemischen Wage dazu, die auf einen Ausschlag von 1 Milligr. geprüft war, und da jedesmal 12 Tropfen gleicher Grösse zusammen gewogen wurden, konnte eine weit grössere Genauigkeit erzielt werden, als es deren zum vorliegenden Zwecke bedurfte. Zum Messen der Stabdicken bedienten wir uns ferner eines Schraubenmasses, wie es in neuerer Zeit zur genauen Bestimmung der Dicken feiner Drähte in Anwendung ist. Es hat die Form einer kleinen Schraubenzwinge. Jeder Schraubengang hat die Höhe eines Millimeters. Der Umdrehungskreis ist durch 25 ganze Theilstriche getheilt, von denen man mit unbewaffnetem Auge wiederum $\frac{1}{4}$ sicher schätzen kann, so dass sich die Stabdicken durch Drehung in dem Zwischenraum nicht nur als genau centirt prüfen, sondern auch bis auf $\frac{1}{100}$ Millim. direkt ablesen lassen. Wir gebrauchten bei unsern Versuchen sowohl Holz- als Metallstäbe, sowie auch grössere Flächen von Kork, Metall, Thon und Schiefer, ohne dabei auch nur den geringsten Einfluss der Verschiedenheit des Stoffes wahrnehmen zu können, sobald überhaupt eine Benetzung der Fläche eingetreten war. Das Abtropfen wurde theils durch eine dünne Netzschicht längs der Oberfläche des Stabes, dessen oberes Ende von einem mit Wasser getränkten Schwamme benetzt blieb, theils dadurch bewirkt, dass die Stäbe oder die sonstigen bei den Versuchen benutzten Körperflächen durchbohrt und das Wasser mittelst sanften Druckes aus einer kleinen Spritze dem Innern des sich bildenden Tropfens so lange zugeführt wurde, bis derselbe abfiel. Wir haben erst eine grosse Zahl vergeblicher Versuche anstellen müssen, um genau alle Umstände zu erforschen, welche einen störenden Einfluss auf die genaue Uebereinstimmung des Gewichtes aller von einem und demselben Stabe abfallenden Tropfen ausüben mussten. Es ergab sich dabei schliesslich, dass mit grosser Sorgfalt nicht nur die genaue lothrechte

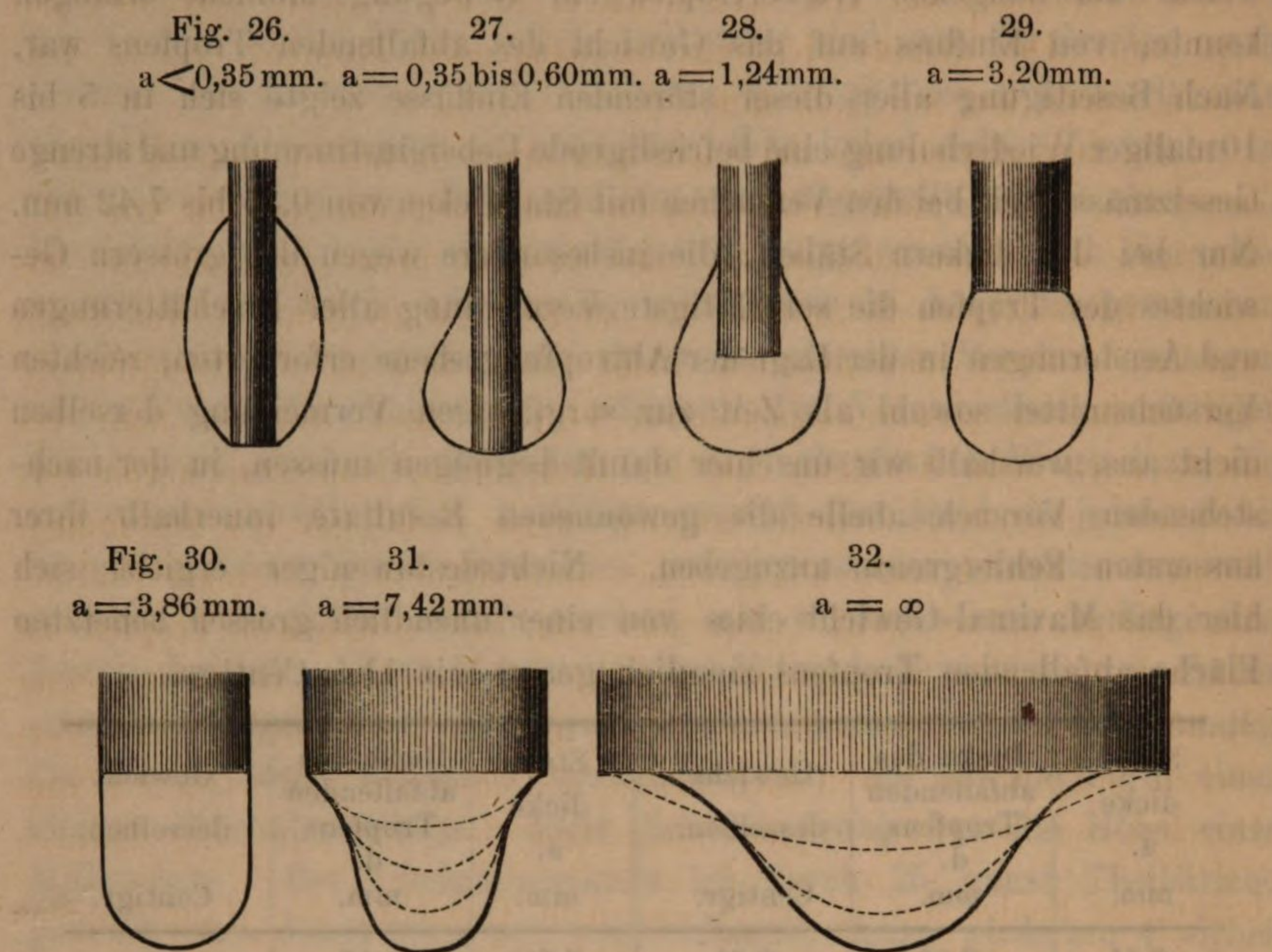
Stellung des Stabes, sondern auch die wagerechte Lage der Abtropfungs-Fläche, ferner die Dicke der Netzschrift am äussern Umfange des Stabes oder der Zuführungs-Oeffnung, die Schnelligkeit und vollkommene Gleichmässigkeit der Wasserzuführung beobachtet und regulirt werden musste, auch, dass jede geringe Erschütterung oder Schwankung, durch welche der hängende Wassertropfen ein Bewegungs-Moment erlangen konnte, von Einfluss auf das Gewicht des abfallenden Tropfens war. Nach Beseitigung aller dieser störenden Einflüsse zeigte sich in 5 bis 10 maliger Wiederholung eine befriedigende Uebereinstimmung und strenge Gesetzmässigkeit bei den Versuchen mit Stabdicken von 0,35 bis 7,42 mm. Nur bei den dickern Stäben, die insbesondere wegen des grössern Gewichtes der Tropfen die sorgfältigste Vermeidung aller Erschütterungen und Aenderungen in der Lage der Abtropfungsebene erforderten, reichten Versuchsmittel sowohl als Zeit zur sorgfältigen Vermeidung derselben nicht aus, wesshalb wir uns hier damit begnügen müssen, in der nachstehenden Versuchstabelle die gewonnenen Resultate innerhalb ihrer äussersten Fehlergrenze anzugeben. Nichtsdestoweniger ergibt sich hier das Maximal-Gewicht eines von einer unendlich grossen benetzten Fläche abfallenden Tropfens ziemlich genau mit 11,5 Centigr.

Stab- dicke a. mm.	Dicke des abfallenden Tropfens d. mm.	Gewicht desselben. Centigr.	Stab- dicke a. mm.	Dicke des abfallenden Tropfens d. mm.	Gewicht desselben. Centigr.
0,35	2,20	0,71	5,55	4,17	4,8
0,60	2,62	1,2	5,70	4,20	4,9
1,24	3,00	1,8	5,85	4,25	5,1
1,80	3,16	2,1	6,92	4,56	6,3
1,85	3,21	2,2	7,42	4,63	6,6
2,28	3,31	2,4	8,22	4,73—4,86	7,0—7,6
2,50	3,39	2,6	8,95	4,86—4,98	7,6—8,2
2,66	3,48	2,8	9,28	4,94—5,10	8—8,7
3,00	3,52	2,9	9,72	4,98—5,23	8,2—9,5
3,20	3,56	3,0	10,89	5,06—5,23	8,6—9,5
3,60	3,74	3,5	11,57	5,14—5,29	9,0—9,8
3,86	3,86	3,8	12,51	5,22—5,32	9,4—10,0
4,00	3,89	3,9	13,37	5,32	10
4,40	3,92	4,0	15,30	5,32—5,45	10—10,7
4,70	3,99	4,2	16,12	5,32—5,58	10—11,5
5,20	4,08	4,5	∞	5,32—5,58	10—11,5

Indem wir nun das Ergebniss unserer Versuche tabellarisch zusammengestellt haben folgen lassen, bleibt noch zu bemerken, dass dieselben sämmtlich mit frischem Quellwasser von 13° R. angestellt sind und dass die Tropfendicke nur bei einer einzigen Stabdicke, der von 3,86 mm. wirklich genau als der letzteren gleich gemessen worden, während alle übrigen Angaben in dieser Columnne unter der Voraussetzung durch Rechnung ermittelt sind, dass alle abfallenden Tropfen ähn-

liche Gestalt haben, wozu wir uns nach den darüber angestellten Beobachtungen einigermaßen berechtigt halten, zumal es nicht in unserer Absicht liegt, hierauf weitere Schlussfolgerungen zu gründen.

Veranschaulichen wir uns nun noch die verschiedenen Tropfenbildungen durch nachfolgende Handzeichnung.



Die Tropfenformen sind hier nicht alle in gleichem Massstabe, aber der bessern Uebersichtlichkeit halber alle von gleicher Höhe gezeichnet, was mit der Wirklichkeit auch nahezu übereinstimmt und, wie sich später ergeben wird, auch nothwendig übereinstimmen muss. Sie sind ferner alle in dem Gleichgewichts-Zustande dargestellt, welcher der beginnenden Abtropfung, deren Annäherung sich durch Einbiegungen kenntlich macht, möglichst nahe vorhergeht. Ausserdem sind sämtliche Darstellungen auf Stabdicken bezogen, die sich auch in der Versuchstabelle vorfinden. Alle übrigen frei hängenden Tropfenbildungen sind Zwischenformen und Uebergangsstufen der oben dargestellten 7 Typen. In Figur 31 und 32 sind gleichzeitig durch Zwischenlinien die verschiedenen Stadien der Anschwellung dargestellt.

Zunächst stossen wir nun bei näherer Betrachtung dieser Typen auf zwei augenscheinlich ganz scharf gezogene Minimal- und Maximal-Grenzen, welche für alle diejenigen beziehungsweise freiwilligen Bildungen gelten, bei denen ausser dem Cohäsions-Widerstande nur die eigene Schwerkraft einwirkt. Bei allen Tropfen an Stäben von weniger

als 0,35 mm. finden wir die Form Figur 26, in der die Kugelgestalt nicht mehr zur unverkümmerten Ausbildung gelangt. Wir werden die Genauigkeit dieser Grenze noch später durch einen besondern Versuch der Prüfung unterziehen. Der kleinste Krümmungs-Halbmesser also, nach dem sich ein Wasserhäutchen zu spannen vermag, findet sich bei einem Tropfengewicht von 0,71 Centigr. in der Tabelle berechnet auf 1,10 mm. Die genaue Messung des hängenden Tropfens ergibt denselben jedoch auf nur 1,05 mm.

Als äusserste Grenze bei einem von einer unendlich grossen, mässig benetzten, Fläche abfallenden Tropfen finden wir ein Gewicht von 11,5 Centigr. Bei allen solchen, die dies Gewicht übersteigen und die aus einem übersättigten Schwamme bis zu 24 Centigr. Schwere untersucht worden, erkennt man deutlich nicht nur, dass sie ein Conglomerat von mehreren zusammengelaufenen Tropfen sind, sondern man bemerkt auch beim Abfallen, dass der Hauptmasse eine Gruppe von verschieden geformten, kleinen Tropfen, wenn nicht gar ein zusammenhängender Strahl nachfolgt, welcher die vollkommen normale Bildung des Haupttropfens stört. Bei den von uns gewogenen Tropfen ist das bereits früher angedeutete einzelne Aftertröpfchen zuerst bei einer Stabdicke von 7 mm. wahrgenommen und auch bei den weitem Versuchen mitgewogen, weil sich dessen Durchmesser auf etwa $\frac{1}{5}$ vom Durchmesser des Haupttropfens abschätzen liess und somit der dadurch begangene Fehler nur $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ von dem Gewichte des Haupttropfens

betragen konnte. Der Krümmungs-Halbmesser dieses Maximal-Tropfens ergibt sich, aus der Tabelle berechnet, auf 2,79 mm., während derselbe durch Messung auf 2,72 mm. gefunden wurde.

Es würde uns nun wohl zu weit führen und keinen praktischen Nutzen haben, wollten wir es unternehmen, aus unsern 3 Constanten analytische Ausdrücke für jede einzelne Tropfenbildung herzuleiten; wir werden uns vielmehr mit dem Beweise begnügen müssen, dass eine solche Herleitung keine erheblichen Schwierigkeiten hat und dazu genügt uns eine Anzahl von Beispielen. Um uns davon zu überzeugen, ob Figur 27 wirklich als Grenzform mit 1,05 mm. den kleinsten Krümmungs-Halbmesser richtig ergibt, nahmen wir eine Nähnadel, nachdem wir uns mittelst einer Lupe überzeugt hatten, dass deren Spitze genau konisch angeschliffen war und tauchten dieselbe in das Wasser. Es gelang schliesslich erst, nachdem die Spitze mittelst Abschleifen auf 0,1 mm. abgestumpft war, nur ein einziges Tröpfchen von ganz constantem Gewichte in die Gleichgewichts-Lage nach Figur 27 zu bringen. Kleinere Tropfen blieben nach Figur 26 hängen, grössere hafteten nicht, sondern setzten sich schon oberhalb der Spitze in abfallende Bewegung. Bei diesem

Tropfen haben wir nun eine genaue Gewichts-Ermittelung und Messung der beiden Hauptaxen vorgenommen, während die Umrisslinie nach wiederholter Betrachtung durch eine Lupe aufgezeichnet wurde. Sein Gewicht ergab sich auch, mit No. 1 der Tabelle übereinstimmend, auf 0,71 Centigr., seine Form wie nachstehend.

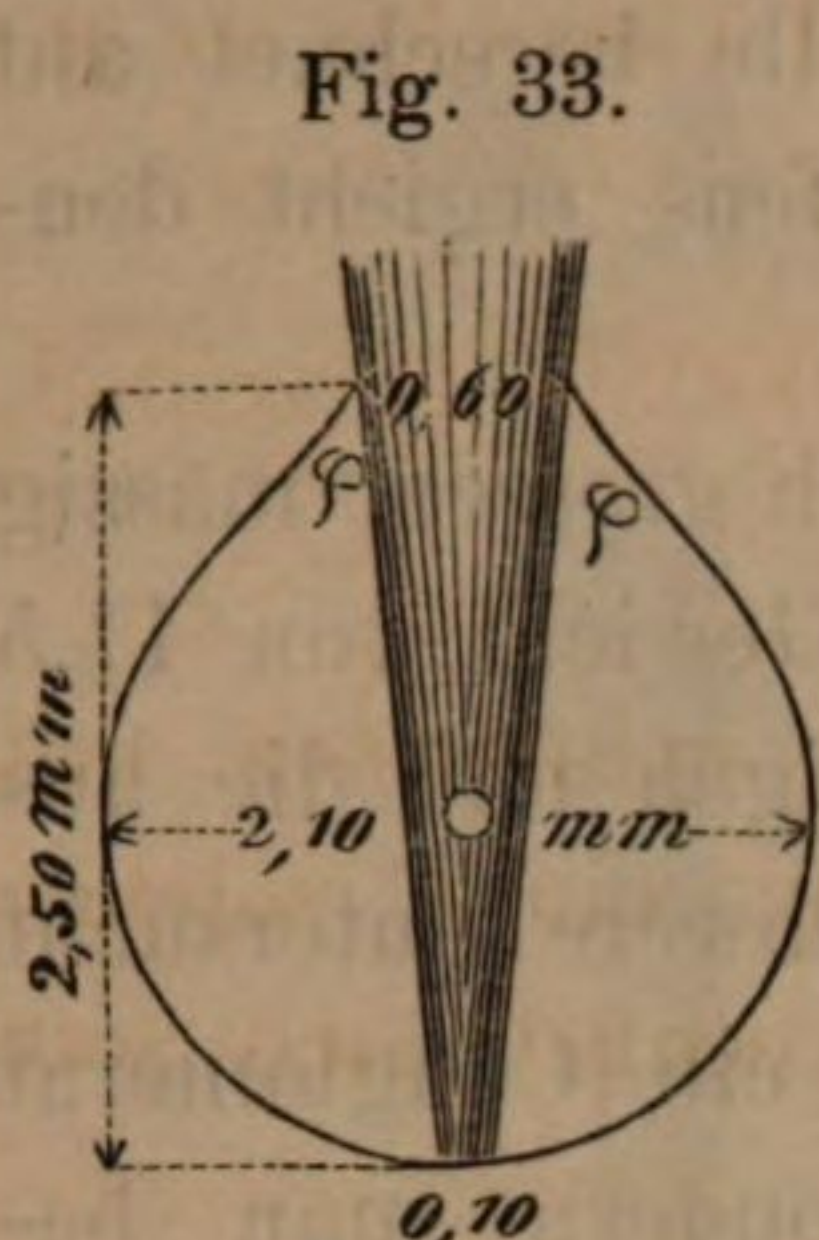


Fig. 33.

Im obern Anschluss an den Stab finden wir hier ziemlich genau den Winkel $\varphi = 39^\circ 48'$ wieder; der mittlere Stab-Durchmesser ergab sich in genauer Uebereinstimmung mit der Versuchstabelle auf $\frac{0,60 + 0,10}{2} = 0,35$ mm.

In dieser Gleichgewichts-Lage muss nun für jede Axenrichtung die Summe der äussern und innern Kräfte $= 0$ sein. In vertikaler Richtung ist die erstere $= G$, dem Gewicht des Tropfens, die letztere gleich dem Abscheerungs-Widerstande an dem benetzten Umfange der Nadel. Wir haben also die Gleichung

$$G = 0,35 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot \mu = 0,71.$$

Für die Temperatur von 13° R. haben wir μ auf 0,52 pro pr. □Fuss, also 0,0000251 pro □Lin. gefunden. Reduciren wir das französische Maass und Gewicht ebenfalls auf pr. Linien und Pfund, so erhalten wir

$$G = 0,0000142 \text{ gemessen und } 0,16 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1,15 \cdot 0,0000251 = 0,0000144 \text{ berechnet,}$$

also mit Rücksicht auf den Grad der Genauigkeit der Beobachtung eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung.

In den Uebergangs-Stufen zwischen Figur 27 und Figur 29 finden wir ferner, dass sich kein Tropfen so klein zu formen vermag, dass für den von uns untersuchten Gleichgewichts-Zustand sein Gewicht von der dem Stab-Querschnitte entsprechenden, absoluten Festigkeit allein getragen werden kann, wesshalb er sich ganz naturgemäss mit seiner obern Formation um die cylindrische Fläche des Stabes legt und hier seine Abscheerungs-Festigkeit zu Hülfe nimmt. Erst bei einer ganz bestimmten Stabdike von 3,20 mm. beobachten wir die Form Figur 29. Zugleich finden wir hier bei fortgesetzter Beobachtung, dass bei der dem Abtropfen vorhergehenden Einbiegung der Abtropfungs-Querschnitt nicht dünner als der Stab-Querschnitt wird. Da die Einbiegung dicht unter der Stabfläche erfolgt, kann der Abtropfungs-Querschnitt also auch nicht grösser, sondern muss dem des Stabes gleich sein. Wir haben also nur diesen einen einzigen, ganz bestimmten Fall, in dem wir durch das Gewicht des abfallenden Tropfens die absolute Festigkeit messen können.

Es muss folglich die Gleichung stattfinden:

$$G = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot s$$

Entnehmen wir aus der Tabelle G mit 3,0 Centigr., d mit 3,20 mm., setzen für s den Werth 0,73 Pfund pr. □Fuss oder 0,0000355 Pfund pr. □Lin. und reduciren wie früher auf pr. Maass und Gewicht, so ergibt sich:

$G = 0,0000600$ gemessen u. $\frac{1,47^2}{4} \cdot \frac{22}{7} \cdot 0,0000355 = 0,0000596$ berechnet, also eine noch genauere Uebereinstimmung.

In Figur 30 finden wir die Tropfenform genau cylindrisch mit Halbkugel-Abschluss. Setzen wir die Gesamthöhe eines solchen Tropfens $= h$ und seinen Durchmesser $= d$, so berechnet sich sein Inhalt J

$$\text{auf } J = \frac{1}{12}d^3\pi + \frac{d^2\pi}{4}\left(h - \frac{d}{2}\right) = \frac{d^2\pi}{24}(6h - d)$$

und sein Gewicht, wenn man J in Kubiklinien nimmt, auch das Gewicht einer Kubiklinie Wasser $= \gamma = 0,0000207$ Pfund bei 13° R. setzt

$$G = \frac{\gamma\pi d^2}{24}(6h - d),$$

woraus sich ergibt

$$h = \frac{4G}{\gamma\pi d^2} + \frac{d}{6}.$$

In unserm Gleichgewichts-Zustande muss aber

$$G = \frac{d^2\pi}{4} \cdot s \text{ sein.}$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung für h , so wird

$$\text{I) } h = \frac{s}{\gamma} + \frac{d}{6}.$$

Setzt man für $h = \frac{d}{2}$, so ergibt sich der grösstmögliche Durchmesser eines halbkugelförmig hängenden Tropfens auf

$$d = \frac{3s}{\gamma} = 5,14 \text{ Linien.}$$

Das Gewicht einer Kubiklinie Wasser bei 13° R. berechnet sich nämlich auf 0,0000207 Pfund, s auf 0,0000355, mithin $\frac{s}{\gamma}$ auf 1,715.

Setzen wir nun für d aus der Versuchstabelle den Werth $= 3,86$ mm. oder 1,77 Lin., so berechnet sich mit Zugrundelegung unserer Constante s

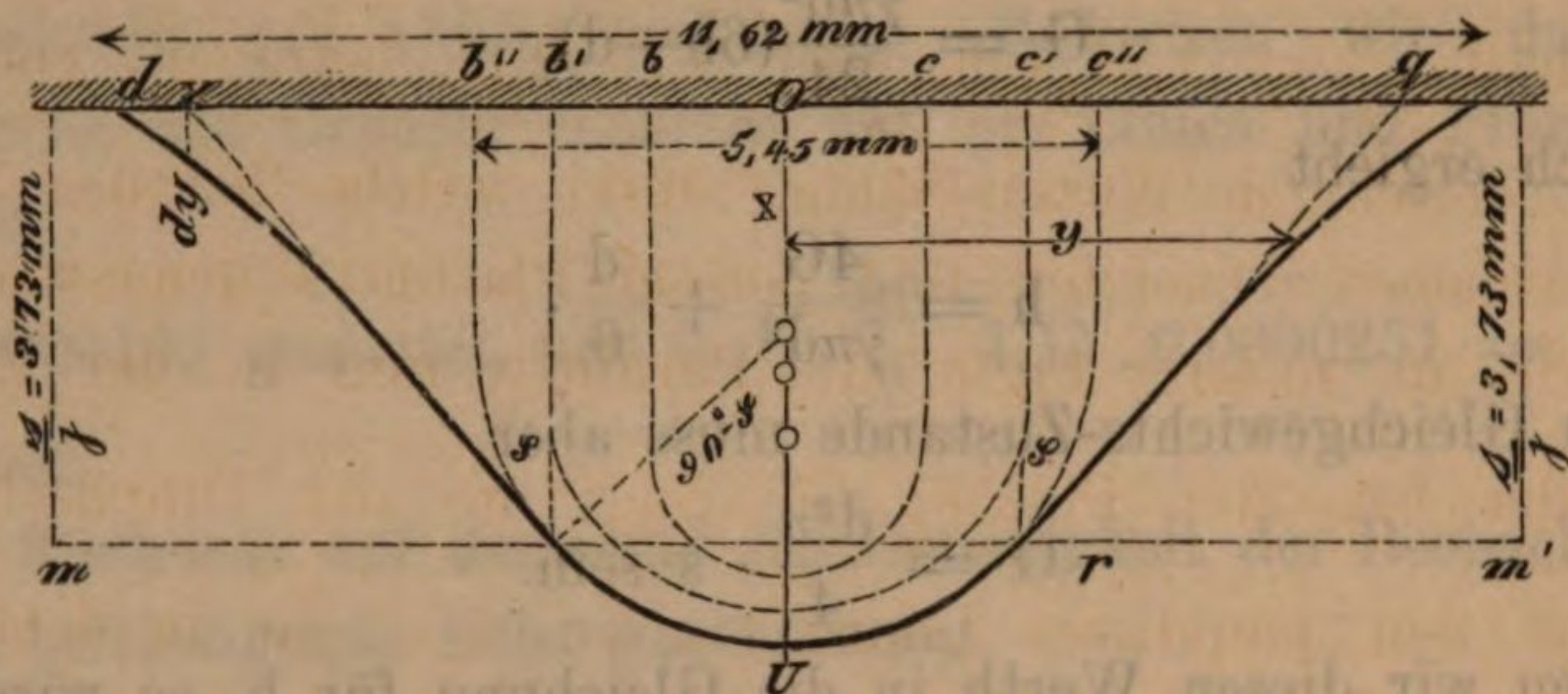
$$h \text{ auf } 1,715 + \frac{1,77}{6} = 2,01 \text{ Linien.}$$

Die Messung, welche man schon ziemlich annähernd durch vergleichende Beobachtung mit der Lupe gegen einen feinen Maassstab

bewerkstelligen kann, ergibt h vollkommen übereinstimmend auf 2,01 Linien.

Unterziehen wir noch die Tropfenform nach Figur 32, welche sich ganz frei und willkürlich an unbegrenzter Fläche bildet, einer eingehenden Untersuchung. Es wurde zu diesem Zwecke der an dem 16,12 mm. = 7,40 Linien dicken cylindrischen Stabe hängende Tropfen in dem Zustande möglichst nahe vor der auf Ueberschreitung der absoluten Festigkeit deutenden Einbiegung vielfältigen Beobachtungen und Messungen ausgesetzt. Nachdem es gelungen war, mit befriedigender Uebereinstimmung der wiederholten Messungen die Axenverhältnisse festzustellen, ist hier wiederum die Gestalt der Umrissform mittelst fortgesetzter Betrachtung durch eine Lupe zu einer ziemlich festen Vorstellung gebracht, solche in 12facher Vergrößerung aufgezeichnet und daran so lange corrigirt, bis die weitere Vergleichung keinen Zweifel an der Uebereinstimmung übrig liess. Hiernach ergibt sich in 12facher Vergrößerung die nachfolgende Durchschnitsform.

Fig. 34.
Stabdicke = 16,12 mm.



Der Tropfen bildet selbstverständlich einen Umdrehungskörper dieses Durchschnittes um die Axe OU.

Zunächst bemerken wir, dass er in diesem Grade der Anspannung nicht mehr die Fläche mit einem Kreise von 16,12 mm. Durchmesser, sondern nur von 11,62 oder 5,33 Lin. berührt, sich also in Folge seines zunehmenden Gewichtes an der Basis um 4,5 mm. zusammengezogen hat. Diese zusammenziehende Bewegung war aber nicht anders möglich, als wenn die absolute Festigkeit in dem Cylindermantel dy den Abscheerungs-Widerstand in der Ringfläche dx überwand. Im Augenblick der vollendeten Bewegung mussten also beide mit einander im Gleichgewichte sein. Es musste für OU als Axe der y und O als Anfangspunkt der x die Gleichung statt haben:

$$2x\pi dy s = 2x\pi dx \mu$$

woraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{s} = \tan \alpha$.

Für $\mu = 0,0000251$ und $s = 0,0000355$ pro □Lin. gesetzt, giebt
 $\tan \alpha = 0,707$ und $d = 35^{\circ}16'$

was denn auch mit der Beobachtung völlig übereinstimmt. Tragen wir uns nun nach der Formel I) $h = \frac{s}{\gamma} + \frac{d}{6} = 1,715 + \frac{d}{6}$ diejenigen mit Halbkugel endigenden Wasser-Cylinder ein, deren Gewichte sich mit ihrer absoluten Festigkeit an der Berührungs-Basis im Gleichgewichte befinden, so bezeichnen die in der Figur punktirten Linien bc , $b'c'$, $b''c''$ die Axendurchschnitte derselben. Die letzte dieser Linien $b''c''$ fällt mit dem untern Theile ihres Halbkreises genau in die Tropfenform. Sie entspricht einem Tropfendurchmesser von 5,45 mm. oder 2,50 Linien in genauer Uebereinstimmung mit der in der Versuchstabelle berechneten Dicke des abfallenden Tropfens von 10,7 Centigr. Gewicht. Man kann auch die Umrissform $b''Uc''$ für sich isolirt durch Anspritzen an eine Wachs- oder Lack-Fläche, die nicht benetzt wird, herstellen und beobachten.

Wenn das Wasser keine Biegsamkeit hätte, so müsste die Höhe einer vermöge ihrer eignen absoluten Festigkeit an einer unendlich grossen, horizontalen Fläche sich freitragenden Wasserschicht von gleichem Flächeninhalt $\frac{s}{\gamma} = 1,71$ Lin. oder 3,73 mm. betragen, entsprechend der Höhe derjenigen Wasser-Säule, durch welche bei den Versuchen mittelst Abheben benetzter und poröser Platten s gemessen worden. Ziehen wir in unserer Figur die Parallele mm' in der Entfernung $\frac{s}{\gamma}$ von der benetzten Fläche, so bringt uns der Durchschnitt derselben mit den punktirten Linien bc , $b'c'$, $b''c''$ die in dem mittlern Tropfen-Körper $b''Uc''$ stattfindenden vertikalen Spannungen zur lebendigen Anschauung. Bei allen Wasser-Cylindern von kleinerem Durchmesser als $b''c''$ übersteigt das eigne Gewicht die absolute Festigkeit an der Berührungsbasis. Da sie sich aber dennoch tragen, so müssen alle sie zunächst in dem äussern Mantel berührenden, vertikalen Wasser-Fäden von ihnen in vertikaler Richtung auf Abscheerung in Anspruch genommen und angespannt sein. In den vertikal hängenden Fäden b' und c' an dem Durchschnitte des Tropfenmantels mit der horizontalen Fläche mm' befindet sich das eigne Gewicht mit der absoluten Festigkeit für sich im Gleichgewicht, nur dass die Anspannung der letztern, wie an einer vertikal herabhängenden Kette von unten nach oben von 0 bis s wachsen muss. Da nun aber trotzdem, wie vorhin nachgewiesen, der Wasser-Faden b' resp. c' von dem ihn zunächst nach Innen berührenden Faden mit einer gewissen Kraft abwärts gezogen wird, so muss er, wenn Gleichgewicht stattfinden und er nicht abreissen soll, von dem ihn nach Aussen hin berührenden Faden

mit derselben Kraft aufwärts gezogen werden. Diese beiden, sich entgegengesetzten und auf Verschiebung des Wasser-Fadens b' resp. c' wirkenden Kräfte müssen ihr Maximum μ in dem Augenblicke erreichen, in dem der innere Tropfenkörper, der von c'' bis O wachsenden Anspannung der absoluten Festigkeit an der Berührungs-Basis gemäss, sich von O nach c resp. b hin abzulösen beginnt und schliesslich mit seiner ganzen Last in den Abscheerungs-Flächen (Cylindermantel $b'c'$ resp. $b''c''$) hängt. Da wir nun das Maximum des Verschiebungs-Winkels bis zu beginnender Abscheerung mit φ gefunden haben, muss in dem von uns vorausgesetzten Gleichgewichts-Zustande der Tangenten-Winkel $c'rq = \varphi = 39^{\circ}48'$ sein, was denn auch in merkwürdiger Weise genau mit unserer Figur übereinstimmt. Auch beobachten wir von r nach q unverkennbar ein Stück gerader oder mindestens der geraden unendlich nahekommender Linie, deren Länge in dem hier betrachteten Zustande, wie sich leicht übersehen lässt, ein Maximum geworden ist, sowohl bei geringerer als bei höherer Anspannung mit beginnender Einbiegung zwischen r und q sich verringert und zuletzt ganz verschwindet. Wir befinden uns noch in der Lage, durch eine Proberechnung zu constatiren, bis zu welchem Grade Induktion und Deduktion übereinstimmen. Unter der Annahme, dass die Tangente qr den Halbkreis unter $b''c''$ im Durchschnitt mit der Ebene mm' berührt, berechnet sich trigonometrisch die Höhe des Kugelabschnittes unter mm' für den Durchmesser $= 2,50''$ auf $0,45''$, also die Tropfenhöhe auf $1,71 + 0,45 = 2,16''$, während sich dieselbe nach Formel I auf $1,71 + \frac{2,50}{6} = 2,13''$ findet und auch in letzterer Grösse beobachtet worden. Diese Betrachtung wird hinreichen für den Nachweiss, wie wenig Schwierigkeiten die Herleitung aller derartigen Tropfenformationen und der analytischen Ausdrücke für die Umgrenzungs-Kurve vermöge unserer Constanten hat, wenn auch unter Umständen diese Ausdrücke bei öfterem Wechsel der Vorzeichen des Krümmungs-Halbmessers, durch welche die Zahl der einzuführenden Constanten vermehrt wird, etwas complicirt ausfallen werden. Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, haben wir noch auf die ungemeine Aehnlichkeit der Umrissform $b''Uq$ mit den bereits im 1. Abschnitte § 4 in Betracht gezogenen Formen an vertikaler Fläche herablaufender Tropfen, sowie darauf aufmerksam zu machen, dass man die halbe Kurve UOq auch beobachten kann, wenn UO den Durchschnitt einer unter einem rechten Winkel mit Oq zusammenstossender Körperfläche darstellt.

§ 8.

Aufruhende Tropfen.

Um das Verhältniss zwischen der Attraktion der Wasser- zu verschiedenen Körper-Molekülen zur Anschauung zu bringen, hefte man auf

die horizontale und ebene Körper-Fläche vorsichtig einen Tropfen und lasse ihn durch sein eigenes Gewicht sich darauf ausbreiten. Ein 3,8 Centigr. schwerer Tropfen erlangt schliesslich eine kreisförmige Berührungsbasis, auf frischer Holzfläche von ca. 7,6 mm. Durchmesser

„ Baumwachs	„	5,4	„	„
„ Glas	„	10,9	„	„
„ Papier	„	5,4	„	„
„ Messing	„	5,4	„	„
„ alter Mahagoni-Holzfläche	„	5,4	„	„

Betrachten wir nun den Gleichgewichts-Zustand eines solchen sich horizontal ausbreitenden Tropfens in seiner höchsten Anspannung auf einer jener Flächen, bei denen wir die Körper-Attraktion zum Wasser so ziemlich $= 0$ wahrnehmen können. Bei gleichmässiger Beschaffenheit der Fläche bedarf es keines nähern Nachweises, dass die Berührungsbasis unter allen Umständen und Grössenverhältnissen ein Kreis bleiben muss. Figur 35 stelle einen vertikalen Axenschnitt durch den Mittelpunkt des Berührungskreises dar.

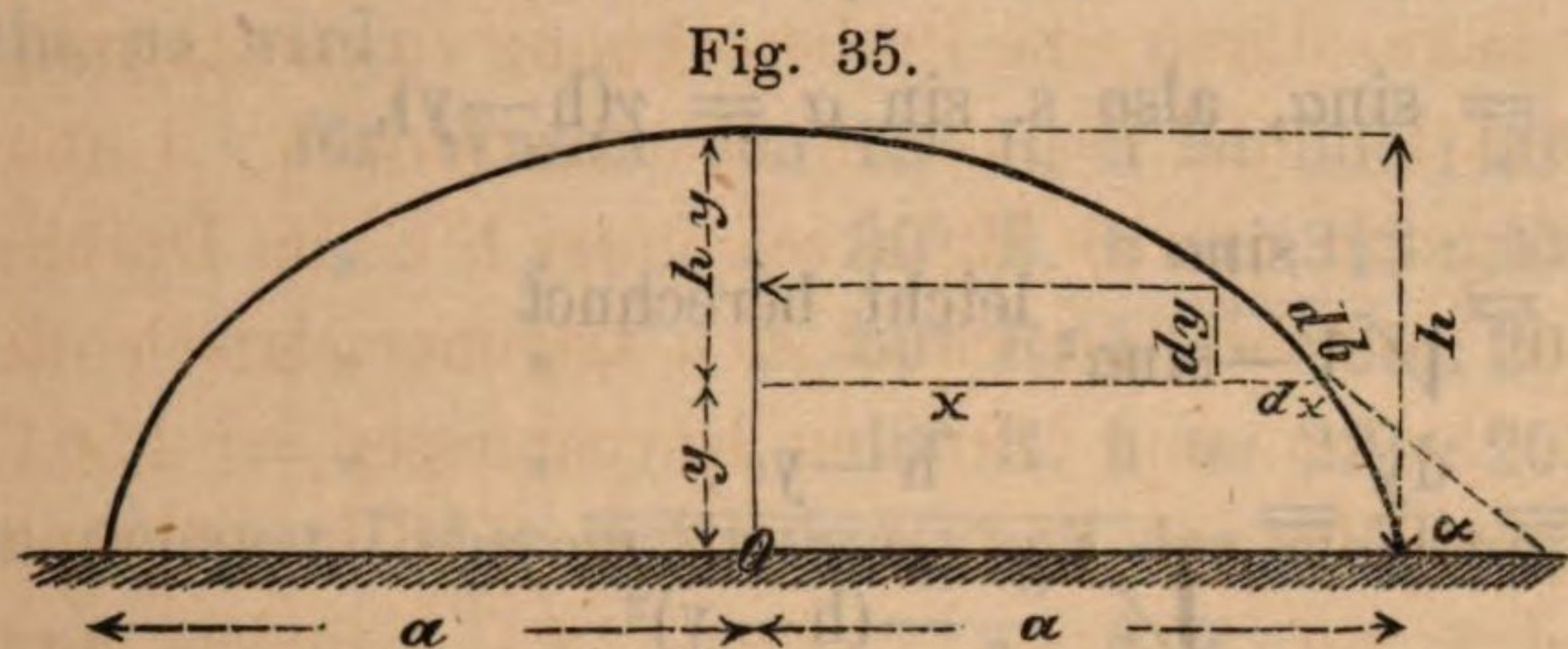


Fig. 35.

Bezeichnen wir die Höhe des Tropfens mit h , den Halbmesser der Berührungsbasis mit a , so muss in jeder unendlich kleinen, horizontalen Wasserschicht vom

Radius x und der Höhe dy der hydrostatische Druck $2\pi \cdot x \cdot \gamma(h-y)dy$ in centrifugaler Richtung auf Ausbreiten wirksam sein, dem Integrale aller dieser Drücke von $y = h$ bis $y = 0 = \pi\gamma x(h-y)^2$ also eine gleiche Kraft $\pi x^2 \mu^1$ in derselben Ebene in centrifugaler Richtung entgegenwirken. Wir haben also die Bedingungsgleichung

$$\gamma(h-y)^2 = \mu^1 \cdot x$$

Für $x = a$ muss $\mu' = \mu$ dem Abscheerungs-Widerstande und $y = 0$ werden. Dann erhalten wir:

$$\gamma h^2 = \mu a$$

$$a = \frac{\gamma h^2}{\mu} = 0,82h^2$$

für rh. Linien und pr. Pfund.

Für $a = h$ wird die Tropfenform halbkugelig, und zwar für eine ganz bestimmte Grösse des Tropfens entsprechend einer Halbkugel vom Radius $\frac{\mu}{\gamma} = 2,63 \text{ mm.}$ Auch dies Ergebniss stimmt genau mit der Beobachtung überein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man mittelst eines feinen Mikrometer-Zirkels auf lakirter oder geschlif-

fener Metall-Fläche einen Kreis mit dem Radius $= 2,63$ mm. einritz und mit der erwähnten kleinen Spritze einen Tropfen anschwellen lässt, bis er den gezogenen Kreis genau berührt. Denken wir uns ferner in dem unendlich kleinen Flächenelemente, welches Figur 35 von den 3 Linien-Differenzialen dx , dy und db eingeschlossen wird, alle wirksamen Spannungen in die Richtungen der drei letztern durch Seitenkräfte zerlegt, so muss, wenn s die Bogen-Spannung, μ' die Horizontal-Spannung und μ'' die Vertikal-Spannung bezeichnet, nach statischen Gesetzen die Proportion stattfinden:

$$s : \mu' : \mu'' = db : dx : dy$$

sofern Gleichgewicht vorausgesetzt wird.

Die Bogen-Spannung s muss nach dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung in der ganzen Querschnitts-Kurve constant sein, während die Vertikal-Spannung μ'' in jedem Punkte einem Wassersäulengewichte $\gamma(h-y)$ das Gleichgewicht hält und durch letztern gemessen wird. Wir erhalten dann aus vorstehender Proportion

$$s dy = \mu'' db = \gamma (h-y) db$$

$$\text{aber } \frac{dy}{db} \text{ ist } = \sin \alpha, \text{ also } s \cdot \sin \alpha = \gamma(h-y),$$

woraus sich, da $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ leicht berechnet

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{h-y}{\sqrt{\frac{s^2}{\gamma^2} - (h-y)^2}}.$$

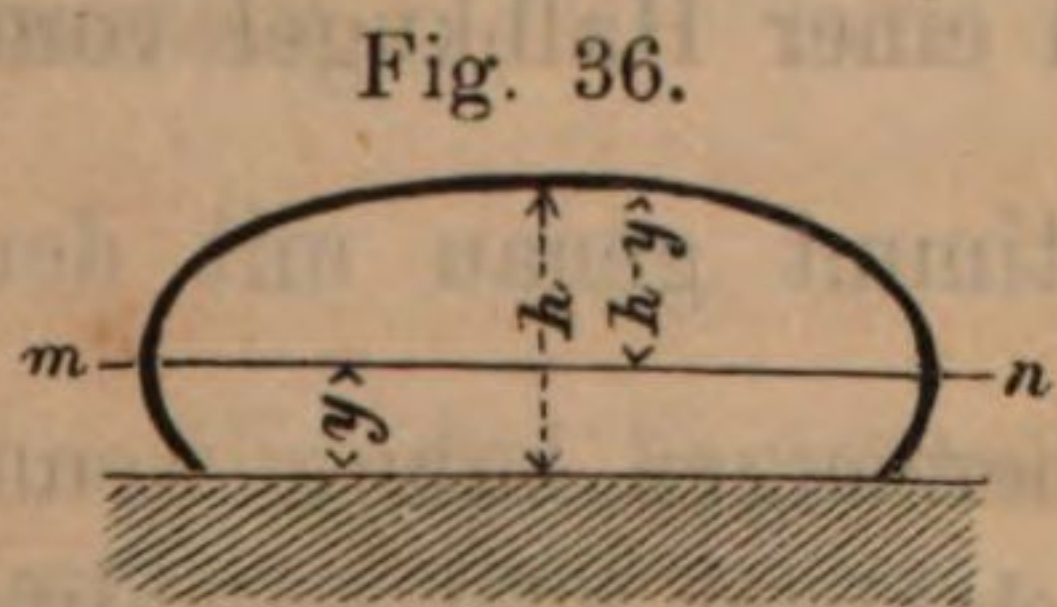
Durch diese Bedingungsgleichung ist die Gestalt der Kurve vollständig bestimmt.

Für den Werth von $y = h$ wird $\tan \alpha = 0$, also die Tangente im Scheitelpunkt parallel mit der Abscissen-Axe oder horizontalen Fläche.

$$\text{Für } y = 0 \text{ wird } \tan \alpha = \frac{h}{\sqrt{\frac{s^2}{\gamma^2} - h^2}}.$$

Es folgt hieraus, dass, wenn $h >$ als $\frac{s}{\gamma}$ der Werth der Tangente imaginär, also die Kurve unmöglich wird.

Für $h-y = \frac{s}{\gamma}$ wird $\tan \alpha = \infty$, also die Fläche rechtwinklig von der Kurve geschnitten. Damit muss gleichzeitig die Horizontal-



Spannung $= 0$ werden, was ganz richtig ist, weil sie in der Berührungsebene durch den Abscheerungs-Widerstand aufgehoben wird, und die Vertikal-Spannung wird $=$ der Bogen-Spannung. Hat dagegen die Kurve wie bei Quecksilber neben-

stehende Gestalt, so geht in mn die Horizontal-Spannung aus einer positiven in eine negativen über, muss also im Uebergangspunkte Null sein.

Im Scheitel dagegen wird die Vertikal-Spannung $= 0$ und die Horizontal-Spannung $=$ der Bogen-Spannung s .

Die Bedingung $h - y = \frac{s}{\gamma}$ für die höchst mögliche Anspannung des Tropfens ergibt den für die Experimental-Physik wichtigen Satz:

„Bei der höchsten Anstauung, welcher eine Flüssigkeit auf einer horizontalen Ebene, die nicht von ihr benetzt wird, fähig ist, ergibt der Abstand des grössten horizontalen Querschnittes von dem höchsten Punkte der Oberfläche den Quotienten aus dem Gewichte der Masseneinheit dividirt in die Cohäsion der Flächeneinheit derselben.“

Es giebt also ein einfaches und Jedermann zugängliches Mittel, um die absolute Festigkeit jeder Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht bekannt ist, frei von der Einwirkung der Luftspannung zu messen.

Setzen wir unsere Werthe für s und γ in pr. Pfund und pr. Lin. ein, so wird:

für Wasser von 13° R. $h = 355 : 207 = 1,71$ Lin.

„ „ „ 30° R. $h = 313 : 206 = 1,51$ „

„ „ „ 50° R. $h = 265 : 204 = 1,29$ „

„ „ „ 68° R. $h = 221 : 201 = 1,09$ „

in genauer Uebereinstimmung mit der leicht anzustellenden Beobachtung.

§ 9.

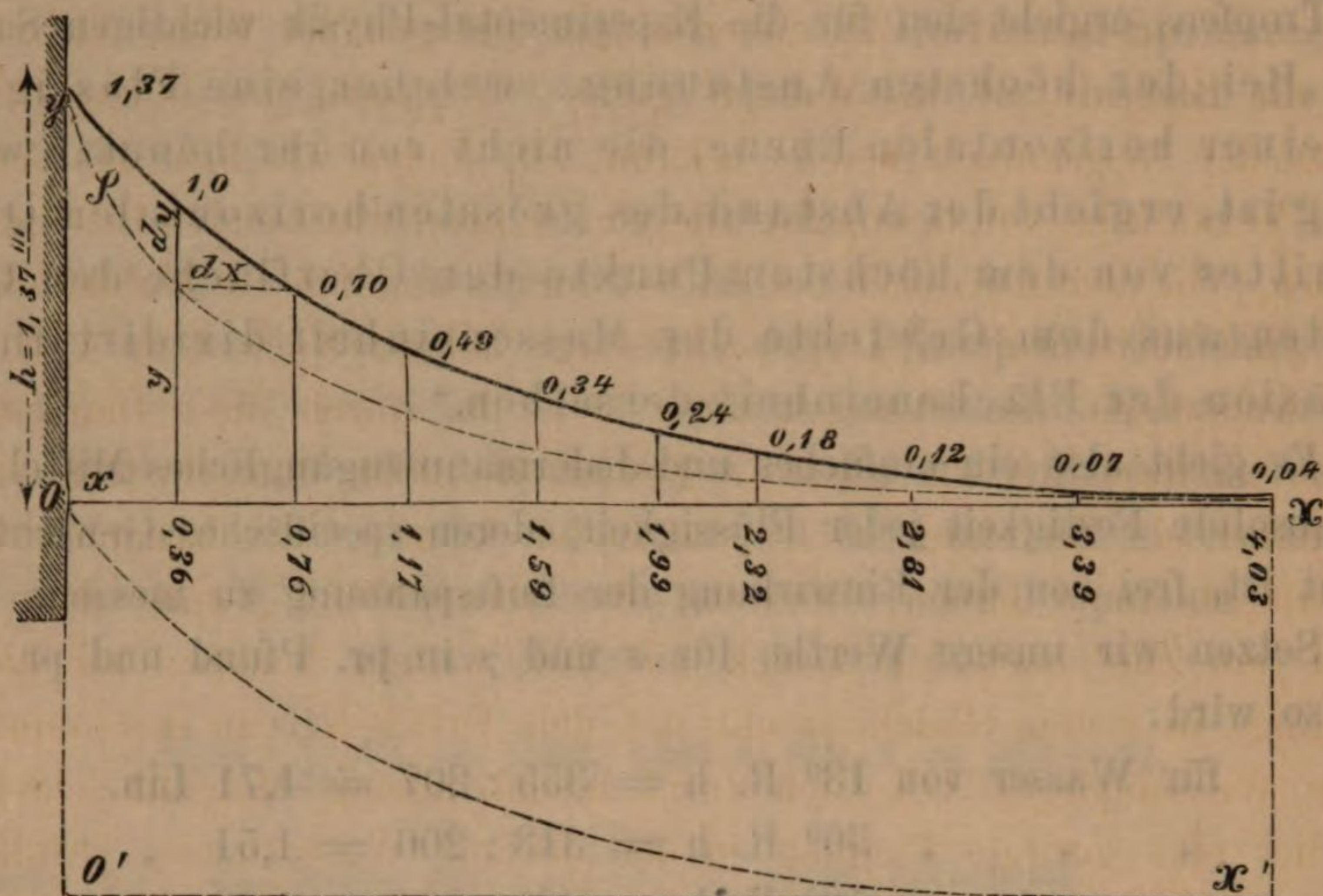
Die Adhäsions-Kurve.

An diese Betrachtung anknüpfend, wollen wir nun zu der nähern Untersuchung und Herleitung der von uns sogenannten Adhäsions-Kurve übergehen.

Es ist die merkwürdigste und für die Prüfung unserer 3 Constanten wichtigste Kurve, welche sich mit leichter Mühe erzeugen und beobachten lässt. Man tauche in einen bis zum Rande mit Wasser gefüllten Napf einen metallenen Massstab, ein Wachstäfelchen oder ein Stückchen recht rein abgeputztes Glas ein. Bei den ersteren beiden und ähnlichen Stoffen muss man, um die Kurve beobachten zu können, den eingetauchten Gegenstand erst ein klein wenig herausziehen, weil diese Flächen sich von selbst nicht benetzen; bei dem Glastäfelchen hat man dies nicht nöthig. Nur muss man Schwankungen und Erschütterungen sorgfältig vermeiden, indem dadurch unmittelbar über dem Anschluss der Kurve an den festen Körper kleine Spülungen und Netzsichten erzeugt werden, welche ablaufend mit der lediglich der eigenen Cohäsion des Wassers entsprechenden Kurve verschmelzen und die genaue Beobachtung derselben beeinträchtigen. Der Tangenten-Winkel erscheint

dann wohl zuweilen an der Berührungs-Fläche ein klein wenig spitzer, als er sich naturgemäss im Zustande der absoluten Ruhe den Cohäsions-Verhältnissen des Wassers entsprechend ausbilden muss. Wir beobachten dann mit Hülfe einer Lupe diese nach vergrössertem Massstabe aufgetragene Kurve.

Fig. 37.



Es sind darin dieselben Ordinaten y gewählt, für welche man Th. I Abschn. 5 von Weissbach's Mechanik die Abscissen x als gemessen und berechnet gegenübergestellt findet. Vergleichsweise ist die sich aus letztern Daten ergebende Kurve punktirt eingetragen, und es gehört nur eine ganz oberflächliche Beobachtung dazu, um zu erkennen, wie sehr verschieden diese letztere Kurve namentlich zwischen $x = 0$ und $x = 0,76$ von der wirklich beobachteten ist und wie hier nicht nur eine unrichtige Kurven-Gleichung, sondern auch eine irrthümliche Beobachtung vorliegen muss. OX bezeichnen den ursprünglichen Wasserspiegel als Axe der x und OY die vertikale Berührungsfläche des eingetauchten Gegenstandes als Axe der y für O als Coordinatenpunkt.

Des bequemern Vergleiches halber mit den sich in Weissbach's Mechanik vorfindenden Beobachtungs- und Rechnungs-Grössen sollen hier und auch weiterhin die Maasse in pariser Linien $= 1,062$ rh. Linien genommen werden. Dafür berechnet sich in pr. Pfund für Wasser von 13° R.

$$\gamma = 0,0000248$$

$$\mu = 0,0000283$$

$$s = 0,0000400$$

Die Aufsteigehöhe $= 1,37$ par. Linien ist auch vom Verfasser bis

auf 0,005 genau gemessen und übereinstimmend gefunden. Dass dieselbe durchaus constant und unabhängig von der Beschaffenheit der benetzten Fläche sei, haben schon ältere Versuche übereinstimmend dargethan. Es hätte sich hieraus schon ergeben müssen, dass die Flächen-Adhäsion gar keinen Einfluss auf die Gestalt der Kurve ausübt.

Das Merkwürdige dieser Kurve findet sich nun darin, dass sie uns in eben so unerwarteter, als zuverlässiger und genauer Weise Aufschluss über die Biegsamkeit des Wassers giebt. Während uns $\tan\varphi$ für die Grenze der Biegsamkeit bereits bekannt ist, finden wir hier das Aenderungs-Verhältniss von $\tan\varphi$ für alle von 0 bis μ wachsenden Inanspruchnahmen. Vor dem Aufziehen des Stabes musste nämlich die Molekül-Kette $O'X'$ eine horizontale Gleichgewichts-Lage haben. Nach dem Aufziehen resp. Aufsteigen des Wassers muss sie, da durch diese Inanspruchnahme nachweislich die absolute Festigkeit nicht überschritten wurde und daher ein Zerreißen nicht stattfinden konnte, die hängende Lage OX' angenommen haben, während der Raum $OO'X'$, ohne dass hier weder ein Zug noch ein Druck auf OX' wirken konnte, bei diesem Vorgange in stetem Gleichgewicht mit dem Druck-Niveau des ursprünglichen Wasserspiegels OX sich durch nachdringende Molekül-Schichten, wie dies eine geringe Biegung in der übrigen Wassermasse gestattete, wieder ausfüllte. Man kann beobachten, dass die Kurve Y bei langsamem und gleichmässigem Herausziehen des Stabes durchaus ihre ursprüngliche Gestalt beibehält, was sich auch bei näherer Erwägung als nothwendig ergibt. Während des Aufziehens findet an der Fläche OY eine augenscheinliche Abscheerung statt. Es muss also der Tangenten-Winkel in $Y = \varphi = 39^\circ 48'$ sein, während wir, die Kurve als bekannt vorausgesetzt, in allen übrigen Punkten die Tangenten-Winkel berechnen können und daher nur noch die wirksamen Zugkräfte zu ermitteln brauchen, um über das Verhältniss beider zu einander genau unterrichtet zu sein.

Betrachten wir die dargestellte Kurve als Durchschnitts-Fläche einer aufrecht stehenden Wasserscheibe von der Breite $= 1$.

Das statische Gleichgewicht vorausgesetzt, muss natürlich wiederum in jeder Axenrichtung die Summe aller Kräfte $= 0$ sein. In jedem beliebigen vertikalen Querschnitt muss daher die Summe aller aufwärts entgegenwirkenden Kräfte gleich der Summe aller abwärts ziehenden sein. Die erstere ist für jedes $y = \mu y$ und die letztere dem Gewicht der rechts von y über dem ursprünglichen Wasserspiegel aufgezogenen Wassermasse, also für die Breite 1 gleich dem Produkt aus der rechts von y zwischen Kurve und Abscissen-Axe eingeschlossenen Fläche F und dem Gewicht der Einheit. Wir haben also die Bedingungs-Gleichung

$$\mu y = \gamma F = \gamma \cdot \int y dx$$

Auf beiden Seiten differenzirt

$$\text{II } \mu dy = -\gamma y dx,$$

weil für den gewählten Coordinatenpunkt dy und dx entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Integration ergibt

$$x = -\frac{\mu}{\gamma} \ln y + \text{Const.}$$

$$-0 = +\frac{\mu}{\gamma} \ln h - \text{Const.}$$

Also
$$x = \frac{\mu}{\gamma} (\ln h - \ln y)$$

und wenn man der bequemern Rechnung halber anstatt der natürlichen Logarithmen die Brigg'schen einführt

$$\text{III } x = \frac{2,3\mu}{\gamma} (\log h - \log y)$$

Für $\frac{\mu}{\gamma} = \frac{283}{248} = 1,14$ und $h = 1,37$ gesetzt, ergeben sich hieraus die der aufgezeichneten Kurve beigeschriebenen Abscissen- und Ordinaten-Masse. Für $y = 0$ wird $x = \infty$, woraus folgt, dass der ursprüngliche Wasserspiegel eine Asymptote der Adhäsions-Kurve ist.

Aus Gleichung II erhält man ferner

$$\text{IV } \tan \alpha = \frac{dx}{dy} = -\frac{\mu}{\gamma y}$$

Für $y = h = 1,37$ ergibt sich $\tan \alpha = \tan \varphi = \frac{1,14}{1,37} = 0,832$

und φ nunmehr genau $= 39^\circ 48'$. Da $\tan \varphi$ eine Constante ist, so sind wir nunmehr auch in der Lage, umgekehrt für Wasser von jeder Temperatur die Aufsteighöhe berechnen zu können; denn aus Gleichung IV folgt

$$\tan \varphi = \frac{\mu}{\gamma h} \text{ also } h = \frac{\mu}{\gamma \tan \varphi}.$$

Für Wasser von 45° R. ergibt sich beispielsweise $\gamma = 0,0000244$ und $\mu = 0,0000227$, also $\frac{\mu}{\gamma} = 0,93$, woraus denn folgt, wenn man für $\tan \varphi$ den Werth $0,83$ setzt

$$h = \frac{0,93}{0,83} = 1,12''.$$

Es vermindern sich also die Aufsteighöhen mit der Temperatur und der Cohäsion, wovon man sich übrigens schon durch den Augenschein und durch Schätzung des Verhältnisses der Aufsteighöhe zu der Dicke einer eingetauchten Glastafel, die man vorher genau gemessen hat, überzeugen kann. Aus Gleichung IV und der Erläuterung zu der punktirten Linie OX' folgt ferner der für die Ermittlung von Aufsteighöhen in Haar-

röhrchen wichtige Satz, dass bei gleichen Verschiebungs-Höhen (h) die Tangenten sich umgekehrt wie die zugehörigen Aufsteige-Höhen, also auch wie die Gewichte der gehobenen Wassermassen oder, was dasselbe ist, wie die auf Verschiebung wirkenden Kräfte verhalten. Die Subtangente auf dem ursprünglichen Wasserspiegel OX ergibt sich durch $St = y \tan \varphi$ auf

$$St = \frac{\mu}{\gamma}.$$

Die Kurve hat also eine constante Subtangente. Um den Krümmungshalbmesser ϱ durch den allgemeinen Ausdruck $\varrho = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy^2}$ zu finden, kehre man in der Differenzial-Gleichung II die Coordinaten-Axen um, welche Operation auf die Grösse des Krümmungshalbmessers keinen Einfluss hat; dann wird

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\mu}{\gamma x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{\gamma x^2} \text{ und } d^2y = \frac{\mu dx^2}{\gamma x^2}$$

$$dy^2 = \frac{\mu^2}{\gamma^2} \cdot \frac{dx^2}{x^2}.$$

Substituirt man diese speciellen Werthe in den allgemeinen Ausdruck für ϱ , so erhält man

$$\varrho = \frac{(\gamma^2 x^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu \gamma^2 x}$$

und führt man die ursprüngliche Axenlage wieder ein

$$\varrho = \frac{(\gamma^2 y^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu \gamma^2 y}.$$

Für $y = 0$ wird $x = \infty$, also auch $\varrho = \infty$.

Für $y = h$ wird

$$\varrho = \frac{(\gamma^2 h^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu \gamma^2 h}.$$

Setzt man hierin die Werthe, so erhält man $\varrho = 3,66'''$ als den kleinsten Krümmungshalbmesser der Kurve.

Der Flächenhalt F' eines zwischen h , einer beliebigen Ordinate y und dem ursprünglichen Wasserspiegel enthaltenen Kurvenstückes ergibt sich, wie folgt:

$$F' = \int x dy.$$

Setzt man hierin für x den bei Herleitung der Gleichung III erhaltenen unbestimmten Integral-Werth $-\frac{\mu}{\gamma} \ln y$, so wird

$$F' = -\frac{\mu}{\gamma} \int^h \ln y dy.$$

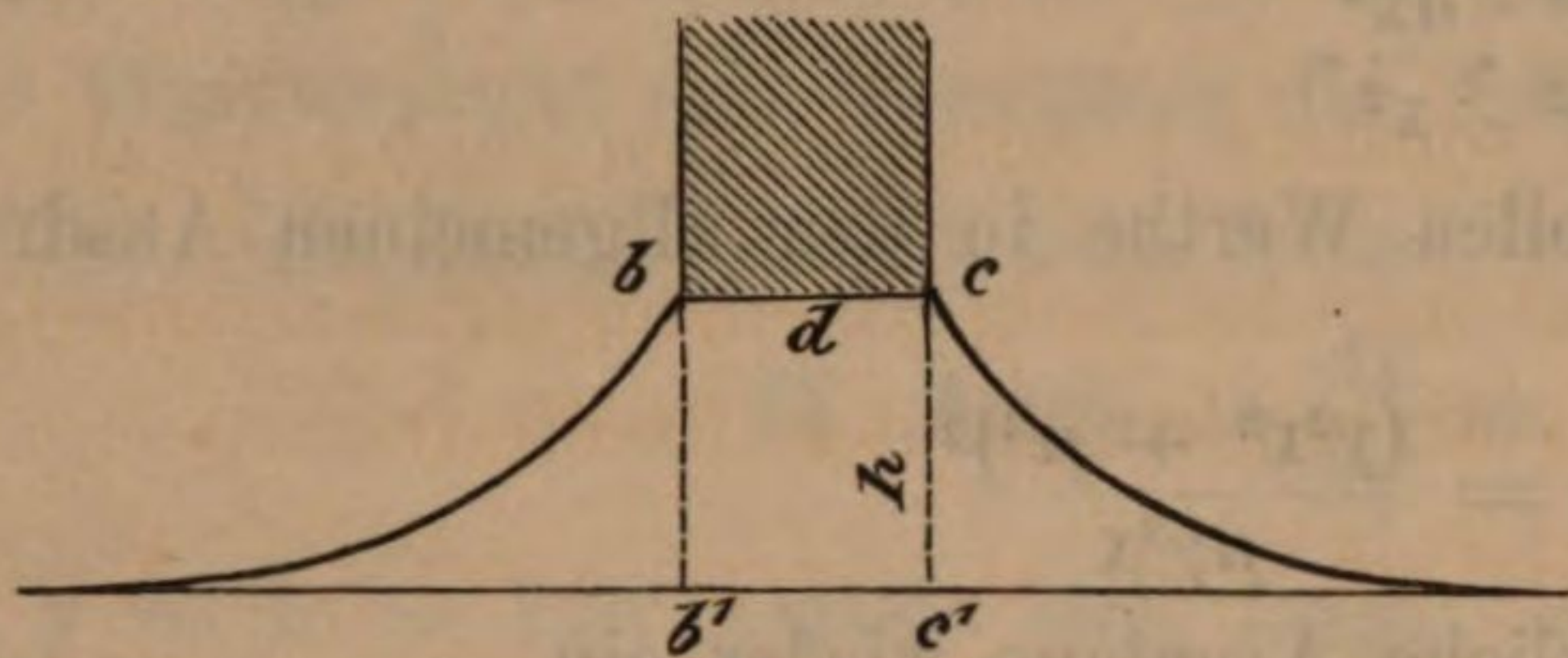
Also $F' = \frac{\mu}{\gamma} (h \ln h + y - y \ln y - h)$.

Will man hieraus den Flächeninhalt eines zwischen $y = y$ und $y = 0$ enthaltenen Kurvenstückes ableiten, so muss man in vorstehender Gleichung für $h = y$ und für $y = 0$ setzen. Dann erhält man, den Grenzwert für $y \ln y = \ln(y^y) = \ln 1 = 0$ gesetzt,

$$F'' = \frac{\mu}{\gamma}(y - \ln y)$$

und zieht man endlich von F'' den Inhalt des Rechteckes $XY = -\frac{\mu}{\gamma} y \ln y$, welcher hier mit einbegriffen ist, ab, so erhält man den ursprünglichen Werth von $F = \frac{\mu}{\gamma} y$ wieder, von welchem wir ausgegangen sind, nämlich den rechts von y befindlichen Vertikalschnitt der erhobenen Wassermasse. Will man sich noch weiter davon überzeugen, dass wirklich nur die eigene Cohäsion des Wassers die Gestaltung dieser Kurve bedingt, so ziehe man die eingetauchte Platte langsam aus dem Wasser, bis sie in die Lage Figur 38 gelangt und man wird leicht finden, dass

Fig. 38.



die Erhebungs-Kurve durchaus unverändert bleibt, wenn in bb' und cc' die Körperfläche durch den Wasser-Durchschnitt ersetzt ist. Die Dicke der eingetauchten Platte muss dann natürlich ein gewisses Minimum haben,

welches sich durch die Relation ermittelt $dh\gamma + 2\mu h = ds$, woraus folgt

$$d = \frac{2\mu h}{s - h\gamma}.$$

Für pariser Linien die Werthe eingesetzt, wird

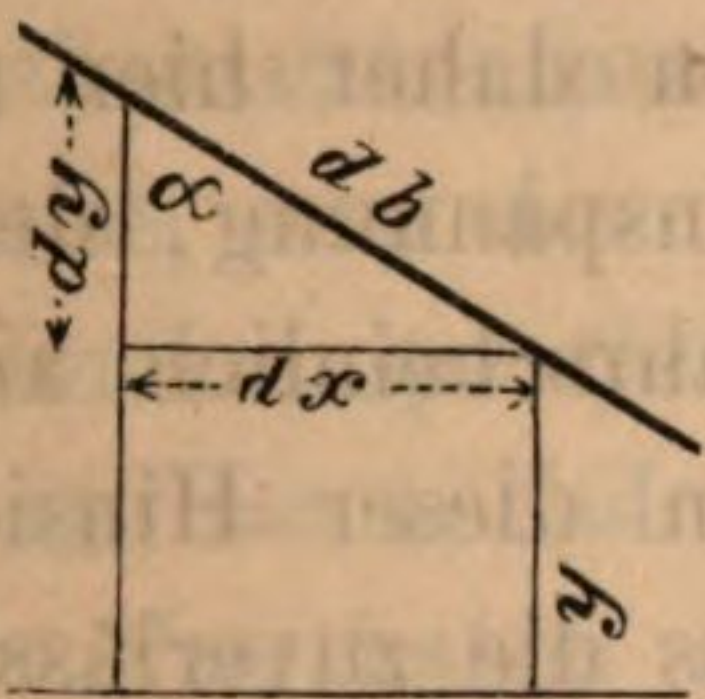
$$d = \frac{2 \cdot 0,0000283 \cdot 1,37}{0,0000400 - 0,0000248 \cdot 1,37} = 12,9'''$$

unter der Voraussetzung, dass der eingetauchte Körper poröser Natur ist. Für Glas würde man s statt 0,73 Pfund pr. $\square$ Fuss = 1,15 Pfund setzen können; dann muss eine Plattendicke von = 8,2 Linie genügen, um die beiderseitigen Adhäsions-Kurven zur vollständigen Ausbildung gelangen zu lassen. Eine andere in hohem Grade merkwürdige Eigenthümlichkeit dieser Kurve besteht darin, dass sich aus ihr ergibt, wie zur Bestimmung der Natur einer Flüssigkeit schon drei von den vier constanten Grössen s , μ , φ und γ hinreichen, dass also jede derselben eine Funktion der drei andern sein muss. Da wir sie beim Wasser auf dem Experimental-Wege alle vier bestimmt haben, werden wir durch eine nähere Betrachtung der Beziehungen, welche sich dafür aus der

hergeleiteten Kurve ergeben, gleichzeitig die Richtigkeit der Beobachtung und die Schärfe der Herleitung zu prüfen im Stande sein. Es wird dabei anschaulich werden, wie sich in dieser anscheinend so bedeutungslosen Erscheinung alle Grössen messen lassen, welche die physikalische Natur einer Flüssigkeit und deren Bewegungs-Gesetze bestimmen.

Es bedarf nur einer eingehenden Betrachtung der Molekular-Verschiebung zwischen OYXX', Figur 37, zu der Ueberzeugung, dass wir es hier mit der Kurve zu thun haben, welche ein auf dem Boden liegendes unendlich langes Seil bildet, wenn man dasselbe an einem Ende aufhängt und mit Gewichten belastet, welche von dem asymptotischen Berührungspunkte des Bodens bis zum Aufhänge-Punkte von 0 bis $h\mu$ als gewisse Funktionen von y wachsen. Während die Horizontal-Spannung demgemäss in der ganzen Kurve constant bleibt, wächst mit der Vertikal-Spannung auch die Bogen-Spannung von erstem bis letztem Punkte als Funktion von y . In dem Uebersehen dieses Verhältnisses liegt eben der Fehler, welcher in der Hagen'schen Herleitung der Adhäsions-Kurve begangen ist. Wenn man diesem im Uebrigen durchaus correcten Herleitungs-Gange folgt und den Fehler dadurch berichtigt, dass man den als constant vorausgesetzten Faktor $\frac{S}{\gamma}$ als mit y veränderlich nimmt, gelangt man beiläufig zu einem mit dem unsrigen, und der Beobachtung, völlig übereinstimmenden Resultate.

Fig. 39.



Bezeichnet man in einem beliebigen Kurven-Elemente, Figur 39, die Vertikal-Spannung wiederum mit μ'' , die Horizontal-Spannung mit μ' und die Bogen-Spannung mit s' , den Tangenten-Winkel mit α , so muss auch hier die Proportion stattfinden:

$$\mu'' : \mu' : s' = dy : dx : db.$$

Daraus ergeben sich, wenn man die entsprechenden trigonometrischen Funktionen einführt

$$1) \mu'' \frac{s' \sin \alpha}{\tan \alpha}, \quad 2) \mu' = \mu'' \tan \alpha, \quad 3) s' = \frac{\mu'' \tan \alpha}{\sin \alpha}.$$

Ziehen wir nun den Gleichgewichts-Zustand in der ganzen aufgezogenen Molekül-Lage OYXX' in Betracht, so muss die Vertikal-Spannung, welche für $y = h$ sich pro Flächen-Einheit auf μ ergibt, für jedes andere y sich auf $\mu \frac{hy}{h} = \mu y$ ergeben und mit $y = 0$ werden. Setzen wir diesen Werth für μ'' in Gleichung 2 und für $\tan \alpha$ den Werth aus Gleichung IV, so wird $\mu' = \frac{\mu^2}{\gamma h}$ und für 13° R. die Zahlenwerthe gesetzt, $\mu' = 0,4326$ Pfund, also, wie vorausgesetzt, in der ganzen Kurve constant, was auch der constanten Subtangente entspricht. Die Hori-

zontal-Spannung in der Wasser-Oberfläche beträgt also nur etwa $\frac{4}{7}$ seiner absoluten und $\frac{4}{5}$ seiner Abscheerungs-Festigkeit.

Berechnen wir nun mittelst Gleichung 3 die Bogen-Spannung für die Werthe $y = h = 1,37''$ und $y = 0,70$, so ergeben sich dieselben auf 0,68 und 0,51. Also die höchste Anspannung der Wasseroberfläche an dem Berührungs-Punkte mit der eingetauchten Fläche ergiebt sich auf nur $0,73 - 0,68 = 0,05$ kleiner, als die absolute Festigkeit s. Unsere Herleitung wäre unrichtig gewesen, wenn sie sich grösser oder gleich gross ergeben hätte; denn selbst im letzteren Falle würde der Zusammenhang der Massen sich im labilen Gleichgewichts-Zustande befunden und die geringste Erschütterung hingereicht haben, um denselben aufzuheben, was indessen, wie die Beobachtung zeigt, nicht der Fall ist. Es verbleibt im Gegentheil noch ein geringer Ueberschuss an Cohäsion, welcher zur festen Begrenzung der Form der gehobenen Wassermasse nothwendig ist.

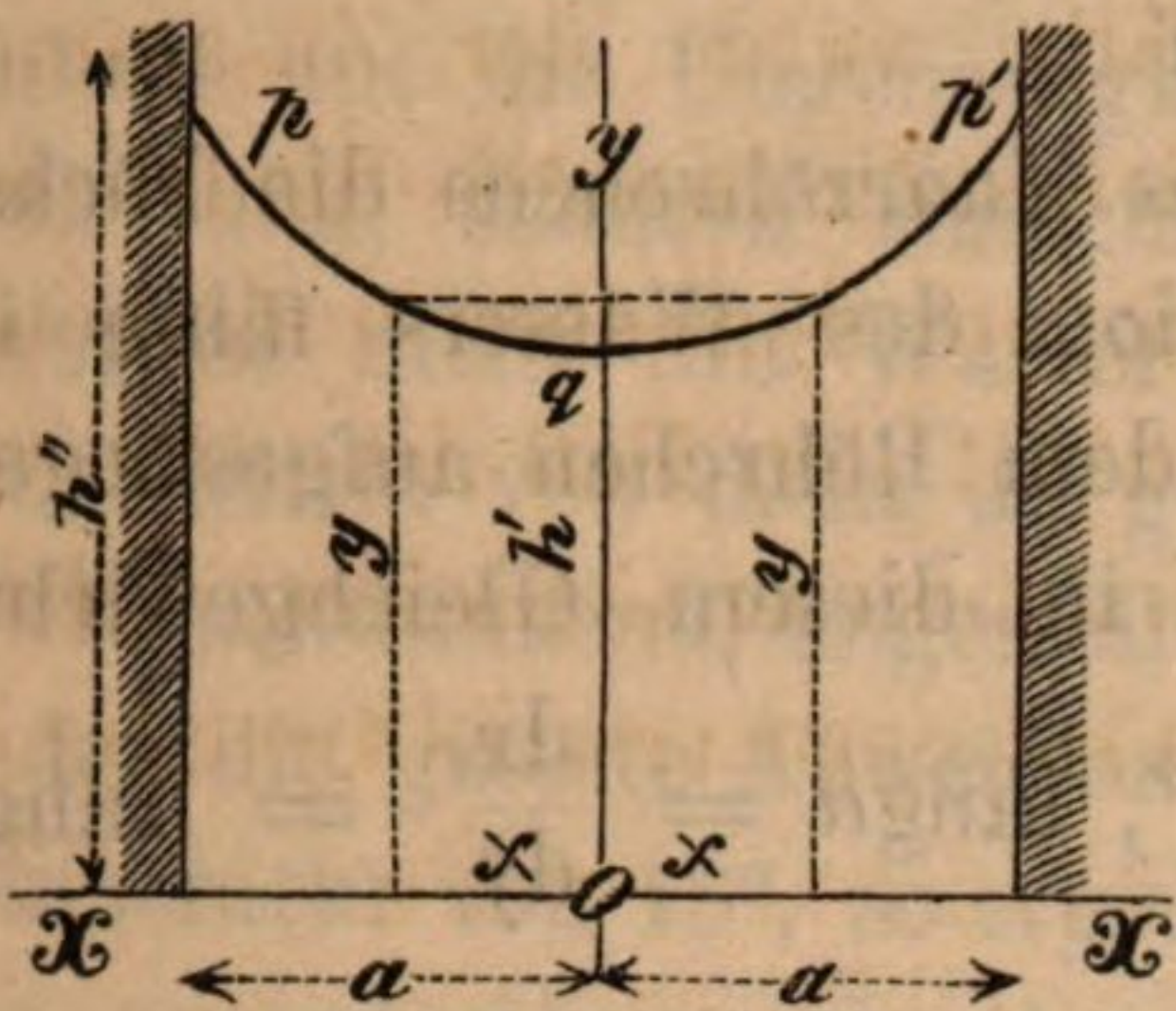
§ 10.

Aufsteige-Höhe in Haarröhrchen.

An die hiermit beendigte Untersuchung der Adhäsions-Kurve schliessen wir nunmehr am passendsten die über das Aufsteigen des Wassers in Haarröhrchen an. Schon haben wir bei Gelegenheit darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichgewichts-Verhältnisse nicht genau dieselben bleiben, je nachdem ein Röhrchen in das Wasser eingetaucht oder aus demselben herausgezogen wird. Wir können daher hier nur den Zustand der absoluten Ruhe und der höchsten Anspannung, deren das Wasser fähig ist, in Betracht ziehen, welcher wahrscheinlich auch wohl den zahlreichen Versuchs-Resultaten, die uns in dieser Hinsicht vorliegen und von denen wir nur die Hagen'schen als die zuverlässigsten unserer Deduktion gegenüberstellen wollen, zu Grunde liegt. Wir haben bisher die Frage unentschieden gelassen, ob es Körper gäbe, deren Attraktion zum Wasser nur verschwindend klein, oder auch solche, bei welchen sie wirklich 0 wird, weil wir der Entscheidung dieser Frage keine praktische Wichtigkeit beizulegen vermochten. Auch für die Erklärung des Aufsteigens in Haarröhrchen kann diese Frage von keinem praktischen Einflusse sein. Beobachtungen darüber haben wir nur in Glasröhren anzustellen vermocht, in denen unverkennbar die Attraktion ihre Wirkung ausübt. Nehmen wir aber auch an, es werde eine Röhre, deren Wandungen gar keine Attraktion auf die Wasser-Moleküle ausüben, in dasselbe getaucht, so würde dennoch, da ja die allergeringste Erschütterung hinreicht; um die Oberfläche des Wassers in schwingende Bewegung zu setzen, eine, wenn auch sehr langsame und allmähliche Benetzung des von dem Wasser berührten Flächenrandes eintreten. Die

bei einer solchen Bewegung sich gegen den Rand erhebenden Wassermoleküle bleiben in den Flächenporen hängen und beginnen hier sofort ihre Thätigkeit auf Nachziehen der untern Moleküle. So wird dennoch, wenn auch sehr langsames, Aufsteigen erfolgen, welches seine Grenze genau da erreichen muss, wo sich dieselbe auch bei ursprünglich bereits benetzt gewesenen oder solchen Flächen findet, welche Attraktion äussern. Untersuchen wir nun, wo diese Grenze liegen muss.

Fig. 40.



a bezeichne in Figur 40 den halben Durchmesser des Röhrchens, XX' die Horizontale des ursprünglichen Wasserspiegels als Axe der X und OY die Mittelaxe des Röhrchens als Axe der Y mit O als Coordinaten-Punkt; h' bezeichne die innere, h'' die äussere Aufsteige-Höhe an dem Umfange des Röhrchens.

Wir haben schon früher bemerkt, dass die Kurve ppp' , welche die Form des sogen. Meniskus bestimmt, nahezu ein flacher Kreisbogen ist. Wir können mit Rücksicht darauf hier vorläufig annähernd die Höhe des Wasser-Cylinders yy über dem ursprünglichen Wasserspiegel mit $\frac{(y+h')}{2}$ in Rechnung bringen, vorbehaltlich des spätern Ergebnisses, dass diese Abweichung von dem streng mathematischen Wege von keinem Einfluss ist, so störend sie für den reinen Mathematiker auch erscheinen mag. Es hängt dann in dem Cylinder-mantel von der Abscheerungs-Fläche $2x\pi y$ das Gewicht des Wasser-Cylinders $\frac{1}{2}x^2\pi(h' + y)\gamma$, an einem vertikalen Cylinderstreifen von der Breite $= 1$ und der Höhe y also das Gewicht $\frac{1}{4}x(h' + y)\gamma$.

Nun haben wir aber bei Untersuchung der Adhäsions-Kurve gefunden, dass, wenn an einer Abscheerungs-Ebene von der Höhe y und der Breite 1 das Gewicht μy auf Abscheerung thätig ist, die Tangente daselbst nach § 4 Gleichung IV den Werth

$$\tan \alpha = \frac{\mu}{\gamma y}$$

annimmt und dass sich die Tangenten bei gleicher Grösse der Abscheerungs-Flächen umgekehrt, wie die daran hängenden Gewichte verhalten müssen. Den obigen Werth von $\tan \alpha$ haben wir hier positiv statt wie in Gleichung IV negativ genommen, weil dem von uns gewählten Coordinaten-Punkte das positive Vorzeichen entspricht. Wir erhalten demnach die Proportion:

$$\mu y : \frac{1}{4} x (h' + y) \cdot \gamma = \frac{dx}{dy} : \frac{\mu}{\gamma \cdot y}$$

wenn wir mit $\frac{dx}{dy}$ den von uns gesuchten Tangentenwerth bezeichnen

und dazu den uns bei Herleitung der Adhäsions-Kurve bekannt gewordenen Werth von $\tan \alpha = \frac{\mu}{\gamma \cdot y}$ in Beziehung bringen. Aus vorstehendem Verhältnisse erhalten wir den gesuchten Werth

$$V \quad \frac{dx}{dy} = \frac{4\mu^2}{x(h' + y)\gamma^2}.$$

Die Integration innerhalb der Grenzen von 0 bis x ergibt

$$x^2 = \frac{8\mu^2}{\gamma^2} \ln \frac{h' + y}{2h'}.$$

Soll nun an dem innern Umfange des Haarröhrchens die höchste Anspannung stattfinden, deren die Cohäsion des Wassers fähig ist, bevor die Abscheerung eintritt und die in dem Röhrchen aufgestiegene Wassersäule wieder herabsinkt, so muss in diesem Gleichgewichtszustande für den Werth $x = \alpha$ und $y = h''$, $\tan \alpha = \frac{dx}{dy} = \tan \varphi$ werden.

Substituren wir diese Werthe in Gleichung V, so wird

$$VI \quad \tan \varphi = \frac{4\mu^2}{a(h' + h'')\gamma^2} \quad \text{und} \quad h' + h'' = \frac{4\mu^2}{a\gamma^2 \tan \varphi}$$

Für kleine und mittlere Werthe von a wird der Meniskus als Kreisbogen beobachtet. Mit hinlänglicher Genauigkeit können wir daher für solche Fälle das Verhältniss von h' zu h'' durch nachstehende trigonometrische Anschauung Figur 41 ermitteln.

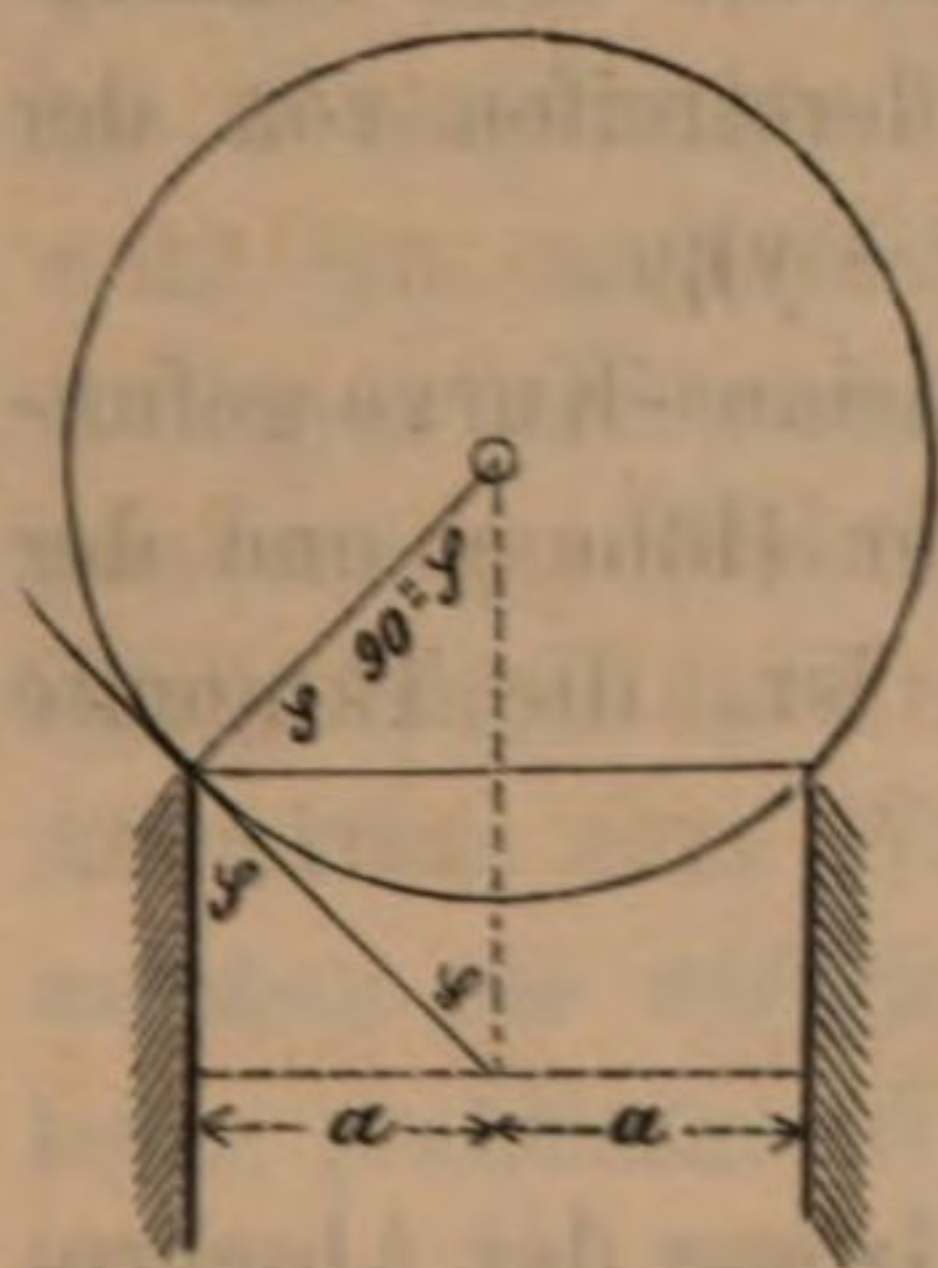


Fig. 41.

Für den Werth von $\varphi = 39^\circ 48'$ berechnet sich in Figur 41

$$h'' - h' = a (\sec. 39^\circ 48' - \tan 39^\circ 48') = 0,47a \quad \text{und} \quad h'' = 0,47a + h'$$

in Uebereinstimmung mit der Beobachtung. Substituiert man diesen Werth von h'' in Gleichung VI, so erhält man

$$VII \quad h' = \frac{2\mu^2}{a\gamma^2 \tan \varphi} - 0,24a$$

und die Werthe für pariser Linien eingesetzt

$$\text{also} \quad \frac{\gamma}{\mu} = 1,14 \quad \text{und} \quad \tan \varphi = 0,832$$

$$h' = \frac{3,12}{a} - 0,24a \quad \text{und} \quad h'' = \frac{3,12}{a} + 0,23a.$$

Berechnen wir nun nach diesem Ausdrucke die Aufsteigehöhe h' für die in dem 5. Abschnitte des 1. Theiles von Weissbach's Masch.- und Ingen.-Mechanik mitgetheilten Werthe von a, und stellen sie den Hagen'schen Versuchsergebnissen gegenüber, so ergibt sich nachstehende Tabelle:

a Halbe Röhrenweite	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
h' von Hagen gemessen.....	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
h' nach der Herleitung berechnet für $\mu = 0,52$	10,50	9,20	7,45	5,58	4,66	3,87	3,82
Desgl. für $\mu = 0,508$	9,98	8,74	7,07	5,30	4,43	3,68	3,63

Die sich hier ergebenden Differenzen gestatten eben so wenig einen Schluss auf die Ungenauigkeit der Beobachtung, als auf die unserer Herleitung, sondern zunächst nur den Schluss, dass die Hagen'schen Versuche nicht mit Wasser von genau derselben Temperatur, sondern mit solchem von mehr als gewöhnlicher Zimmerwärme, zwischen 15° und 18° R. schwankend, angestellt sind. Setzt man nämlich in der 2. Columne, in der die grösste Abweichung stattfindet, für μ 0,50, entsprechend einer Temperatur von 18° , so ergibt sich auch hier h', wie beobachtet, = 8,50, was um so überraschender erscheinen muss, als es wegen der bereits erwähnten Umstände schwierig ist, genaue Beobachtungen anzustellen und zudem zweifelhaft bleibt, ob nicht vielmehr in der Weissbach'schen Zusammenstellung h'' direct gemessen und daraus h' ohne genaue Kenntniss des Verhältnisses zwischen beiden Grössen abgeleitet worden.

Auch das Spannungs-Maass $\frac{y}{s}$, welches sich in der erwähnten Zusammenstellung für jeden einzelnen Versuch als Constante des hypothetisch hergeleiteten Abhängigkeits-Verhältnisses der Aufsteigehöhen von dem Durchmesser der Röhren ergibt, schwankt zwischen 1,455 und 1,512 und zwar ziemlich genau in dem Maasse, als die Versuchs-Resultate von unsern Rechnungs-Resultaten abweichen und wir Temperatur-Differenzen vorausgesetzt haben.

Aus Gleichung V und VI lassen sich alle übrigen Beziehungen, welche hier noch von Interesse sein können, auch die mathematisch strenge Form des Meniskus, der Krümmungs-Halbmesser u. s. w. leicht herleiten.

Für $x = 0$ wird in Gleichung V $\frac{dx}{dy} = \infty$ was einem horizontalen Bogenelemente entspricht. Die strenge Gleichung für den Meniskus ergibt eine logarithmische Parabel, die bis zu Werthen von $a = 1,5''$ ziemlich genau mit einem Kreisbogen zusammenfällt und dann ebenso annähernd elliptisch wird.

§ 11.

Erhebung zwischen zwei parallelen Plantafeln.

Die über die Aufsteige-Höhe zwischen zwei parallelen Plantafeln in Weissbach's Mechanik mitgetheilten wenigen Versuchszahlen lassen so

wenig Uebereinstimmung erkennen und schienen uns auch durch Druckfehler (es kommt hier einmal h_2 statt a vor) zu unsicher geworden, als dass wir sie unsern Rechnungsergebnissen gegenüberzustellen vermochten. Wir haben darum eigene Versuche angestellt, die indessen nicht über eine Genauigkeit von 0,1 Lin. hinausgehen, aber vollständig hinreichend erscheinen, um die Uebereinstimmung zu constatiren.

Zur Anstellung solcher Versuche muss man sich schon längerer Glastafeln von mindestens 4 Zoll Länge bedienen, weil die Enden derselben in beiden Fällen, wenn man sie offen lässt, auch wenn man sie schliesst, auf die Aufsteighöhe modificirend einwirken und unsere Herleitung sich, wie früher, der einfachen Rechnung wegen auf die Längeneinheit eines unendlich langen zwischen zwei Platten aufsteigenden Wasser-Streifens beziehen wird. Wir haben uns bei unsern Versuchen zweier Spiegelglas-Tafeln von etwa 4 □ Zoll bedient. In der obern Hälfte wurden dieselben durch 4 Zwischenlagen von erwärmten Wachs-Kügelchen verbunden. Diese Einrichtung gestattete eine ausserordentlich leichte und bequeme Verstellbarkeit und Verschiebbarkeit der gegenseitigen Lage der Platten zu einander durch abwechselndes Zusammendrücken eines oder aller Wachskügelchen. Die beiden Seiten-Oeffnungen an den Enden der Platten wurden, so weit dieselben in Wasser getaucht wurden, ebenfalls mit Wachs geschlossen. Die Glas-Tafeln wurden auf den ebenen Boden eines horizontal gestellten, flachen Gefässes mit eben und scharf geschliffenem Rande aufrecht hingestellt. Es wurde nun durch Zulassen resp. Aufsaugen mit einer Spritze der Wasserstand im Gefässe bei jedem Versuche genau dahin regulirt, dass die Aufsteighöhe h'' mit der Höhe des Gefäss-Randes beim Visiren von einer Randseite nach der gegenüberliegenden abschnitt. An einem quer über den Rand gelegten Lineal von Messing, dessen Dicke genau ermittelt war, wurden nun durch Herunterlassen eines mit einer leichten Wachsschicht überzogenen Maassstabes der Wasserstand und die Gefässtiefe ermittelt. Aus der Differenz ergab sich die Aufsteighöhe über dem ursprünglichen Wasser-Spiegel. Die Resultate werden wir demnächst dem Ergebnisse der nachfolgenden Entwicklung gegenüberstellen. Wir wollen die bei Untersuchung der Aufsteighöhe in Haarröhrchen gezeichnete Figur 40 und deren Buchstaben hier beibehalten, nur dass wir uns hier statt des Axenschnittes durch einen Cylinder den Durchschnitt durch ein aufrechtstehendes Wasser-Prisma, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und 1 ist, vorstellen. Das Gewicht G des zwischen yy hängenden Wasser-Prismas berechnet sich analog dem Früheren, wenn man statt der mittlern Höhe einer Kugel-Kalotte die eines Kugel-Abschnittes nimmt.

$$G = \frac{2}{3} (2h' + y)$$

Dasselbe hängt an zwei Abscheerungs-Flächen, jede von der Breite 1 und der Höhe y, also von 2y Grösse. An jedem y hängt also $\frac{1}{3}xy(2h' + y)$. Wir haben also dem Früheren analog die Proportion:

$$\mu y : \frac{1}{3} xy(2h' + y) = \frac{dx}{dy} : \frac{\mu}{\gamma y}$$

woraus sich ergibt

$$\text{VIII} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{3\mu^2}{\gamma^2 x(2h' + y)}$$

Setzt man nun hierin für $\frac{dx}{dy}$ wiederum den Grenzwert $\tan \varphi$, für y dem entsprechend h'' und für $x = a$, so erhält man

$$2h' + h'' = \frac{3\mu^2}{\gamma^2 a \tan \varphi}$$

Der Meniskus zeigt auch hier genau denselben Kreisbogen, wie bei Haarröhrchen. Die Nothwendigkeit dafür ergibt sich leicht bei näherer Betrachtung der ursprünglichen Gleichgewichts-Bedingungen.

Substituirt man also auch für h'' den Werth $h' + 0,47a$, so wird

$$\text{IX} \quad h' = \frac{\mu^2}{\gamma^2 a \tan \varphi} - 0,16a$$

Für franz. Linien die Werthe eingesetzt, ergibt sich für Wasser von 13° R.

$$h' = \frac{1,56}{a} - 0,16a \text{ und } h'' = \frac{1,56}{a} + 0,31a.$$

Für rhl. Linien

$$h' = \frac{1,76}{a} - 0,16a \text{ und } h'' = \frac{1,76}{a} + 0,31a.$$

Wir können nunmehr in nachfolgender Gegenüberstellung die Richtigkeit dieser Herleitung an 5 von uns ausgeführten Messungen prüfen, nachdem wir in den gefundenen Ausdruck für h'' die entsprechende Werthe von a in rhl. Linien eingeführt haben.

2a Entfernung der Platten von einander ..	3,00	1,70	1,10	0,80	0,60
h'' gemessen.....	1,7	2,4	3,4	4,4	5,9
h'' berechnet.....	1,63	2,33	3,37	4,53	5,97

Die Uebereinstimmung berechtigt wohl einiger Maassen zu dem Schlusse, dass die Rechnung, weil nicht von Zufällen abhängig, auch hier genauere und richtigere Resultate ergibt, als vereinzelte, wenn auch noch so sorgfältige, Beobachtungen.

Weil wir in der Lage sind, die genaue Gestalt der Kurve des Meniskus zwischen zwei Platten der directern Beobachtung und Untersuchung zu unterziehen, wie dies bei Haarröhrchen möglich ist, so wollen wir dieselbe auch analytisch noch eingehender untersuchen.

Aus der Tangenten-Gleichung VIII

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma^2 x (2h' + y)}{3\mu^2}$$

ergiebt sich durch Differenziren, wenn man die Constante $\frac{\gamma^2}{3\mu^2} = b$ setzt

$$\frac{d^2y}{dx} = 6xdy + b(2h' + y)dx,$$

dy durch dx ausgedrückt und auf beiden Seiten mit dx^2 multiplicirt

$$dxd^2y = b(2h' + y) dx^3 + b^2x^2(2h' + y)dx^3,$$

während sich $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = dx^3(1 + b^2x^2(2h' + y)^2)^{\frac{3}{2}}$ ergiebt.

Aus dem allgemeinen Ausdrücke $\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}$ findet sich daher der Krümmungs-Halbmesser unserer Kurve

$$\varrho = \frac{(1 + b^2x^2(2h' + y)^2)^{\frac{3}{2}}}{b(2h' + y) + b^2x^2(2h' + y)}.$$

Es lässt sich hieraus übersehen, dass der Ausdruck für ϱ um so mehr einen constanten Werth annimmt, die Kurve sich also um so mehr dem Kreisbogen nähert, je grösser der Werth von $2h' + y$ und je kleiner x wird. Durch Integration der Tangenten-Gleichung VIII innerhalb der Grenzen von $x = x$ bis $x = 0$, also $y = y$ bis $y = h'$ erhält man

$$X \ x^2 = \frac{6\mu^2}{\gamma^2} \ln \frac{2h' + y}{3h'}$$

und wenn man $\ln$ durch $\log$ vulg. ersetzt, auch die frühern Zahlenwerthe für rhl. Linien einsetzt

$$x^2 = 20,29 \log\left(2 + \frac{y}{h'}\right) - 9,68.$$

Für $y = h''$ wird hier $x = a$, also

$$a^2 = 20,29 \log\left(2 + \frac{h''}{h'}\right) - 9,68.$$

Dieser Ausdruck giebt uns nun für jeden Werth von a das genaue Verhältniss von h' zu h'' , welches wir nun dem annähernd auf $h' = h'' - 0,47a$ angenommenen gegenüberstellen wollen, um die Grösse des begangenen Fehlers übersehen zu können.

Beispielsweise folgt daraus, dass bei dem 5. Versuche in unserer Tabelle das angenommene Verhältniss schon bei $a = 0,276$ stattfindet, während es bei 0,30 vorausgesetzt war, und bei dem ersten Versuche, dass es schon bei $a = 1,41$ statt bei $a = 1,50$ eintritt. Im ersten Falle berechnet sich für den Werth $h'' = 5,97 h'$ nur auf 5,80, also auf $h'' - 0,57a$ und im zweiten Falle für den Werth $h'' = 1,63$ nur auf 0,88 also $= h'' - 0,50a$, statt, wie angenommen, auf $h'' - 0,47a$. Der erstern Differenz entspricht ein Fehler von 0,02 Lin., der letztern

von 0,03 Lin., um den die Werthe von h'' in der Tabelle zu niedrig berechnet sind. Es ist leicht zu übersehen, dass die Fehler mit a abnehmen und für grössere Werthe von h' verschwindend klein werden, weshalb eine Correctur der hergeleiteten Formel für die Aufsteighöhen nicht lohnend und die Andeutung des Weges, auf welchem sich dieselbe bewerkstelligen lässt, hier genügend erscheint.

Für $h' = 0$ wird $a^2 = \infty$, was der asymptotischen Annäherung der Adhäsions-Kurve an den ursprünglichen Wasser-Spiegel durchaus korrekt entspricht. a wird ferner $= 0$, wenn der Bruch $\frac{h''}{h'}$ sich dem Werthe $= 1$ nähert, entsprechend einem unendlich grossen Werthe von h'' und h' .

Zur bessern Veranschaulichung mögen hier noch Fig. 42 und 43 zwei nach Gleichung X für Wasser von 13° R. berechnete Erhebungs-Kurven, und zwar für die Werthe von $h' = 0,90$ Lin., und $h' = 6,0$ Lin., erstere in 12facher, letztere in 60facher Vergrösserung dargestellt werden.

Fig. 42.

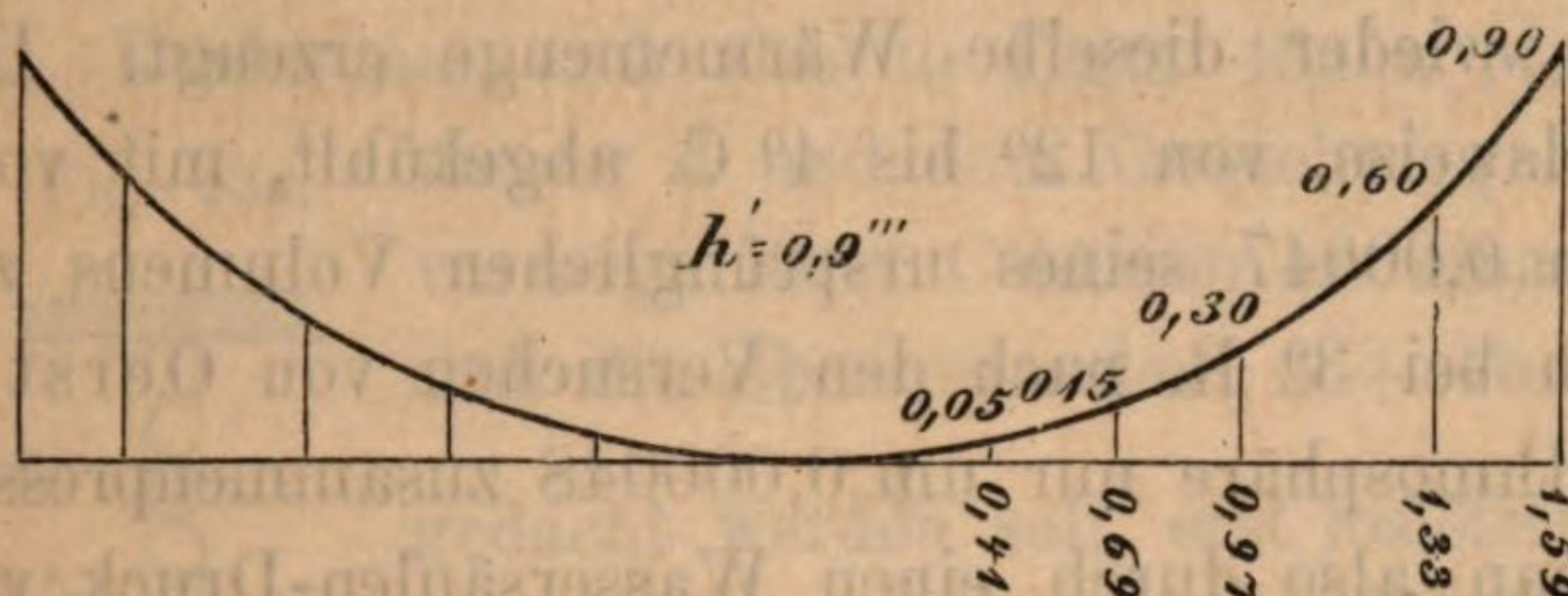
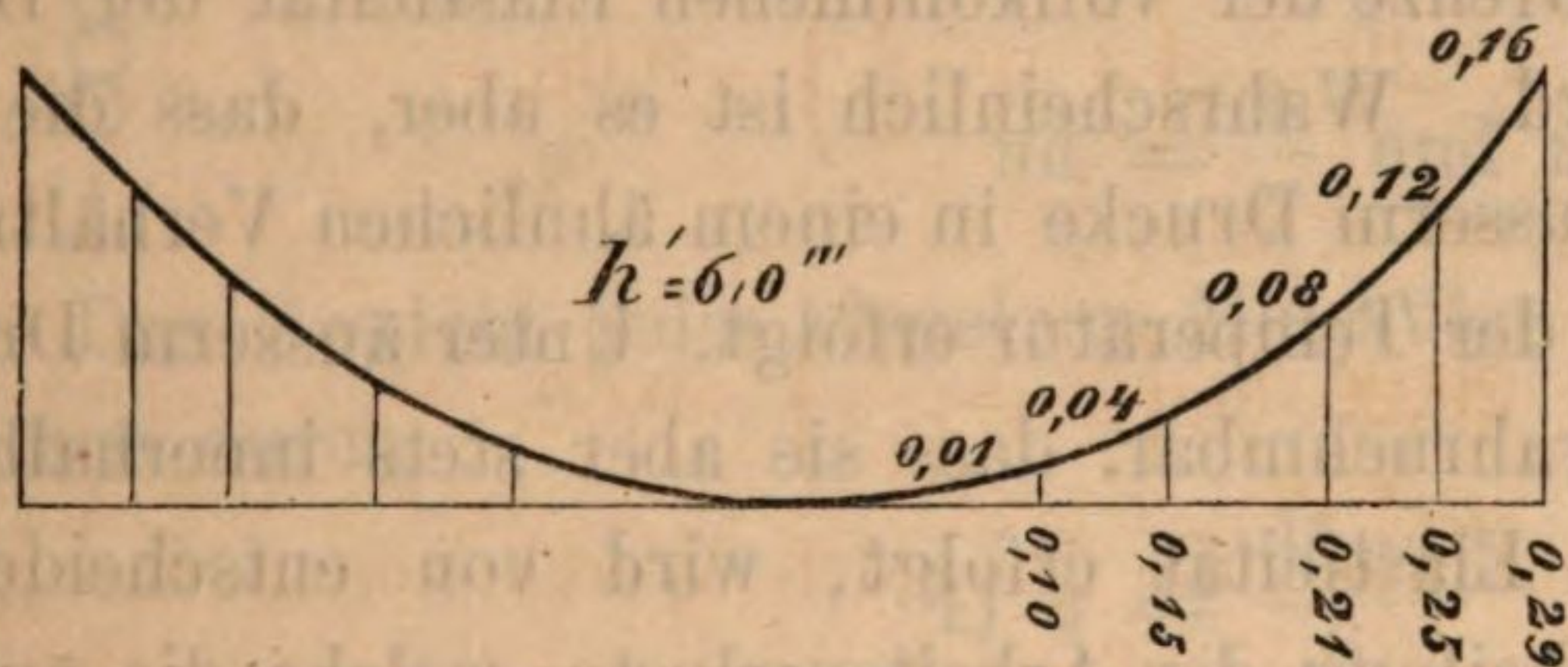


Fig. 43.



Die Abweichung von Kreisbogen stellt sich in der That als ausserordentlich geringfügig dar, und ist auch durch Beobachtung mittelst der Lupe kaum wahrzunehmen. Dass die Kurve des Axenschnittes durch den Meniskus bei Haarröhrchen genau dieselbe sein muss, ergibt sich aus den abgeleiteten Bedingungen-Gleichungen.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt schliessen. Die Zahl der Aufgaben, die sich auf diesem Gebiete noch erfinden lassen, ist eine unendlich grosse und bietet dem Mathematiker ein um so ergiebigeres und interessanteres Uebungsfeld, als er bei fast allen Auflösungen in der Lage ist, die Richtigkeit derselben und die Uebereinstimmung schon durch den Augenschein allein prüfen zu können.

Dritter Abschnitt.

Molekular-Gleichgewicht und Bewegung.

§ 12.

Allgemeines.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft findet sich in der Theorie des Stosses vollkommen elastischer Körper als längst vorhanden. Dass es in der mechanischen Wärme-Theorie wieder gefunden worden, ist darum ganz natürlich, weil sich alle thermodynamischen Untersuchungen innerhalb derjenigen Grenzen der Zustands-Veränderungen der Körper bewegen, in denen wir ganz unzweifelhaft vollkommene Elasticität beobachtet haben. Die Wärme dehnt bekanntlich die Körper genau mit derselben Kraft aus, mit welcher sie die Kälte zusammenzieht, und umgekehrt wird mit derselben Quantität Arbeit, welche eine Kraft verrichtet, immer wieder dieselbe Wärmemenge erzeugt. Das Wasser zieht sich beispielsweise, von 12° bis 4° C. abgekühlt, mit vollkommener Elasticität um 0,00047 seines ursprünglichen Volumens zusammen, während es sich bei 3° R. nach den Versuchen von Oersted durch den Druck einer Athmosphäre nur um 0,000048 zusammenpressen lässt. Jedenfalls kann man also durch einen Wassersäulen-Druck von 90,4 M. = 9 Athmosphären noch keine Pressung auf Wasser von 12° C. ausüben, bei welcher die Grenze der vollkommenen Elasticität der Dynamiden-Hüllen erreicht wird. Wahrscheinlich ist es aber, dass die Volumen-Änderung unter äusserm Drucke in einem ähnlichen Verhältnisse abnimmt, in dem sie mit der Temperatur erfolgt. Unter äusserm Drucke erscheint sie zwar kaum wahrnehmbar, dass sie aber stets innerhalb der Grenze der vollkommenen Elasticität erfolgt, wird von entscheidender Wichtigkeit für die Beurtheilung der Arbeitsverluste, welche die äussere Bewegung des Wassers durch die innere Molekular-Bewegung erleidet. Wenn wir desshalb von verschiedenen Hydrotekten das Wasser bald als einen vollkommen elastischen, bald als einen vollkommen unelastischen Körper vorausgesetzt finden, so müssen wir beiden Anschauungsweisen aus den beobachteten Erscheinungen eine gewisse Berechtigung zustehen, während die erstere allein Anspruch auf rationale Schärfe erheben kann. Das erste Anspritzen von Wasserstrahlen an rauhe Flächen, und das dabei vorkommende Absprühen kleiner Tröpfchen in entgegengesetzter Richtung, sowie die Beobachtung von Bidone und Andern, dass der erste Anprall eines isolirten Wasserstrahles gegen eine Fläche

einen doppelt so grossen Druck erzeugt, als das fortgesetzte Anströmen, bestätigen dies zum Ueberflusse.

Wollen wir daher zu einer naturgetreuen vergleichswisen Vorstellung von der innern Molekular-Bewegung gelangen, so können wir dies nicht besser, als durch die Vorstellung eines Systemes vollkommen elastischer Kugeln, nur mit der Zuthat, dass der Entfernung je zweier derselben von einander eine gewisse Kraft s_m entgegenwirkt, sobald die Berührung eingetreten ist.

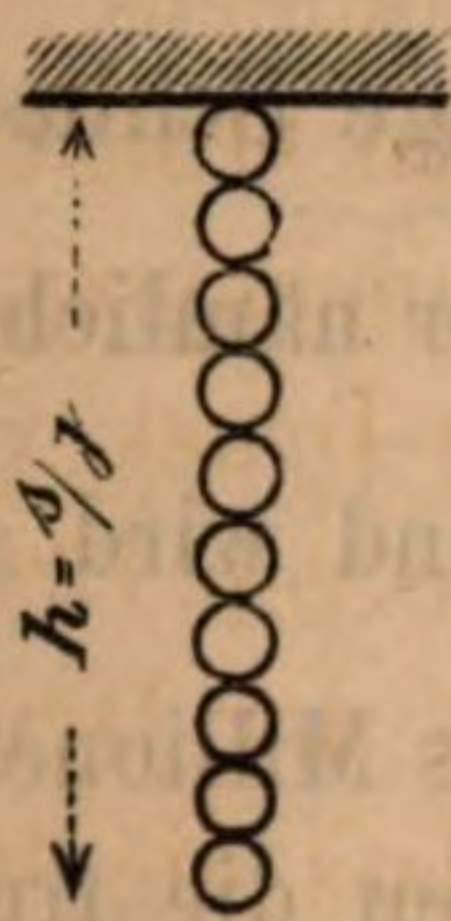
§ 13.

Verhältniss der Cohäsion zum Gewichte der Moleküle.

Das Verhältniss der Cohäsions-Kraft s_m , welche zwischen je zwei Molekülen wirksam ist, zum Gewichte derselben, lässt sich wie nachfolgend hypothetisch berechnen.

Nach § 7 drückt der Quotient $\frac{s}{\gamma}$ aus dem Gewichte der Raumeinheit in die absolute Festigkeit der Flächen-Einheit, die Höhe einer Wassersäule aus, deren Gewicht der Cohäsion ihres Querschnittes gleich ist. Denkt man sich also in Figur 43a n Moleküle jedes vom Durch-

Fig. 43a.



messer d und dem Gewichte q in einer vertikalen Kette vermöge ihrer Cohäsion an einander hängend, so würden sich dieselben von dem $n + 1$ ten, welches als festgehalten gedacht werden soll, erst loslösen, wenn $nd > \text{als } \frac{s}{\gamma}$ und $nq > \text{als } s$ wird. Im Zustande des Gleichgewichtes muss also

$$nd = \frac{s}{\gamma} \text{ und } nq = s_m$$

sein. Das Gewicht jedes einzelnen Moleküles in Kugelform drückt sich aber aus durch

$$1) \quad q = \frac{d^3 \pi \gamma}{6}.$$

Nun war aber $nd = \frac{s}{\gamma}$ also $n = \frac{s}{d\gamma}$. Substituirt man diese beiden Werthe von q und n in den Ausdruck für s_m , so erhält man

$$2) \quad s_m = \frac{sd^2\pi}{6}.$$

Entwickelt man aus Gleichung 1) d^2 und substituirt den gefundenen Werth in Gleichung 2), so ergibt sich

$$3) \quad s_m = q^{\frac{2}{3}} \cdot s \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\gamma^2}} \text{ und in Zahlen } = 0,03767 \cdot q^{\frac{2}{3}}$$

wenn man für s , π und γ die Werthe 0,73 Pfund, resp. 3,14 resp.

61,74 Pfund für Wasser von 13° R. setzt, auf welches wir in Zukunft alle unsere Probe-Rechnungen beziehen wollen, und zwar die Maass-Einheit in pr. Fussen und die Gewichts-Einheit in pr. Pfund.

Das Verhältniss $\frac{s_m}{q}$ ergibt sich daraus in Zahlen

$$4) \quad \frac{s_m}{q} = \frac{0,03767}{\sqrt[3]{q}}.$$

Bezeichnet N die in einer Längen-Einheit = 1 Fuss Raum findende Anzahl Moleküle, welche wir beispielsweise auf 100,000000 annehmen wollen, folgt ferner

$$N^3 q = \gamma \text{ und } q = \frac{\gamma}{N^3}.$$

Substituirt man diesen hypothetischen Werth von q in Gleichung 3), so erhält man den entsprechenden Zahlenwerth für s_m , und setzt man diesen in Gleichung 4) so ergibt sich nahezu

$$5) \quad \frac{s_m}{q} = \frac{0,03767n}{\sqrt[3]{\gamma}} = 953000.$$

Es beträgt also die zwischen je zwei Wasser-Molekülen wirksame Cohäsions-Kraft wahrscheinlich das Millionenfache des absoluten Gewichtes eines Moleküles.

Aus Gleichung 4) $\frac{s_m}{q} = \frac{0,03767}{\sqrt[3]{q}}$ vermögen wir wichtige Schlussfolgerungen auf die Molekular-Bewegung zu ziehen. Je grösser nämlich q wird, desto kleiner wird der Quotient $\frac{s_m}{q}$. Für $q = 1$ Pfund wird s_m

nur noch $\frac{1}{27}q$, während es für jedes einzelne Molekül wohl das Millionenfache beträgt. Da nun bei allen unregelmässigen Wirbelungen die freie Bewegung der gegen einander stossenden Wassertheilchen durch die Cohäsions-Kraft s_m gehindert wird, und umgekehrt letztere nur durch in entgegengesetzter Richtung wirkende Bewegung-Momente oder Massen-Impulse aufgehoben werden kann, so muss die relative innere Beweglichkeit in den Massen ungleich grösser werden als in den einzelnen Molekülen, während sie in erstern mit der geringsten Kraft-Einwirkung eintritt, in letztern verschwindend klein werden und sich der relativen Ruhe nähern. Es gehört also eine verhältnissmässig geringe Kraft-Einwirkung dazu, um grössere Wassermassen in Bewegung zu setzen und zum freien Stoss auf einander zu bringen, eine sehr grosse Kraft dagegen, um gleiche Stoss-Bewegungen auch auf die einzelnen Moleküle unter einander zu übertragen. Durch die leiseste Berührung kann man in einem mit Wasser gefüllten Gefässe Schwingungen erzeugen, die heftigste Erschütterung lässt ein ganz kleines Tröpfchen unbeweglich erscheinen, als ob es eine schwerflüssige klebrige Masse wäre.

In den kleinsten Theilchen ist daher wohl eine stossende aber keine rückprallende, sondern nur eine stete drehende Bewegung der einzelnen Körperchen um ihre Axe, bei der sie jedoch in steter Berührung mit einander bleiben, und sich ein Molekül von dem andern nur in dem Maasse abwälzt, als sich ein drittes dafür zuwälzt und die Stelle des erstern einzunehmen bestrebt ist, denkbar. Unterziehen wir nun diese drehende und abwälzende Bewegung und die Gleichgewichts-Bedingungen, welche dabei statthaben, einer nähern Untersuchung.

§ 14.

Abwälzende und drehende Bewegung.

Betrachten wir dabei zunächst die Gleichgewichts-Bedingungen zwischen drei Molekülen in der Lage Figur 44 und Figur 45.

Fig. 44.

Obere Ansicht.

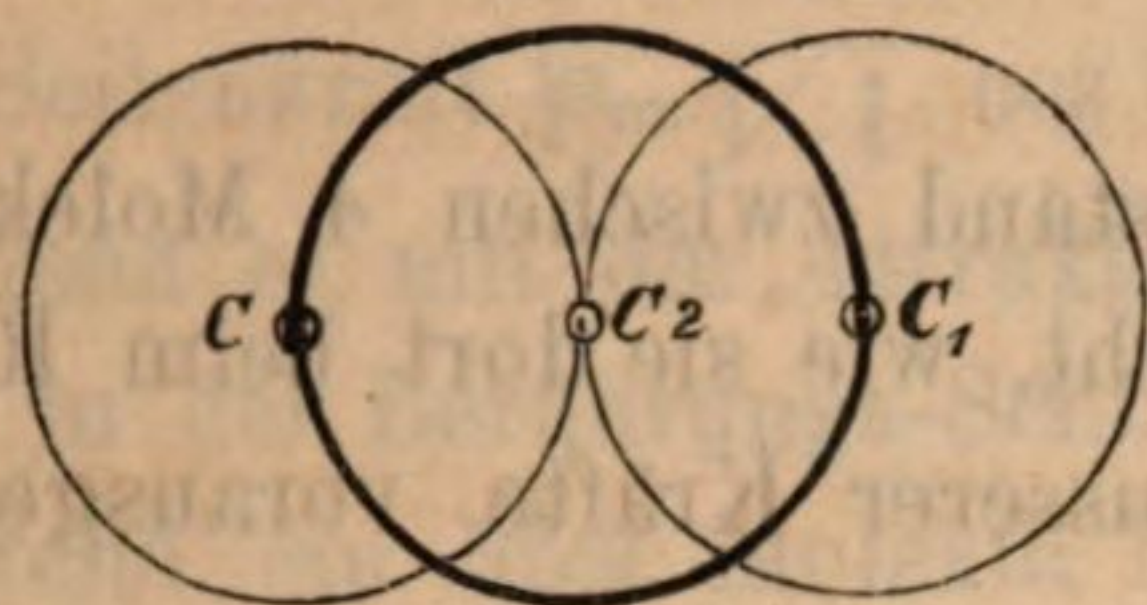
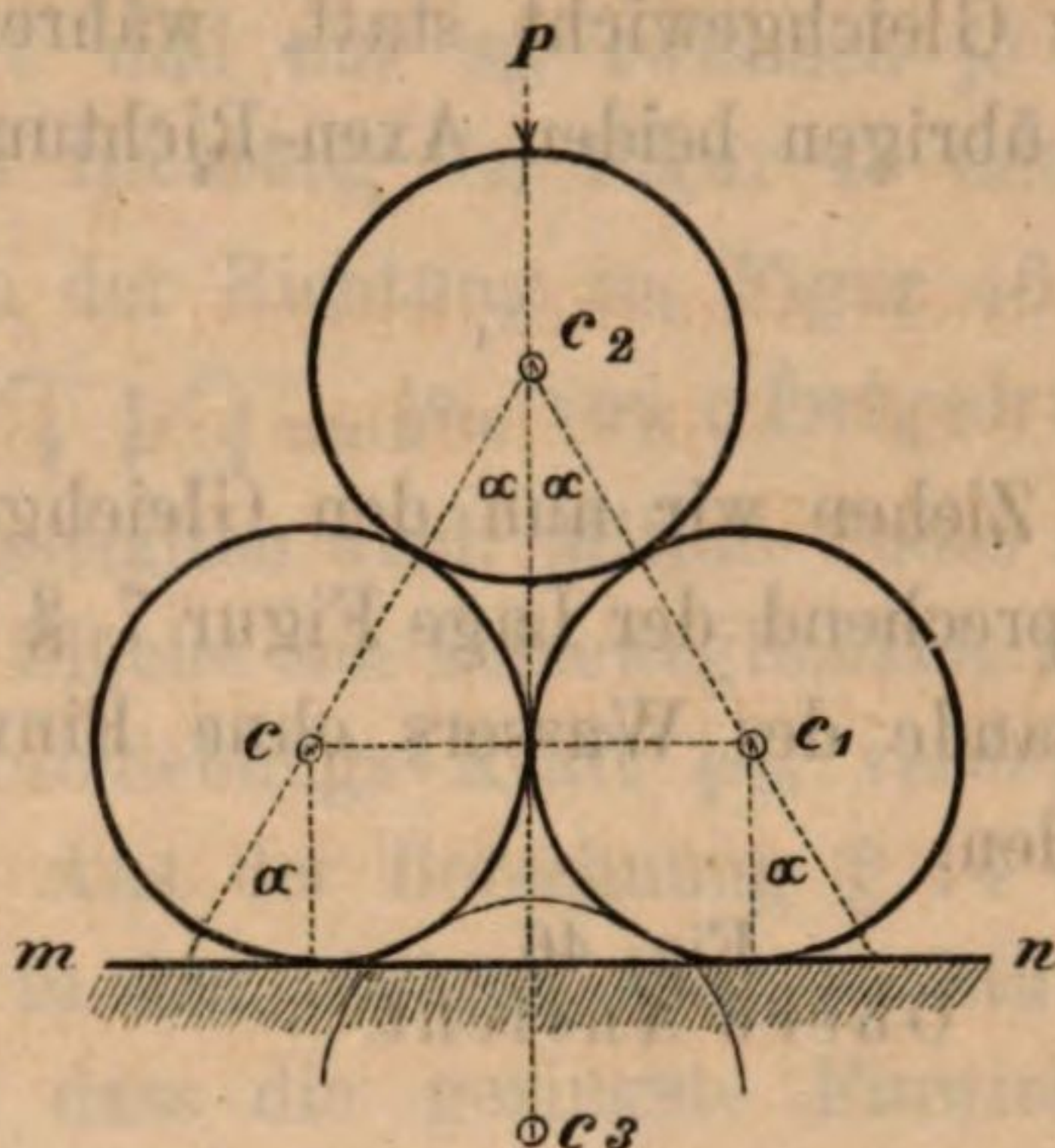


Fig. 45.

Vertikalschnitt nach cc₁.

Eine vertikal abwärts gerichtete Kraft P Figur 45 greife in c_2 an und treibe die beiden Moleküle c und c_1 gegen die Ebene mn . Der Durchmesser jedes Moleküles werde $= 1$ gesetzt. Winkel α ergibt sich hier auf 30° . Die Kraft P zerlegt sich zunächst in zwei central auf c und c_1 wirkende Seitenkräfte, jede $= \frac{P}{2} \sec \alpha$. Jede der letztern zerlegt sich wiederum in zwei andere Seitenkräfte

$$\frac{P}{2} \cdot \sec \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{P}{2} \quad \text{und} \quad \frac{P}{2} \cdot \sec \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{P}{2} \tan \alpha = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

von denen die erstere den Normaldruck gegen die Fläche mn , die letztere den Horizontalschub, mit welchem c und c_1 durch die Kraft P längs der Fläche fortgedrückt werden, darstellt. Es ergibt sich hieraus, dass diese Lage, welche mit der § 3 unter Figur 5 betrachteten übereinstimmt und die wir beim Eise vorausgesetzt haben, in der That nicht der Eigenschaft gleicher Druck-Uebertragung nach allen Richtungen entspricht, und daher im flüssigen Wasser nicht vorkommen kann.

Denken wir uns nun die äussere Kraft P fort und nur die Molekular-Attraktion s_m in centraler Richtung wirksam, dann wirkt auf Entfernung des Moleküls c_1 von dem c , vorausgesetzt, dass letzteres durch eine gleiche Kraft festgehalten wird, die Horizontalkraft $s_m \sin \alpha$ und da $\alpha = 30^\circ$ ist also $\frac{1}{2}s_m$. Verhindert ist dagegen die Entfernung beider von einander durch s_m . Es findet also kein labiles Gleichgewicht statt, sondern c und c_1 werden bei alleiniger Wirksamkeit der gegenseitigen Molekular-Attraktion durch eine doppelt so grosse Kraft zusammengehalten als auseinandergepresst. Ohne Einwirkung einer äussern Kraft ist also eine Molekular-Bewegung nicht möglich, sondern die untere Lage wird an der Fläche mn festgehalten. Denkt man sich aber die letztere fort und an deren Stelle ein viertes Molekül c_3 mit c_2 correspondirend wirksam, so verdoppelt sich die Horizontalkraft $\frac{1}{2}s_m$ auf s_m , und es findet also bei dieser Lagerung in einer Axen-Richtung labiles Gleichgewicht statt, während die Gleichgewichts-Verhältnisse in den übrigen beiden Axen-Richtungen die Starrheit des Eises bedingen.

§ 15.

Ziehen wir nun den Gleichgewichts-Zustand zwischen 4 Molekülen entsprechend der Lage Figur 7 § 3 in Betracht, wie sie dort beim Ruhezustande des Wassers ohne Einwirkung äusserer Kräfte vorausgesetzt worden.

Fig. 46.
Obere Ansicht.

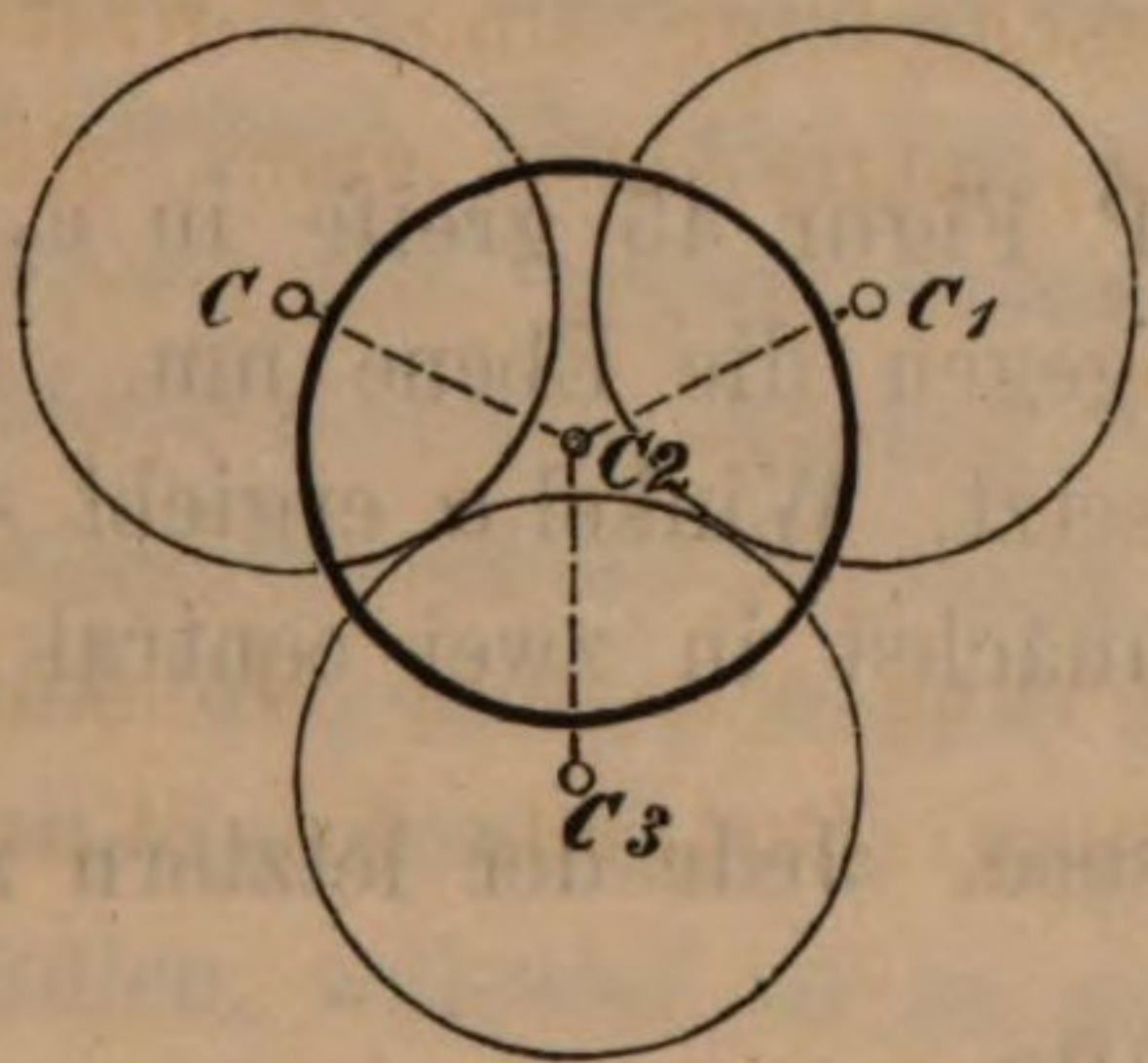
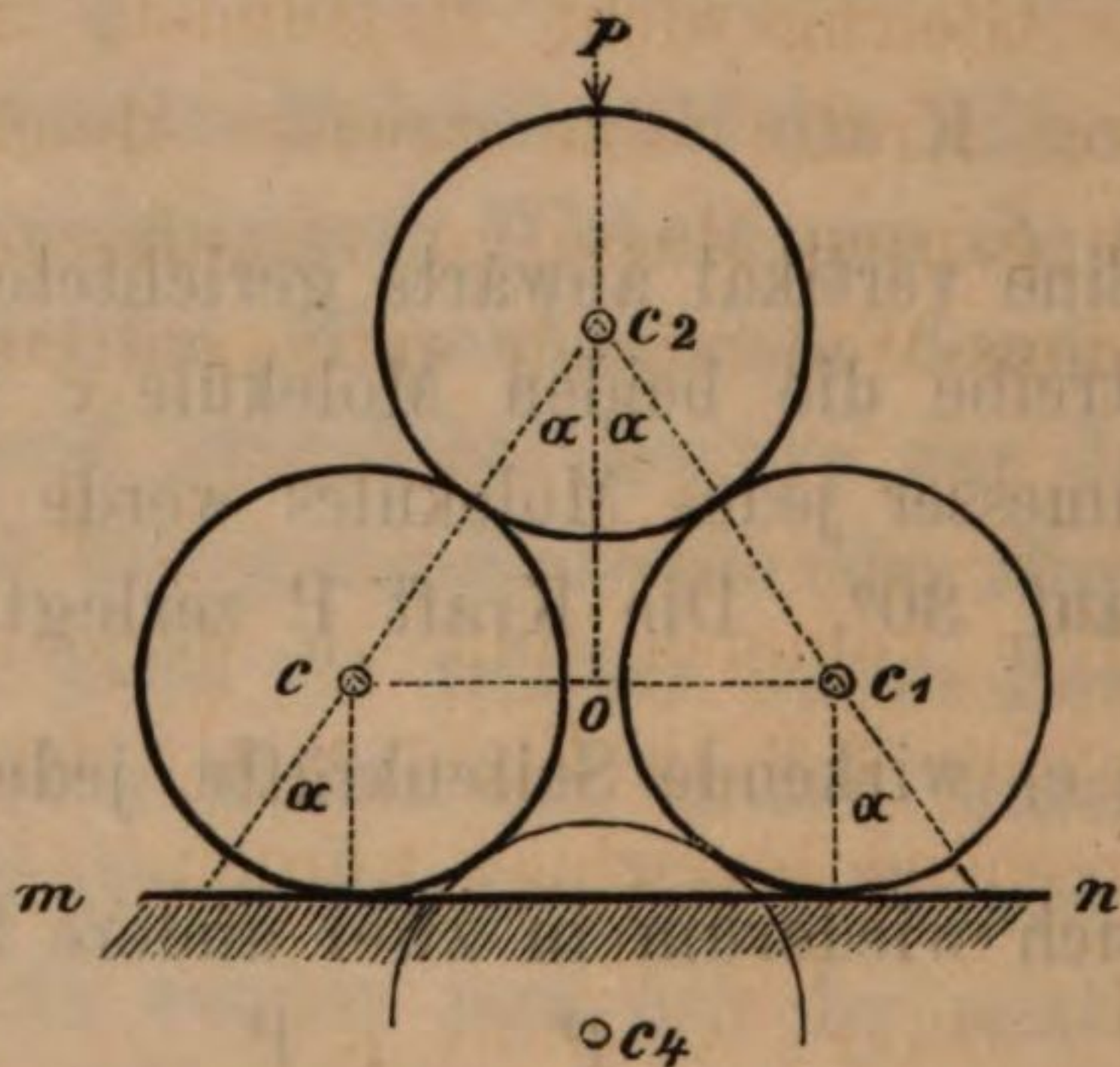


Fig. 47.
Vertikalschnitt nach cc_2c_1 .



Die Kraft P zerlegt sich hier in drei Seitenkräfte, jede $= \frac{P}{3} \sec \alpha$, und diese wiederum in je eine Vertikalkraft $\frac{P}{3}$ und eine Horizontalkraft $\frac{P}{3} \tan \alpha$. Nun berechnet sich $c0 = c_10$ in Figur 47 $= c_2c = c_2c_1$ in Figur 46 $= \frac{2}{3}$ der Transversale eines gleichseitigen Dreieckes von der Seite $= 1$

auf $\sqrt{\frac{1}{3}}$, also c_2O auf $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ferner $\sqrt{\frac{2}{3}} \tan \alpha$ auf $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\tan \alpha$ auf $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Der Vertikaldruck auf jedes der drei untern Moleküle ergibt sich hier also auf $\frac{P}{3}$, der Horizontalschub auf $\frac{P}{3} \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Auch dies Ergebniss entspricht nicht der Bedingung gleichmässiger Uebertragung äussern Druckes nach allen Richtungen. Es kann also auch diese Lage nicht, wie wir im § 3 noch vorauszusetzen berechtigt waren, jedem Ruhezustande des Wassers entsprechen, sondern nur demjenigen ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Sie kann also nur an der Oberfläche der Flüssigkeiten statthaben, und daselbst die eigenthümliche Erscheinung hervorbringen, welche wir mit „Spannung der Oberfläche“ zu bezeichnen gewohnt sind, aber nicht in den untern dem hydrostatischen Drucke unterworfenen Schichten.

Denken wir uns auch hier P fort und nur s_m zwischen je zwei Molekülen wirksam, so wird c_1 in der Richtung Oc_1 Figur 47 mit der Seitenkraft $s_m \sin \alpha = s_m \sqrt{\frac{1}{3}}$, also in der Richtung cc_1 Figur 46 mit der Seitenkraft $\frac{1}{2}s_m \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \cos 30^\circ = s_m \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}s_m$ von c fortgedrückt, während es mit der Attraktion s_m festgehalten wird. Mithin findet auch hier in der Berührungs-Schicht an der Fläche mn Unbeweglichkeit statt, während ein 5tes Molekül c_4 , die Abschiebungs-Kraft $\frac{1}{2}s_m$ verdoppelt und das labile Gleichgewicht herstellt. Aus der Berechnung § 14 folgt ausserdem, dass bei dieser Lage auch in den übrigen Axen-Richtungen labiles Gleichgewicht stattfindet, und dass die geringste Einwirkung äusserer Kräfte eine gewisse Molekular-Verschiebung und Abwälzung in der ganzen Masse zu veranlassen vermag, ohne dass einer solchen Cohäsions-Widerstände entgegenzutreten.

§ 16.

Wir kommen nun zu derjenigen Lagerung von fünf Molekülen, welche im § 3 in Figur 8 als dem Bewegungs-Zustande des Wassers entsprechend bezeichnet worden.

Fig. 48.
Obere Ansicht.

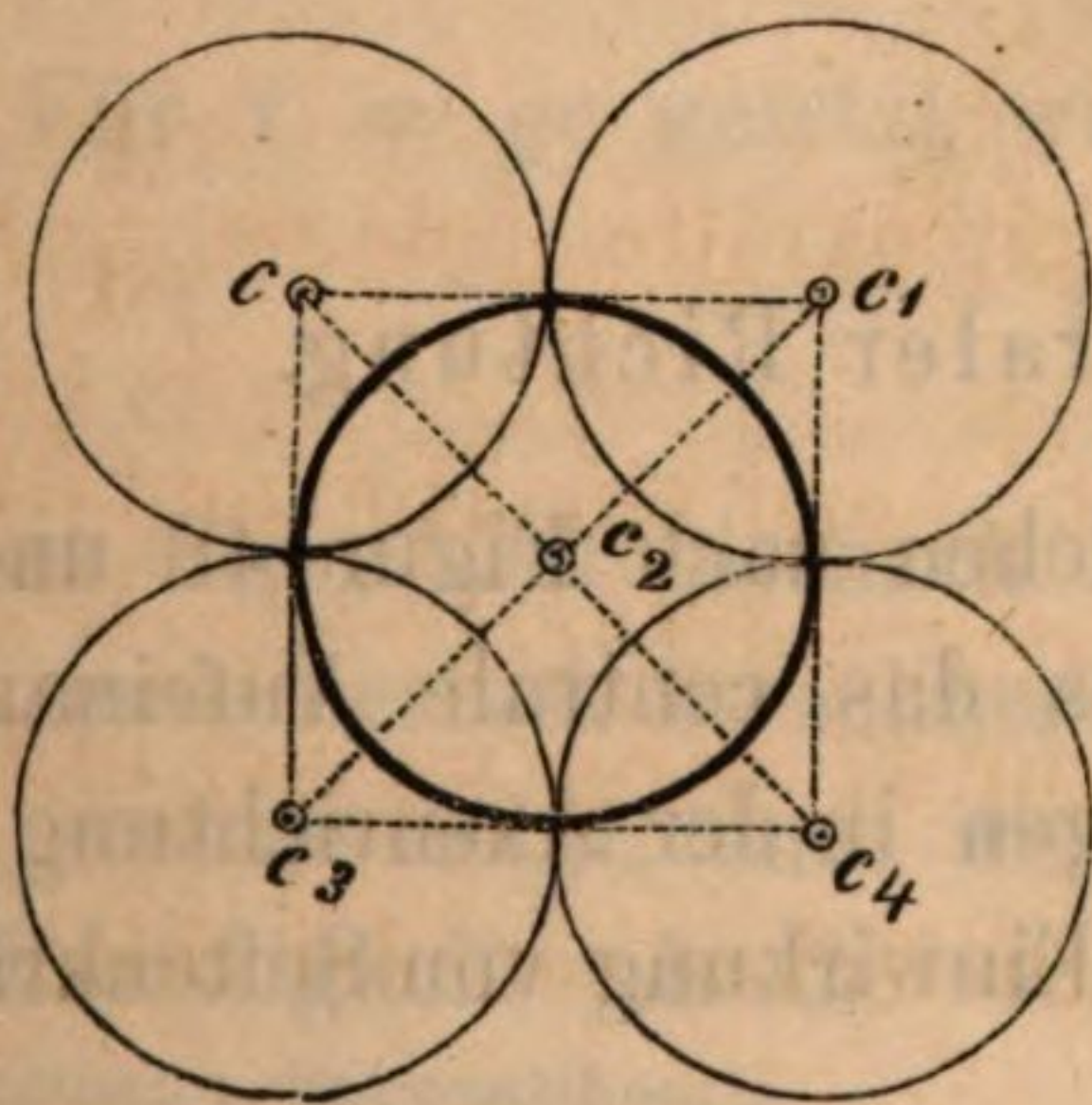
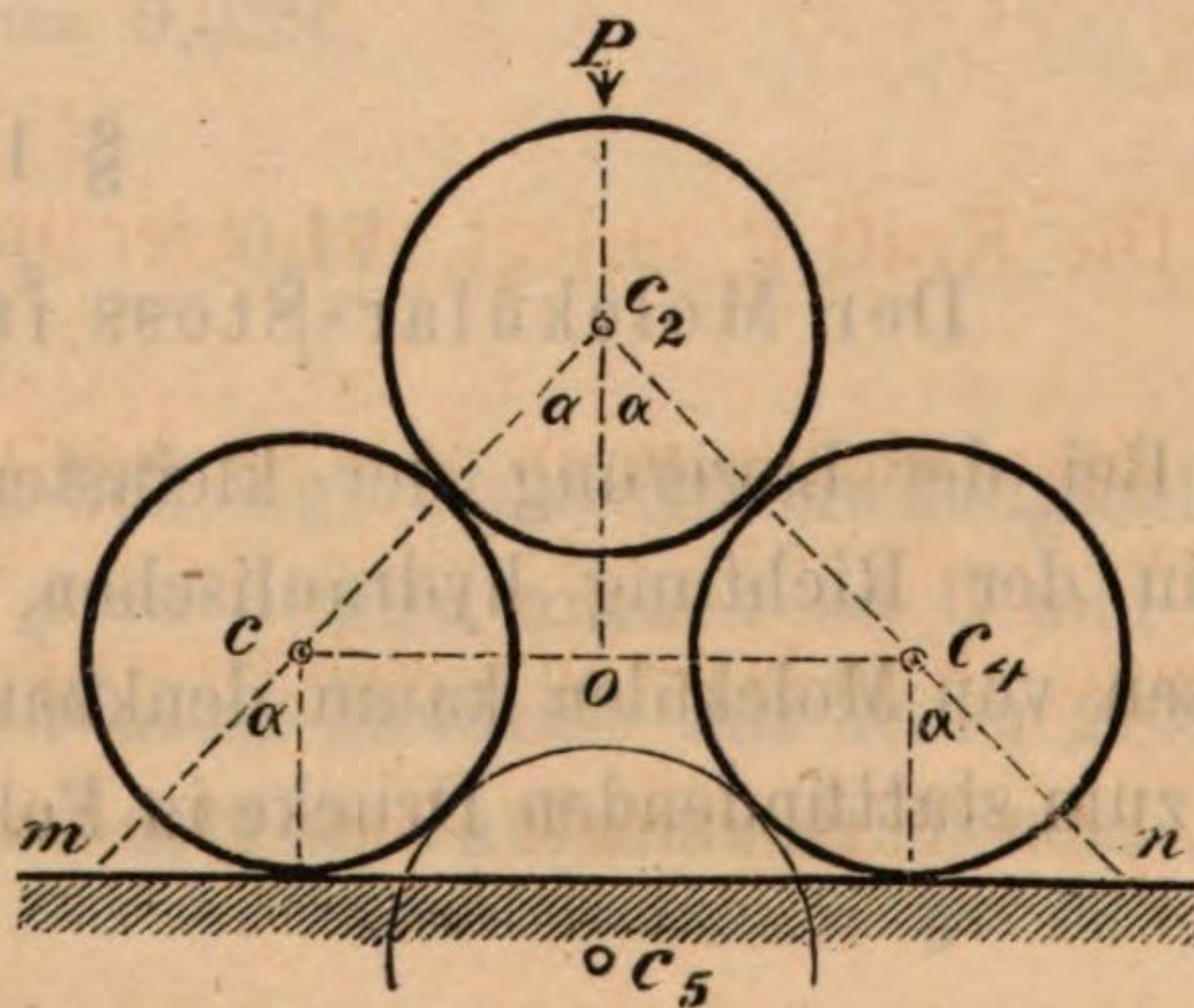


Fig. 49.
Vertikalschnitt nach cc_2c_4 .



Hier wird der Winkel $\alpha = 45^\circ$, also der Vertikaldruck für jedes der vier Moleküle $c_1 c_3 c_4 = \frac{1}{4}P$, und der Horizontalschub $= \frac{1}{4}P \tan \alpha$ wird gleich dem Vertikaldruck $\frac{1}{4}P$, weil $\tan \alpha = 1$ ist. In dieser Lage wird also die Bedingung gleichmässiger Druck-Uebertragung erfüllt. Sie entspricht nicht nur der Einwirkung einseitigen hydraulischen Druckes, sondern auch dem Zustande der Ruhe unter hydrostatischem Drucke. Bei alleiniger Einwirkung der gegenseitigen Attraktions m ergibt sich aus Figur 49 der Horizontalschub c_4 auf in der Richtung $0c_4 = s_m \sin \alpha = s_m \sqrt{\frac{1}{2}}$ und aus Figur 48 in der Richtung $c_3 c_4 = s_m \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}s_m$. Das Molekül c_5 , welches denselben verdoppelt, stellt mithin auch hier das labile Gleichgewicht her. Dass der Uebergang aus der im § 15 untersuchten Lage in die Figur 48 und 49 dargestellte vermöge der geringsten Einwirkung äusserer Kräfte, also beim geringsten hydrostatischen Drucke ebenfalls ohne Cohäsions-Widerstände und ohne Volumen-Aenderung erfolgen kann, ist bereits § 3 nachgewiesen.

§ 17.

Aus den Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen ergibt sich, mit wie geringem Kraft-Aufwande die eigenthümliche Molekular-Lagerung des Wassers ein gegenseitiges Durchdringen der einzelnen Schichten im Zustande der Bewegung gestattet, und dass also nur ein sehr geringer Theil der lebendigen Kraft dadurch vernichtet wird. Nur das Verschieben ganzer Schichten gegen einander nimmt erheblichere Kraft-Verluste in Anspruch. Hierdurch erklärt sich der geringe Verlust von etwa nur 3 bis 4%, welchen die effektive Arbeitsgeschwindigkeit beim Ausfluss durch Oeffnungen in dünner Wand gegen die theoretische Geschwindigkeit des freien Falles ergibt. Die von Hagen (Vergl. Erbkams Zeitschrift für Bauw. Jahrg. IV S. 363) gefundene Thatsache, dass die Temperatur, welche doch sehr wesentlich die Cohäsion ändert, zwar einen sehr merklichen Einfluss auf die Bewegung in Rohrleitungen, aber keinen wahrnehmbaren auf den Ausfluss aus Gefässen äussert, kann desshalb nur so lange auffallend erscheinen, als man irrthümlicher Weise in der Contraktion die Aeusserung eines Widerstandes vermuthet.

§ 18.

Der Molekular-Stoss in centraler Richtung.

Bei der Lagerung der kleinsten Theilchen nach Figur 48 und 49 ist in der Richtung hydraulischen Druckes das centrale Aufeinanderstossen von Molekülen kaum denkbar, dagegen in der Axenrichtung normal zum stattfindenden Drucke in Folge der Einwirkung von Seitenkräften

wohl möglich, wenn auch nur in seltenen Fällen wahrscheinlich, wo die einschliessenden Wände oder die Massen-Trägheit eine ausweichende Bewegung verhindern. Angenommen, es stossen zwei Molekül-Ketten, jede aus n Einheiten vom Gewichte nq mit der Geschwindigkeit c central aufeinander. Bei vollkommener Elasticität wird jede Kette eine gewisse Verkürzung x erleiden, und während sie den Weg x bis zum Punkte der stärksten Zusammendrückung zurücklegt, wird ihre Geschwindigkeit c durch einen Widerstand e vollkommen vernichtet, jedoch durch den elastischen Rückprall auf dem umgekehrten Wege x ohne Verlust wieder gewonnen, so dass, wenn bei Zurücklegung des letztern Weges die Attraktion s_m nicht hinderlich wäre, beide Ketten mit der ursprünglichen Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung zurückgehen müssten. Nimmt man nun an, und innerhalb gewisser Grenzen ohne Zweifel mit einigem Rechte, dass auf gleichen Wegen die zur Annäherung der Aether-Hüllen erforderlichen Kräfte gleich denen zur Entfernung derselben von einander sind, so können wir nahezu das Produkt aus Weg und Kraft zur Ueberwindung der Cohäsion $s_m \cdot x$ gleich dem Produkt ex , welches die Arbeit der Zusammenpressung ausdrückt, setzen. Mag nun das Zurückgehen der beiden Molekül-Ketten mit der durch die Cohäsion verminderten Geschwindigkeit v erfolgen, so haben wir die Arbeitsgleichung

$$1) \quad ex = s_m x = \frac{nq}{2g}(c^2 - v^2) \quad \text{und} \quad 2) \quad \frac{s_m x}{q} = \frac{n}{2g}(c^2 - v^2).$$

Nehmen wir auch an, die Aether-Hüllen, welche in § 3 annähernd auf 0,05 oder $\frac{1}{20}$ des Dynamiden-Durchmessers berechnet sind, seien während des Stosses einseitig bis auf Null verdichtet worden, so ergibt sich x für die ganze Molekül-Kette auf $\frac{n}{N} \cdot \frac{1}{20}$ in pr. Fussen, während sich $\frac{s_m}{q}$ aus

Gleichung 5 § 13 auf $\frac{0,03767n}{\sqrt[3]{\gamma}}$ ergab. Führt man diese Werthe in Gleichung 2 ein, so erhält man

$$\frac{0,03767}{20 \sqrt[3]{\gamma}} = \frac{(c^2 - v^2)}{2g}$$

und für $2g = 62,5$ und $\gamma = 61,74$ gesetzt

$$c^2 - v^2 = 0,029'.$$

Für $v = \varrho c$ gesetzt wird

$$\sqrt{1 - \varrho^2} = \frac{0,17}{c}$$

und es liesse sich hiernach für jede beliebige Stoss-Geschwindigkeit der Cohäsions-Verlust berechnen. Für $\varrho = 0$ wird auch $v = 0$ und $c = 0,17$, woraus folgt, dass wenn zwei Wasser-Moleküle mit keiner grössern Geschwindigkeit als $2c = 0,34 = 0,11$ m. aufeinanderstossen, kein

Abprallen stattfinden kann, sondern die gesammte Arbeit des Stosses durch den Cohäsions-Widerstand s_m vernichtet wird.

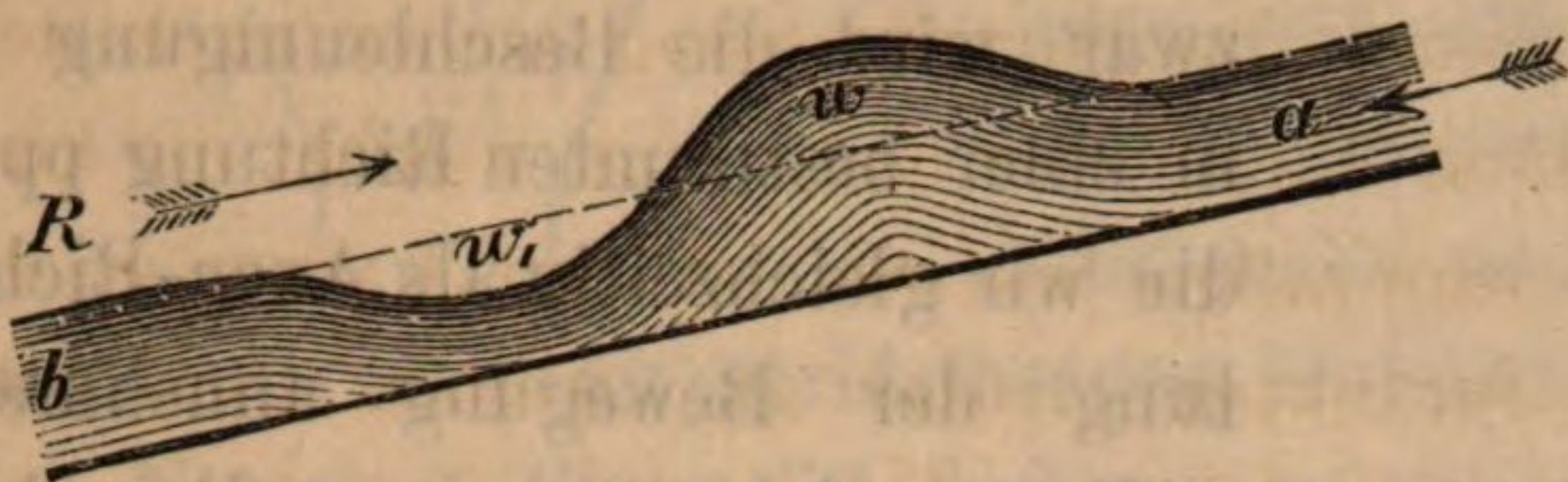
Bei wiederholtem Centralstosse einzelner Wassertheilchen auf einander wird also die gesammte lebendige Kraft lediglich durch den Cohäsions-Widerstand aufgezehrt. Ganz anders gestaltet sich dies Verhältniss, wenn Massen in gleicher Richtung auf einanderstossen, oder das Bewegungs-Moment der einen das der andern so überwiegt, dass nach der Theorie des elastischen Stosses, die Fortbewegung beider nach dem Stosse in einer Richtung erfolgen kann. Die Kraft mit welcher die kleinere Masse von der grössern abzapfallen bestrebt ist, wirkt vermöge der Cohäsion mit ihrer uneingeschränkten Grösse auf weitere Beschleunigung der letztern in derselben Richtung. Es geht folglich keine Arbeit hierbei verloren, sondern sie wird nach einer Richtung hin vereinigt und unverkürzt übertragen, obschon die arbeitenden Kräfte sich ursprünglich entgegengesetzt waren. Dies ist eins der charakteristischen Momente, in welchen die Theorie des Stosses tropfbarer Flüssigkeiten von der fester Körper wesentlich abweicht.

§ 19.

Beim Stosse im unbegrenzten Raume können, wie wir bereits § 18 gesehen haben, nur wenige Moleküle central, die meisten nur zwischen drei oder vier andere hindurchstossen. Dieser Stoss muss sich nothwendig der ganzen elastischen Aether-Hülle derselben mittheilen, und somit erfolgt die Arbeits-Uebertragung nicht nach einer Richtung hin ausschliesslich, sondern nach allen Richtungen gleichzeitig. Sie kehrt dagegen in ihre ursprüngliche zurück, und abermals hin und zurück, wenn das Wasser ringsum von festen Wänden eingeschlossen ist, deren Materie der vollkommenen Elasticität der Aether-Hüllen gegenüber ohne Fehler als vollkommen hart und unelastisch betrachtet werden kann. Durch die Form dieser einschliessenden Wandungen kann man der Arbeit des Wassers jede beliebige Richtung geben, und die vorhergegangenen Untersuchungen genügen zu der Erkenntniss, dass in keinem Falle eigentliche Stoss-Verluste, sondern nur Cohäsions-Widerstände die Arbeit beeinträchtigen oder gänzlich vernichten können. Die auch von dem Verfasser bestätigte Beobachtung von Bidone, wonach innere Ansatz-Röhren mit unendlich kleiner Wanddicke nicht grössere, sondern im Gegentheil kleinere Ausfluss-Coefficienten ergeben, als solche mit erheblichen Wanddicken, welche dem ausfliessenden Wasserstrahle eine Stossfläche entgegenstellen, giebt hierzu einen weitem unumstösslichen Beleg. Nur virtuelle Kräfte und Geschwindigkeiten können für die Bewegung in einer bestimmten Richtung verloren gehen. Wenn man nämlich die Bewegung in einer solchen nutzbar machen will, so ist die-

jenige Arbeit dafür als verloren zu betrachten, welche von den einschliessenden Wänden schliesslich nicht in dieser Richtung wieder gegeben wird. Erläutern wir dies durch ein Beispiel. Ein Körper erlangt bekanntlich beim Herabgleiten von einer schiefen Ebene dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er deren Höhe frei herabgefallen wäre.

Fig. 50.



Angenommen, es wirke der in einem Kanalbette von a nach b Figur 50 fließenden Wassermasse plötzlich die Kraft R entgegen, und hätte die Fluthwelle W aufgestaut. Die Kraft R höre

zu wirken auf und W vertheile sich wieder. Während der Vertheilung giebt sie den Druck, welchen sie nach a ausübt nach b wieder. Es ist also die Arbeit des Wassers von a nach b in Folge der Aufstauung lediglich durch die der entgegengesetzten Kraft R entsprechende Arbeit gekürzt worden. Ist die Fluthwelle W jedoch durch ersparte Arbeit bei b erzeugt, und etwa aus W₁ herausgedrückt worden, so wird die gesammte W₁ entlehene Arbeit beim Niedersinken von W wieder zurückgegeben, und es hat nur eine momentane Aufsammlung aber kein Verlust stattgefunden.

Aus den vorhergehenden Paragraphen wird ferner ersichtlich, wie die durch den Cohäsions-Widerstand verzehrte Arbeit wachsen kann, je nachdem sich mehr oder weniger centrale Stoss-Momente den kleinern Wasserkörpern und schliesslich den einzelnen Molekülen mittheilen, und wie rasch die lebendige Kraft durch den Stoss gegen eine von allen Seiten durch Wandungen begrenzte Masse vernichtet werden kann, wenn die wirbelnde Bewegung sich auch den kleinsten Theilchen mittheilt. Dass die einschliessenden Wandungen, ohne einen Fehler zu begehen, als unelastisch angenommen werden können, ist bereits erwähnt. In fast allen Fällen bleibt dies jedoch ohne Einfluss, indem die Stoss-Bewegung in den daran haftenden Netz-Schichten verläuft. Desshalb beobachten wir ein Zurückprallen auch nur beim ersten Aufstosse isolirter Strahlen gegen unbenetzte Flächen.

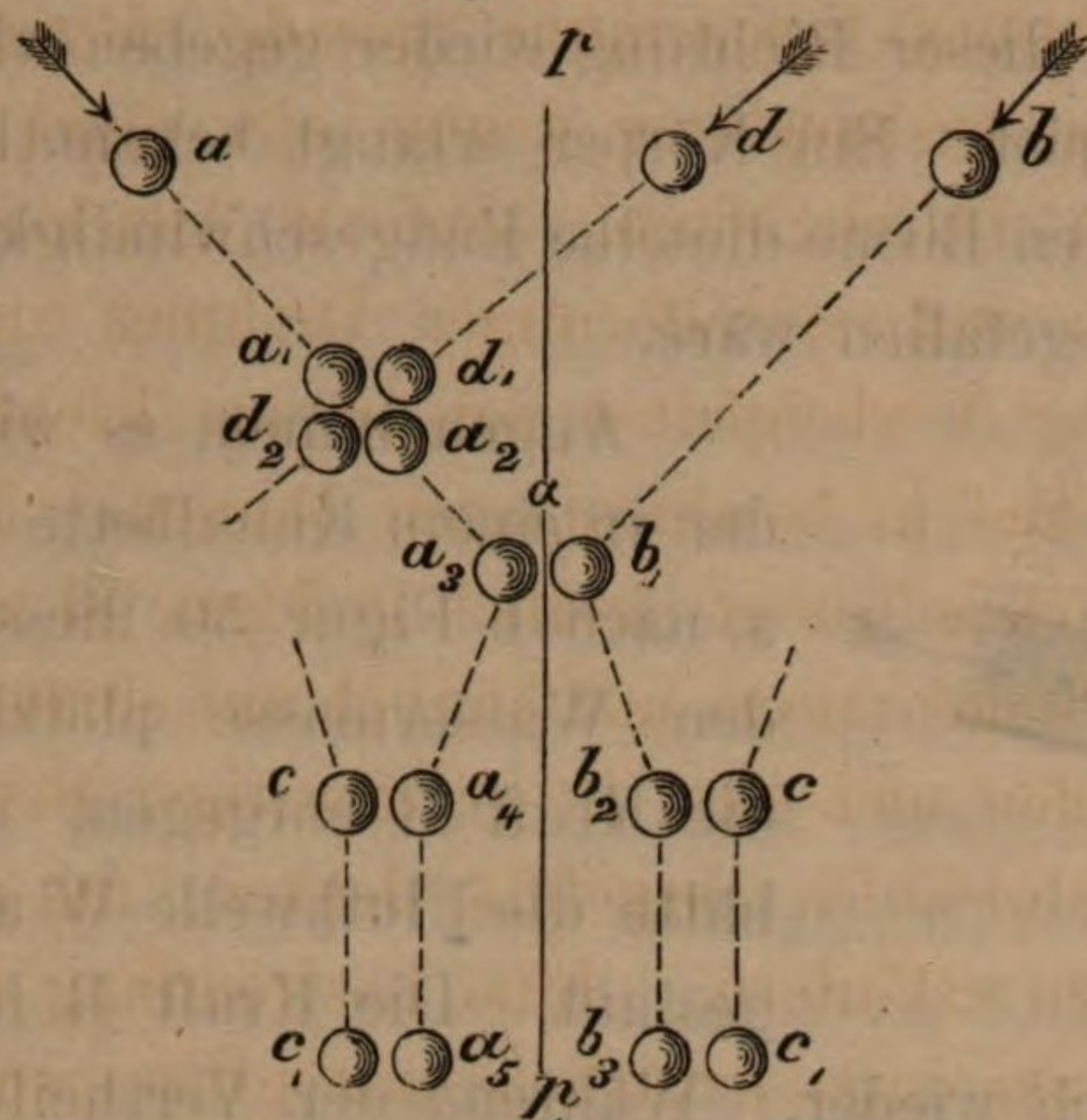
§ 20.

Der schiefe Molekular-Stoss.

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns auch die Verhältnisse beim schiefen Molekular-Stoss durch einige erläuternde Betrachtungen zur klaren Vorstellung bringen.

Wir müssen dabei unterscheiden, ob die beiden Moleküle a und b Figur 51, welche in der Richtung aa₃ und bb₁ bei a₃b₁ unter dem

Fig. 51.



Winkel α zusammenstossen mögen, sich mit gleichförmiger oder beschleunigter Geschwindigkeit bewegen. Beim Ausflusse aus Gefässen wird das letztere nicht nur vor, sondern auch nach dem Zusammentreffen bei a_3b_1 der Fall sein, und zwar wird die Beschleunigung p in einer bestimmten Richtung pp_1 , die wir gleichzeitig als Axen-Richtung der Bewegung annehmen wollen, wirksam sein. Bei der Bewegung in Rohrleitungen und

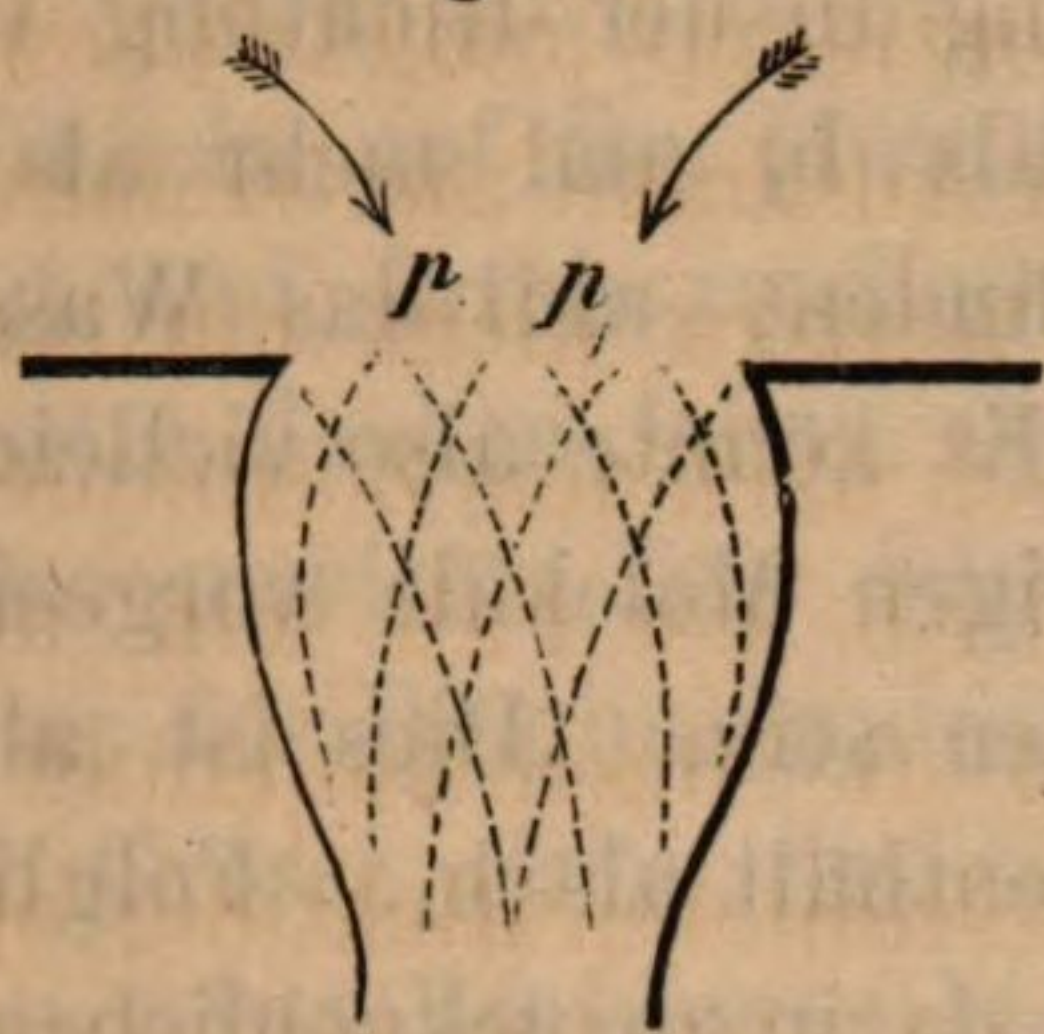
Flussbetten, bei frei in horizontaler Richtung austretenden Wasserstrahlen kann zwar wohl das Zusammentreffen bei a_3b_1 , nicht aber die Fortsetzung mit gleichförmiger, sondern ebenfalls nur mit beschleunigter Bewegung statthaben, weil allemal durch den Zusammenstoss eine stetig wirksam bleibende Pressung aus der ankommenden Bewegung aufgesammelt und auf die fortgehende, welche dadurch zu einer beschleunigten werden muss, übertragen wird. Das Vorhandensein dieser Pressung äusserst sich in einer Aufstauung stromaufwärts, die Beschleunigung in einer sehr wahrnehmbaren Verringerung des Querschnittes stromabwärts, welche wir in Rohrleitungen bei Knien und Zweigröhren durch die Piezometerstände beobachten können, und deren Erscheinung auch identisch mit der Kontraktion beim Ausflusse aus Gefässen ist.

b_1 wird also mit dem einmaligen seiner Stossgeschwindigkeit entsprechenden und von a_3 wieder erhaltenen elastischen Impulse unter dem Aufprall-Winkel $\frac{\alpha}{2}$ seine Weiterbewegung beginnen, während derselben aber durch die Beschleunigung p nach b_2 hin der Axenrichtung zugelenkt werden, hier vielleicht mit dem bereits in gleicher Weise abgelenkten c zusammentreffen, und sehr bald nach dem zweiten oder dritten ähnlichen Zusammentreffen seine Bewegung in paralleler Richtung mit pp_1 fortsetzen. Ebenso wahrscheinlich ist jedoch, zumal wenn Winkel α nahezu 90° ist, ein Zusammentreffen, wie dasselbe die Gruppe $a_1a_2d_1d_2$ darstellt, wobei d_1 sich zwischen a_1 und a_2 durchschiebt und nach d_2 gelangt.

Will man sich überzeugen, wie beide Arten dieser Molekular-Bewegung wirklich statthaben, so beobachte man die Breitseite eines durch eine rektanguläre Oeffnung von etwa 20 mm. Breite und 3 mm. Dicke aus der dünnen Bodenwand eines Gefässes ausfliessenden Wasserstrahles. Gegen das Licht gesehen erscheint uns derselbe etwa wie

in Figur 52 gezeichnet. Die sich durchkreuzenden Streifen und die der

Fig. 52.



Contraktions-Erscheinung gerade entgegengesetzte Ausbauchung deuten hier nicht nur auf ein Durchgleiten, sondern gleichzeitig auf ein mit spiralförmiger Drehung stattfindendes Vorbeigleiten der in den Richtungen p und p_1 beschleunigten Massen. Man muss sich selbstverständlich in Figur 51 auch alle Zwischenräume mit ähnlich auf einanderstossenden und stets in gegenseitiger Berührung mit einander verbleibenden Molekülen ausgefüllt denken, um sich den Vorgang Figur 52 dadurch zu erläutern. Eine Lostrennung einzelner Moleküle von einander muss dann natürlich unmöglich erscheinen, und es kann nur ein Uebertreten solcher aus einem Faden in den andern, wobei niemals die Cohäsion gänzlich aufgehoben wird, sondern nur geringe Impulse derselben als Widerstände zu überwinden sind, gedacht werden.

§ 21.

Verzögerte und beschleunigte Bewegung.

Das Product aus Querschnitt a und Ausfluss-Geschwindigkeit $v = av$, drückt, wie dies keines nähern Beweises bedarf, das während jeder Zeiteinheit durch den Querschnitt a hindurchfliessende Wasserquantum Q aus. Dasselbe entspricht einem Prisma von der Grundfläche a und der Länge v . Die unangreifbarste Grundbedingung für die Untersuchung aller hydraulischen Vorgänge ist also

$$1) Q = av.$$

Es folgt daraus, dass wenn Q constant bleiben soll, eine verzögerte oder beschleunigte Bewegung des Wassers ohne Querschnitts-Änderung unmöglich ist.

Fig. 53.

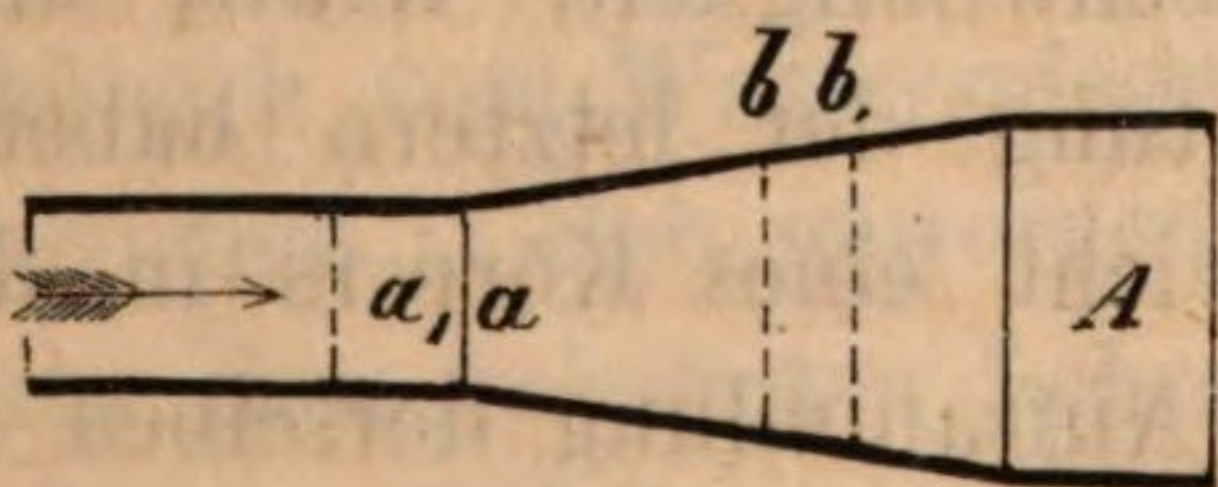
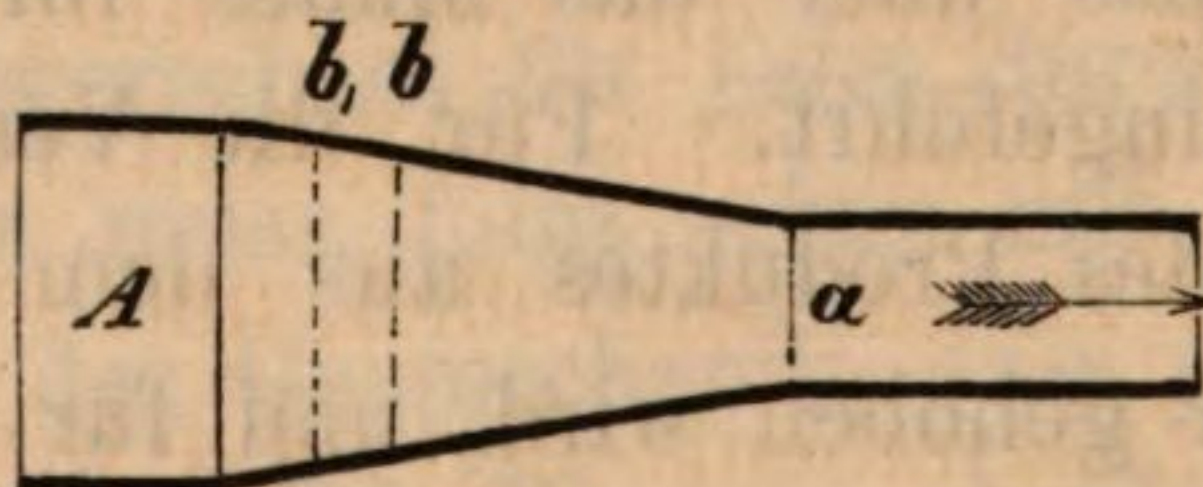


Fig. 54.



Figur 53 stelle den Fall einer verzögerten Bewegung dar, bei der das Wasser in der Richtung von a nach A beispielsweise durch eine Rohrleitung mit zunehmendem Querschnitt fliesst. Man denke sich in jedem Momente und in jedem der Querschnitte abb_1A eine Molekül-Schicht vorhanden. Da die Schicht b mehr enthalten muss als a und weniger als b_1 , so kann b_1 keine Moleküle an b abgegeben haben, sondern b muss solche von a erhalten haben. Es können also keine zurückgetreten,

sondern ein Theil von a muss nach vorwärts in die Schicht b übergetreten und aus a_1 wieder ersetzt werden sein.

Figur 54 stelle die beschleunigte Bewegung in der Richtung von A nach a dar. b enthält weniger Moleküle als b_1 und mehr als a. Ein Zurücktreten aus a in b kann nicht stattfinden, weil das Wasser in a sich schneller vorwärts bewegt als in b. Es könnte also vielleicht ein Theil aus b_1 der Geschwindigkeit der übrigen Moleküle vorgeeilt, aus b_1 herausgestossen und in b hineingetrieben sein. Dies ist aber wieder darum nicht möglich, weil b weniger enthält als b_1 . Folglich müssen durch die aus b_1 herausgestossenen und darin zurückgebliebenen Moleküle neue Schichten gebildet und zwischen die ursprünglichen getreten sein. Auf keine andere Weise lässt sich der Vorgang rationell erklären. Diese Bildung von Zwischenschichten geht in dem Maasse vor sich, als die vordern Schichten sich schneller bewegen wie die hintern.

Bei der verzögerten Bewegung treten also einzelne Wassertheilchen aus den hintern Schichten in die vordern über, und es werden mehrere Schichten zu einer compensirt, bei der beschleunigten Bewegung bleiben solche zurück und bilden neue Zwischenschichten.

§ 22.

Ausfluss-Geschwindigkeit und Arbeits-Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers.

Figur 52 in § 19 bietet uns einen Anknüpfungspunkt, den wir nicht unbeachtet lassen dürfen, um uns über das Wesen der virtuellen Geschwindigkeit bei der Bewegung des Wassers vollkommen klar zu werden. Die Grundbedingung für jede Rechnung, welche ein allgemein gültiges Resultat ergeben soll, ist die Verständigung über ein gemeinschaftliches Maass, mit dem alle gleichartigen Rechnungsgrössen gemessen werden. Desshalb werden wir in die Geomechanik mit einem Compromiss über das Maass für Geschwindigkeit, Kraft, Masse und Arbeit eingeführt. Für die Verrichtung der letztern haben wir die Einheit des Produktes aus dem Gewicht eines Körpers in die Höhe, welche er gehoben wird, und für die Aufsammlung derselben Arbeit in diejenige, welche er frei herabfällt, allgemein gültig angenommen. Durch die Beziehung $c^2 = 2gh$, wodurch sich die von einem Körper beim freien Falle im luftleeren Raume vom Ruhezustande bis zur Fallhöhe h erlangte Endgeschwindigkeit ausdrückt, sind wir in Stand gesetzt, für die Hub- resp. Fallhöhe h den Werth $\frac{c^2}{2g}$ in Rechnung zu bringen und die mechanische Arbeit A durch $\frac{Q\gamma \cdot c^2}{2g}$ zu messen, worin

Q den körperlichen Inhalt, und γ das Gewicht der Raumeinheit des bewegten Körpers ausdrückt.

Wird ein Körper gleichzeitig durch mehrere unter verschiedenen Winkeln auf ihn einwirkende Kräfte beschleunigt, welche man sich zerlegt und durch zwei unter einem rechten Winkel wirkende Mittelkräfte ersetzt denken kann, so vermag man selbstverständlich aus seiner nach einer gewissen Zeit erlangten absoluten Endgeschwindigkeit in der Richtung der Diagonale des Kräfte-Rechtecks keinen zutreffenden Schluss auf die Grösse einer der beiden wirksam gewesenen Seitenkräfte zu ziehen. Um seine Beziehung hierzu festzustellen, muss man entweder seine virtuelle Geschwindigkeit in der Richtung der betr. Kraft, oder seinen virtuellen Weg normal auf die Richtung der andern Kraft in Rechnung stellen, und in jedem solchen Falle zwischen seiner virtuellen und absoluten Geschwindigkeit scharf unterscheiden.

Das Wasser oder vielmehr eine gewisse Anzahl von Wasser-Molekülen werde durch die Oeffnung a in der dünnen Bodenwand eines Gefässes durch die stetig wirksam bleibende Kraft der eigenen Schwere hinausgetrieben. Der Wasserstand in dem Gefässe behalte während dieses Vorganges die stetige Höhe h über der Oeffnung und befinde sich dabei in vollkommener Ruhe. Damit diese Voraussetzung ohne störende Einwirkung erfüllt werden kann, muss der Horizontalschnitt durch das Gefäss unendlich gross im Vergleich zur Oeffnung a gedacht werden. Wollen wir nun bei diesem Vorgange die Beziehungen zwischen Kraft, Beschleunigung, Endgeschwindigkeit, Masse und Arbeit auffinden, so dürfen wir nach dem Vorstehenden zunächst nicht die absolute Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers in der Figur 52 durch punktirte Linien angedeuteten Richtung, sondern nur seine virtuelle Geschwindigkeit in der Richtung der wirksamen Schwerkraft und normal auf die Oeffnung in Betracht ziehen. Die erstere wollen wir fortan mit Arbeits-, die letztere mit Ausfluss-Geschwindigkeit bezeichnen. Dass die erstere, wenn man von allen Widerständen absieht, in dem Querschnitte a nach der Fallhöhe h vom Wasserspiegel abgerechnet für jedes durchfliessende Wassertheilchen $\sqrt{2gh}$ geworden sein muss, folgt schon mit Nothwendigkeit aus dem bekannten Lehrsatz der Geomechanik, dass auch jeder Körper, dessen Fall-Bewegung durch schiefe Ebenen abgelenkt wird, dieselbe Endgeschwindigkeit erlangt, als wenn er deren Höhe frei herabgefallen wäre. Nun bleiben die einzelnen Wassertheilchen, nachdem sie den Querschnitt a passirt haben, noch fernerhin der Schwerkraft unterworfen, und ihre Geschwindigkeit beschleunigt sich daher, je weiter sie sich ausserhalb des Gefässes von a entfernen, was man aus einer sichtlichen Verdünnung des Strahles erkennen kann. Um also zu correkten Beziehungen zu gelangen, dürfen wir die Geschwindigkeit nur ganz

scharf in dem der Fallhöhe h entsprechenden Stadium, also in der Ebene der Oeffnung a , aber nicht etwa in einer gewissen Entfernung darunter in Betracht ziehen.

Hätte das Wasser keine Cohäsion, so würde die Beschleunigung der ausgetretenen Theilchen unterhalb der Oeffnung a gar keinen Einfluss auf die Bewegung oberhalb derselben auszuüben vermögen, und man hätte die gesammte den Ausfluss bewirkende Kraft nur innerhalb des Gefässes zwischen a und dem Wasserspiegel zu suchen. Nun bleiben aber die ausgeflossenen Wassertheilchen mit ihrer Cohäsion an den ausfliessenden hängen, und üben daher ausser der Druckkraft, welche eine Funktion der Wasserstands-Höhe h ist, noch einen stetigen Zug aus, welcher der Wasserstands-Höhe $\frac{s}{\gamma}$ (vergl. § 13) entspricht, und die gesammte Höhe, aus welcher die Druckkraft herzuleiten ist, beträgt daher $h + \frac{s}{\gamma}$. Diese kleine Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,012$ pr. Fuss oder $0,0037$ M., welche bisher übersehen worden, gleicht, wie sich später ergeben wird, ganz genau die Differenzen in den Ausfluss-Coefficienten aus, welche sich bei sehr kleinen Druckhöhen gegen grössere ergeben haben. Wir wollen sie indessen der Kürze wegen bei der Rechnung mit Buchstaben fortlassen und unter der Ausflusshöhe h in Zukunft selbstverständlich die Grösse $h + \frac{s}{\gamma} = h + 0,012$ Fuss oder $h + 0,0037$ M. für Wasser von 13° R. verstehen. Nicht nur bei geschlossener, sondern auch bei aufgezogener Oeffnung und constantem Wasserspiegel sehen wir nun fortwährend einen Wassercylinder oder ein Prisma von der Grundfläche a und der Höhe h , im erstern Falle aufruhend, im zweiten schweben, und durch keine andere denkbare Kraft an der Bewegung des freien Falles durch die Oeffnung a gehindert, als durch die Cohäsion mit den umgebenden Wassertheilchen. Setzen wir die letztere $= 0$, so muss also doch die auf die Ausfluss-Arbeit stetig wirksame Kraft P gleich dem Gewicht dieses Prisma's, also $= ah\gamma$, sein. Da jedes Wassertheilchen mit der gleichen resp. mittlern Ausfluss-Geschwindigkeit c den Querschnitt a passirt, und derselbe stets gefüllt ist, muss ferner während jeder Sekunde die Wassermenge ac ausfliessen, welcher das Gewicht acy entspricht. Diese Masse befand sich, ehe sie der Einwirkung der Kraft P unterworfen wurde, ursprünglich in Ruhe, wie der Wasserspiegel im Gefässe, von dem aus sie ihre Fall-Bewegung beginnen musste, und hat also während einer Zeiteinheit durch P beschleunigt in a die End-Geschwindigkeit c erlangt. Es wird also c hier gleichzeitig End-Geschwindigkeit und Beschleunigung. Nach der geomechanischen Grundgleichung p (Beschleunigung) $= \frac{P}{G} \cdot g$, worin G das Gewicht des beschleunigten

Körpers und $g = 31,25$ pr. Fuss oder 9,81 M. die Beschleunigung des freien Falles bezeichnet, haben wir also nunmehr die Beziehung

$$p = c = \frac{ah\gamma}{ac\gamma}g, \text{ woraus sich ergibt}$$

$$1) c^2 = gh.$$

Unter $c = \sqrt{gh}$ werden wir daher im weitem Verlaufe die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit, unter $C = \sqrt{2gh}$ die theoretische Arbeits-Geschwindigkeit des bewegten Wassers verstehen, während wir mit v und V die denselben entsprechenden effektiven Geschwindigkeiten mit Berücksichtigung der Widerstände bezeichnen wollen.

§ 23.

Der § 22 bewiesene Lehrsatz spielt eine so wichtige Rolle in dem ganzen Entwicklungsgange der Hydraulik, dass es gerechtfertigt erscheint, behufs Prüfung seiner Richtigkeit, verschiedene Wege zu seiner Herleitung einzuschlagen. Denken wir uns die Oeffnung a durch einen unterlegten Schieber geschlossen, so erleidet derselbe den Druck $ah\gamma$, gleich dem Gewichte der aufruhenden Wassersäule. Denselben Druck erleidet eine Tischplatte, auf welcher ein Gewicht $ah\gamma$ von beliebigem festen Stoffe aufruhet. Denkt man sich die Cohäsion wieder fort, so unterscheidet sich der erste Fall von dem zweiten doch lediglich dadurch, dass die Wassermasse $ah\gamma$ aus einer Menge kleiner Körperchen, das Gewicht auf der Tischplatte dagegen aus einem einzigen Stücke besteht. So gut man sich das letztere ohne allen Einfluss auf die weitere Untersuchung beispielsweise aus kleinen Schrotkörnern bestehend vorstellen kann, vermag man dieselben auch unendlich klein zu denken und damit beide Fälle in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen. In ein und demselben Momente denke man sich Schieber und Tischplatte beseitigt, und die nun beginnende Fall-Bewegung durch keinen Widerstand gehindert. In beiden Fällen haben wir es mit gleichen Kräften zu thun, die stetig auf gleiche Massen wirken, und in beiden Fällen bleibt der Angriffspunkt der Kraft in seiner Lage zur Masse unverändert bei letzterer. Weder unsere praktische Naturanschauung, noch unsere theoretische Vorstellungsgabe lassen uns einen Grund dafür auffinden, warum nach einer gewissen Zeit T die von der einen Bewegung verrichtete oder aufgesammelte Arbeit grösser oder kleiner sein soll als die der anderen, denn die stetig wirkenden Kräfte sowohl, als die Massen, auf die sie in jedem Augenblicke ihre Wirkung äussern, sind in beiden Fällen gleich, wenn wir eben voraussetzen, dass nach dem Austritte aus a jedes Wassertheilchen ohne weitere Beschleunigung oder Verzögerung mit der in a erlangten Geschwindig-

keit sich weiter bewege. Dann wird nach T Sekunden unter der Oeffnung a das Wasserprisma acT vom Gewicht $acT\gamma$ die Höhe $\frac{cT}{2}$ mit seinem Schwerpunkt herabgefallen sein, während das Gewicht $ah\gamma$ die End-Geschwindigkeit gT erlangt, also die Arbeit $\frac{ah\gamma(gT)^2}{2g}$ aufgesammelt hat. Wir haben also die Gleichung

$$1) \frac{ah\gamma g T^2}{2} = \frac{ac^2 T^2 \gamma}{2} \text{ woraus folgt } c^2 = gh$$

Gehen wir noch von einer andern Vorstellung aus. Wenn wir den stetigen Ausfluss durch a im Beharrungs-Zustande beobachten, und ein solcher ist, wie der Augenschein lehrt, mindestens aus begrenzten Gefässen, fast momentan mit dem Aufziehen der Oeffnung eingetreten, so können wir nicht in Zweifel darüber bleiben, dass dabei durch die Einwirkung einer gewissen Kraft P innerhalb des Gefässes während jeder Zeiteinheit eine gewisse ursprünglich in Ruhe befindlich gewesene Wassermasse, welche gleich der ausfliessenden ist, derart beschleunigt wird, dass sie im Querschnitte a die End-Geschwindigkeit c erlangt. Da wir die Ausflusszeit gleich der Zeiteinheit angenommen haben, wird die letztere hier gleich der Beschleunigung. Die auf den Ausfluss wirkende Kraft sind wir durchaus berechtigt durch den hydrostatischen Druck $ah\gamma$ auf die Oeffnung zu messen, weil man mit dem Druck auf dieselbe auch gleichzeitig die Bewegung aufhebt, und umgekehrt dadurch, dass man ihn wieder thätig werden lässt, dieselbe Bewegung wieder erzeugt. Nach der geomechanischen Grundgleichung $P = mp$ (Kraft = Masse + Beschleunigung) haben wir also

$$2) ah\gamma = \frac{ac\gamma}{g} \cdot c \text{ und wiederum } c^2 = gh.$$

§ 24.

Contraction.

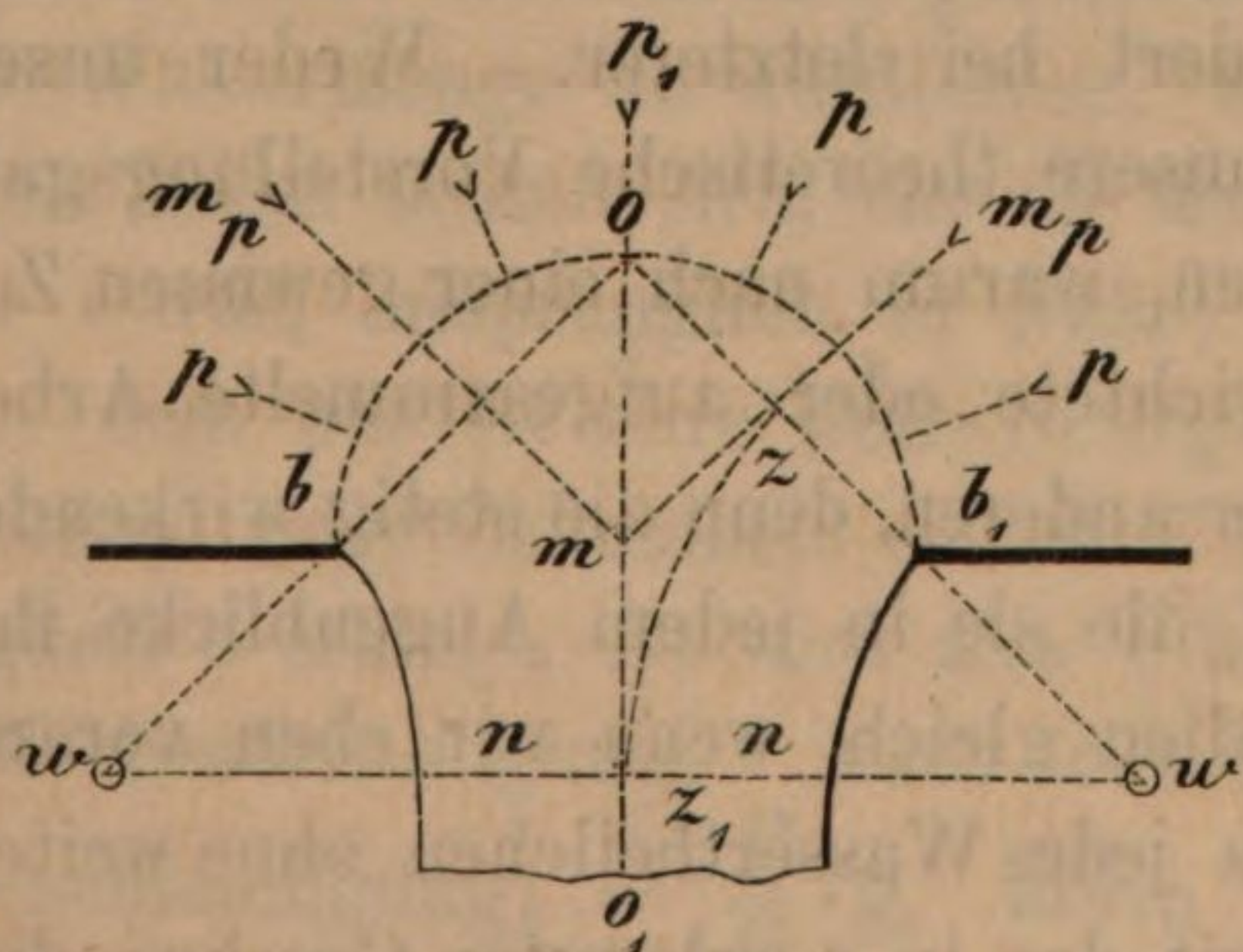
Es wird nunmehr noch von Interesse sein, die Beziehungen, in

welche bei dem Ausflusse aus der dünnen Bodenwand eines unendlich grossen Gefässes die Ausfluss-Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$ zur absoluten Arbeits-Geschwindigkeit

$C = \sqrt{2gh}$ treten muss, einer nähern Untersuchung zu unterziehen.

Wenn man in einem gläsernen Gefässe den Ausfluss aus der Oeffnung bb_1 scharf beobachtet, so kann man an den im Wasser ent-

Fig. 55.



haltenen und von demselben mitgerissenen kleinen Körperchen, die man demselben zum Zwecke der Beobachtung beimengen mag, deutlich wahrnehmen, dass die einzelnen Wasserfäden sich in den Figur 55 mit ppp bezeichneten Richtungen aus dem Gefässe nach der Oeffnung bewegen. Ist die letztere kreisrund, so schneiden sich die verlängerten Richtungen aller Fäden, welche identisch mit den Richtungen der auf Ausfluss wirkenden Kräfte sind, in dem Mittelpunkte m derselben. Denkt man sich alle diese Seitenkräfte in vertikale und horizontale zerlegt, so wird selbstverständlich die Summe der letztern centrisch gegen den Mittelpunkt m laufenden Seitenkräfte nach jeder Axen-Richtung und für jeden Hebelsarm in der Ebene $bb_1 = 0$, und die letztere befindet sich also auch in Bezug auf Drehung um ihre vertikale Axe im Gleichgewicht. Die geringste zufällige Abweichung eines Wasserfadens von der centrischen Richtung in eine excentrische muss sofort zur Bildung eines Kräfte-Paares und zur Erzeugung einer sich um die vertikale Mittelaxe spiralförmig drehenden Bewegung führen. Die letztere beobachtet man in allen Fällen, wenn beim Aufziehen der Oeffnung sich das Wasser nicht in vollkommener Ruhe befand, sondern ein auf der Oberfläche schwimmendes Korkstückchen noch eine ganz geringe Kreisbogen-Bewegung machte und man kann sie, wenn es gelungen war, sie zu verhüten, sofort herbeiführen, wenn man mittelst eines Stäbchens eine kreisförmige Furche in die Wasser-Oberfläche zieht. In Bezug auf drehende Bewegung befindet sich also das durch eine kreisförmige Oeffnung strömende Wasser stets im labilen Gleichgewichte, und man beobachtet daher bei Weitem öfter eine solche, als eine andere. Je mehr sich die spiralförmig drehende Bewegung beschleunigt, desto wahrnehmbarer bildet sich lediglich in Folge der Centrifugal-Kraft zunächst eine trichterartige Einsenkung der Oberfläche über der Oeffnung und schliesslich ein Vakuum von der Form einer trichterartigen Röhre, deren Spitze bis in die Ausfluss-Oeffnung am Boden hinunterreicht. Die Ausfluss-Coefficienten ergeben sich in solchem Falle in Folge vermehrter Cohäsions-Arbeit um einige Prozente geringer.

Denkt man sich über dem Schnitt bb_1 durch die Oeffnung einen Halbkreis oder über einer kreisförmigen eine Halbkugel beschrieben, und den Halbmesser verschwindend klein gegen die Wasserstands-Höhe, so ist jede Flächen-Einheit dieser Halbkugel oder jedes Bogen-Element des Halbkreises dem gleichen hydrostatischen Druck unterworfen, event. entspricht der Druck bei p_1 der Wasserstands-Höhe $h - \frac{hb_1}{2}$. Beim Aufziehen der Oeffnung werden alle diese Drucke ohne Einschränkung thätig, denn der halbkugelförmige Körper wird am freien Fall durch die Oeffnung lediglich durch seine Cohäsion $\frac{s}{\gamma}$, welche hier positiv in der Rich-

tung des hydrostatischen Druckes wirkt, verhindert. Die Strahlenrichtung, wie sie beim Ausflusse beobachtet wird, bedarf also hiernach keiner weiteren Erklärung, sondern ergibt sich als selbstverständlich. Zieht man die beiden Sehnen Ob und Ob_1 und zerlegt sämtliche Drucke ppp in zwei Richtungen normal auf Ob und Ob_1 und parallel damit, so wird die Summe der letztern Seitenkräfte $= 0$, während die der erstern zwei Mittelkräfte $m_p m_p$ ergibt, welche die Mitte jeder Sehne und mit ihren Verlängerungen sich in m dem Mittelpunkte der Oeffnung schneiden. Daraus folgt also für die mittlere Bewegungs-Richtung der absoluten Arbeits-Geschwindigkeit sämtlicher durch die Oeffnung fließenden Strahlen ein Neigungswinkel von 45° gegen die Ebene derselben. Muss nun nach § 22 diese absolute Geschwindigkeit C gleich der des freien Falles von der Höhe h also $\sqrt{2gh}$ sein, so ergibt sich daraus die Ausfluss-Geschwindigkeit in der Axenrichtung normal auf die Oeffnung $c = \sin 45^\circ \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{2gh} = \sqrt{gh}$, wie schon § 22 und 23 bewiesen. Kurz oberhalb und unterhalb der Oeffnung stossen alle Wasserfäden unter dem mittlern Winkel von 45° zusammen und nehmen nach § 20 sehr bald die gemeinschaftliche Axenrichtung OO_1 an, ohne dabei von dem Cohäsions-Widerstande abgesehen einen Geschwindigkeits-Verlust zu erleiden. Also in einer gewissen Entfernung unterhalb bb_1 in O_1 müssen sich alle Strahlen mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $C = \sqrt{2gh}$ in der Richtung normal auf die Oeffnung vereinigt haben. War nun der Strahl-Querschnitt in $bb_1 = a$, so findet sich daraus der in O_1 durch die Beziehung des § 21

$$1) \quad ac = a_1 C \text{ also } a_1 = \frac{ac}{C} = \frac{a\sqrt{gh}}{\sqrt{2gh}} = a\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707a.$$

Für kreisrunde Oeffnungen folgt daraus, dass sich der Durchmesser des Strahles in einer gewissen Entfernung unterhalb der Oeffnung zu dem in derselben wie $\sqrt{0,707} : 1 = 0,84 : 1$ verhalten muss, während dies Verhältniss durch die bisherigen Messungen im Mittel auf 0,80 auch wohl 0,81 : 1 gefunden worden. Es ist indessen bereits § 17 erwähnt worden, dass die Beobachtungen in Uebereinstimmung mit den von uns neuerdings angestellten Versuchen für die Arbeits-Geschwindigkeit einen Verlust von 3 bis 4%, welcher auf Rechnung der innern Cohäsions-Widerstände kommt, ergeben haben. Nimmt man an, dass auch die Strahldicke von einem gleichen Verluste betroffen werde, so verbleibt dem Resultate unserer Herleitung keine beträchtliche Differenz gegen das der Beobachtung. Bei sehr geringen Druckhöhen wird überdies die Zuspitzung des Strahles unterhalb der Oeffnung in Folge fortgesetzter Beschleunigung durch den freien Fall eine sehr merkliche.

Setzt man ferner voraus, dass die Richtungs-Aenderung in der Strahlaxe nach dem von w aus beschriebenen Kreisbogen zz_1 erfolge, so muss sich die Form des zusammengezogenen Strahles hierdurch, wie leicht ersichtlich, ergeben. Den Radius r dieses Kreisbogens findet man durch die Gleichung

$wz_1 = ow \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ also $r + \frac{1}{2}bb_1 \sqrt{\frac{1}{2}} = [r + bb_1 \sqrt{\frac{1}{2}}] \sqrt{\frac{1}{2}}$
 auf $r = 0,50 bb_1$, also für kreisförmige Oeffnungen auf 0,50 vom Durchmesser der Oeffnung.

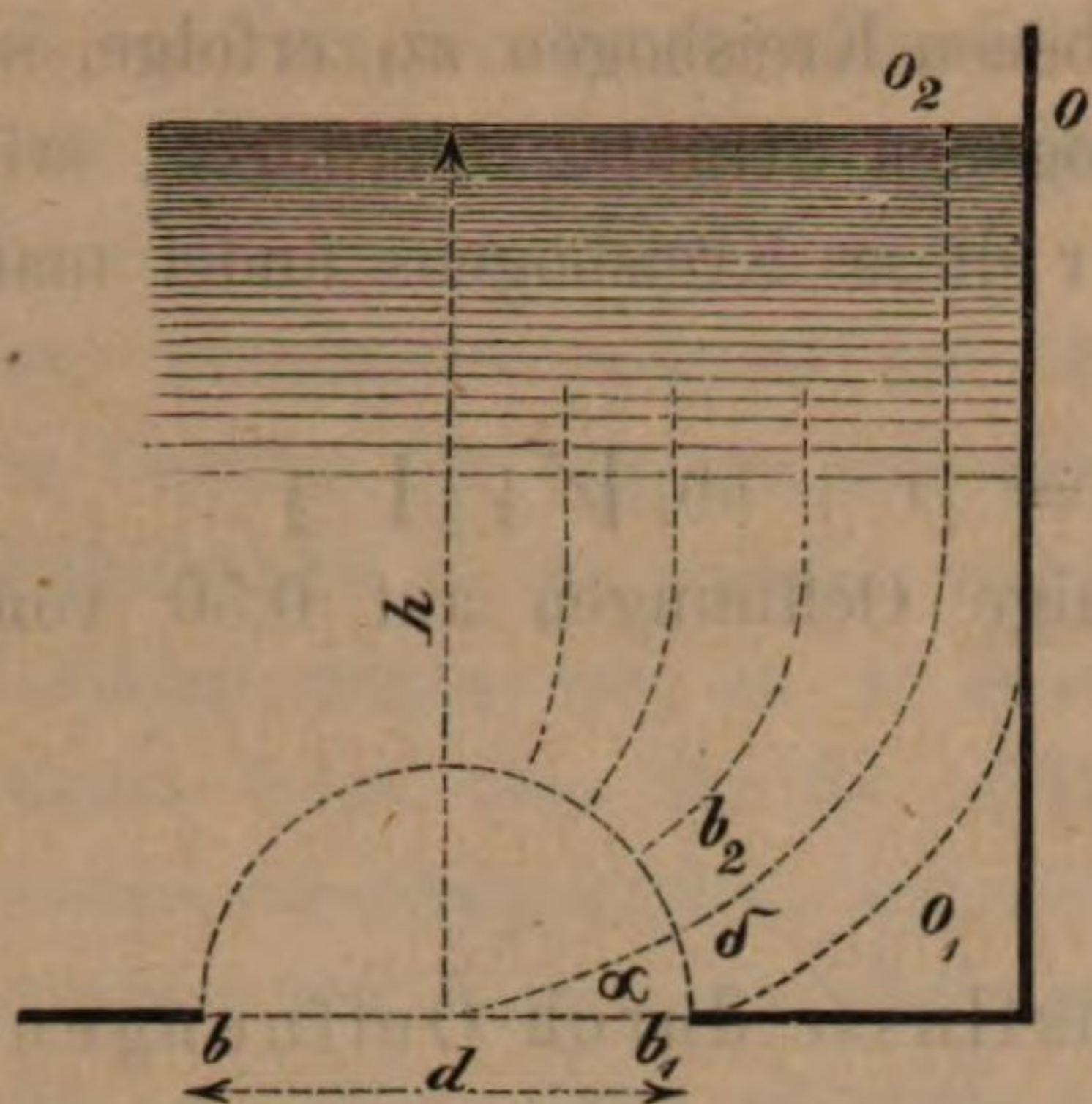
§ 25.

Zuströmungs-Bewegung beim Ausflusse durch Oeffnungen in Gefässen.

Aus § 24 wird ersichtlich, dass man einen Irrthum begeht, wenn man sich die über einer Oeffnung in der Bodenwand in Bewegung befindliche Wassermasse als einen trichterförmig gegen die Wasseroberfläche sich erweiternden Körper vorstellen will, wie ihn die Rechnung unter der falschen Voraussetzung ergiebt, dass beim Ausflusse horizontale und parallele Schichten niedersinken, deren Bewegungs-Geschwindigkeit vom Boden nach der Oberfläche hin im umgekehrten Verhältnisse mit den Quadratwurzeln aus den Druckhöhen zunimmt.

Schon die Cohäsion der einzelnen Wassertheilchen macht es durchaus unmöglich, dass auch nur der geringste Theil einer im Zusammenhange befindlichen Masse sich in Bewegung setzen kann, ohne dass dabei die ganze Masse in Mitleidenschaft gezogen wird und die Bewegung mitmacht, wenn solche auch in den vom Angriffspunkte und von der Kraft-richtung entferntesten Theilen verschwindend klein wird. Nehmen wir auch an, es drücke sich ein compakter Strahl vom Querschnitte der Oeffnung in einheitlicher vertikaler Richtung mit der Geschwindigkeit des freien Falles heraus, so vermag derselbe unter dieser Voraussetzung von dem horizontalen Seitendrucke, den er von allen Richtungen erleidet, Nichts wiederzugeben. Ausserdem wird bei jeder beschleunigten Bewegung der Cohäsions-Widerstand der einzelnen Theilchen in der Richtung der Bewegung bereits auf das Aeusserste angespannt. In Folge dessen können die dem hydrostatischen Seitendrucke unterworfenen Moleküle ohne erhebliche Schwierigkeit normal gegen die Bewegungs-Richtung des Strahles in denselben eintreten und diejenigen Zwischenschichten bilden, ohne welche nach § 21 keine beschleunigte Bewegung denkbar ist. Eine Einschränkung erleidet dieser Seitendruck nur durch den über dem Boden des Gefässes entgegenwirkenden Abscheerungs-Widerstand. Auch diese Einschränkung lässt sich zum Gegenstande der Rechnung machen.

Fig. 56.



Stellt man sich unter Figur 56 einen vertikalen Querschnitt von der Breite 1 durch die Oeffnung bb_1 von der Weite $= d$ eines Gefässes vor, welches bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt ist, ferner die punktirte Linie b_1o_1o als die von der Boden- und Seitenwand tangirte äusserste Grenze, an welcher die Abscheerung der ausfliessenden Schichten längs den in relativer Ruhe verbleibenden oder längs den Gefässwänden stattfindet, unter $b_1b_2o_2o$

eine dieser Grenze parallele Schicht von der unbestimmten Dicke $b_1b_2 = \delta$ und der im Bogen gemessenen Länge $b_1o_1o = l$, so muss, wenn die beschleunigende Kraft grösser als die verzögernde, also in b_1b_2 ein Seitendruck auf den ausfliessenden Strahl ausgeübt werden soll

$$\delta \gamma h > \mu_1 l \text{ sein}$$

oder da $\delta = \frac{d}{2} \tan \alpha$

$$1) \gamma h \frac{d}{2} \tan \alpha = \mu_1 l$$

wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

l muss hier eine Funktion von h von der Form βh sein, worin β von der Form des Gefässes abhängt und bei unbegrenzten Gefässen einen constanten Werth behalten muss, den man auch ohne weitere Erforschung als zwischen 1 und 2 liegend annehmen kann. Setzen wir für h den Werth βh in Gleichung 1 ein, so ergibt sich:

$$2) \tan \alpha = \frac{2\mu_1 \beta}{\gamma d}$$

und wenn man für μ_1 als Biegungs-Widerstand den Werth etwa des halben Abscheerungs-Widerstandes 1,31 Kg., für $\gamma = 1000$ Kg. und β etwa $\frac{3}{2}$ setzt

$$3) \tan \alpha = \frac{0,00395}{d}.$$

Es folgt daraus, dass in einem um so grössern Theile des Strahl-Umfanges über dem Boden der Oeffnung im Verhältniss zur Weite der letztern, der Seitendruck unwirksam werden muss, je kleiner die Weite d wird. Bei sehr kleinen Oeffnungen werden also die Ausfluss-Verhältnisse aus dünner Bodenwand sich denen aus Mundstücken nähern und bei gleichen Druckhöhen grössere Ausflussmengen ergeben.

Für $d = 0,03$ M. ergibt sich beispielsweise aus Gleichung 3) $\tan \alpha$

$= 0,132$ also nur $\frac{1}{8}$ der Oeffnungs-Weite, für $d = 0,01$ M. aber schon $0,395$ derselben, muss also bereits einen sehr merklichen Einfluss ausüben.

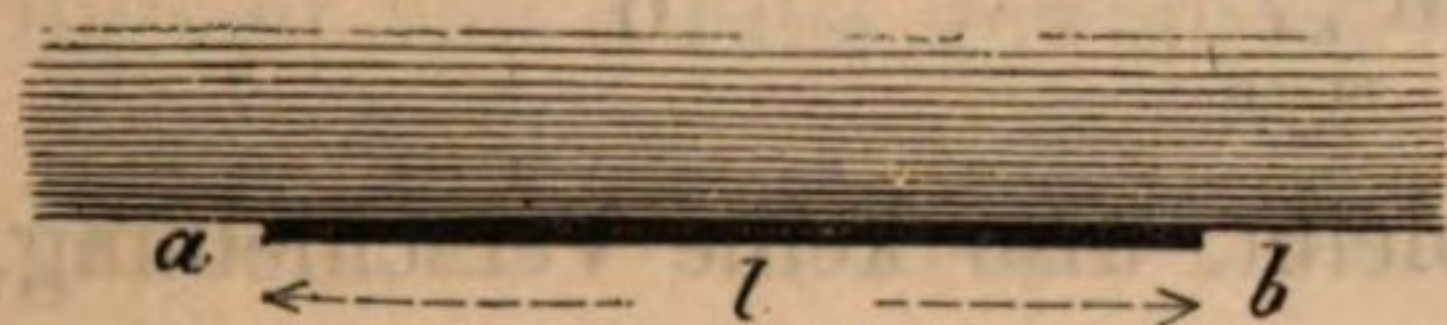
§ 26.

Bei Oeffnungen in der dünnen Bodenwand unbegrenzt gedachter Gefässe wachsen die Querschnitte der Bewegung wie die Oberflächen der um die Oeffnung beschrieben gedachten Kugelsphären, also müssen die absoluten Zufluss-Geschwindigkeiten normal auf diese Sphären sich umgekehrt wie die Flächen-Inhalte derselben oder umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen von der Oeffnung verhalten. Dagegen müssen die virtuellen Fall-Geschwindigkeiten resp. Beschleunigungen, welche die einzelnen Wassertheilchen in beliebigen Tiefen unter der Oberfläche erlangt haben, sich direkt wie diese Tiefen verhalten, weil letztere proportional den auf Beschleunigung wirkenden Kräften sind, und die beschleunigte Masse in allen mit dem Boden parallelen Ebenen constant gleich der Ausflussmenge ist. (Vergl. indessen § 49.)

§ 27.

Fortpflanzung lokaler Kraft-Einwirkungen.

Fig. 57.



Wenn eine als absolut eben gedachte Fläche ohne Masse ab Fig. 57 von der Länge l und der Breite $= 1$, welche sich in Berührung mit einer in Ruhe gedachten

Wassermasse von unbegrenzter Ausdehnung befindet, sich unter Einwirkung einer Kraft P mit der Beschleunigung p längs derselben in der Richtung ab in Bewegung setzt, so kann die der Beschleunigung entgegenwirkende verzögernde Kraft R in Folge Biegsamkeit des Wassers wohl beliebig kleiner, aber unter keinen Umständen grösser als μl die Abscheerungs-Festigkeit des Wassers und die in Folge dieser Bewegung auf Beschleunigung einer gewissen Wassermasse M wirkende Kraft P_1 kann wiederum weder grösser noch kleiner werden, als R . Ist P kleiner als μl , so kann selbstverständlich eine Abscheerung an der Fläche l nicht stattfinden, es wird sich vielmehr eine gewisse vermöge ihrer Cohäsion an l haftende Wassermasse mit in Bewegung setzen, und zwar werden die in unmittelbarer Berührung befindlichen Wassertheilchen die Geschwindigkeit von l annehmen, die entferntern mehr oder weniger rasch nachfolgen. Das Gesetz dieser Nachfolge bestimmt sich lediglich durch die Biegsamkeit des Wassers und die letztere wiederum ist, wie bereits § 4 nachgewiesen, eine Funktion des Verschiebungs-Winkels der einzelnen Wasserelemente gegen einander. Ist bei fortgesetzter Bewegung der Biegungs-Winkel $\varphi = 39^\circ 48'$ in allen über l befindlichen

Schichten überschritten, dann erst wird P mindestens die Grösse μl annehmen müssen, wenn die Bewegung in ihrer bis dahin erlangten End-Geschwindigkeit verharren oder weiter beschleunigt werden soll. Je geringer die Dicke h der über l befindlichen Wassermasse gedacht wird, desto früher, je bedeutender desto später wird der Zustand der Abscheerung in allen Schichten eintreten, wird h unendlich, so kann überhaupt keine Abscheerung eintreten, sondern die in Bewegung gerathende Wassermasse wird bei unendlich fortgesetzter Einwirkung von l bis in das Unendliche ohne Begrenzung wachsen.

Denkt man sich, dass nach einem gewissen Wege $S = \frac{vT}{2} = \frac{pT^2}{2}$, welchen die Fläche l während der Zeit T , seitdem sie sich mit der Kraft P in Bewegung gesetzt hat, zurücklegte, die Wassermasse M hierdurch in Bewegung gerathen ist, dass die Massentheilchen zunächst l die Geschwindigkeit v angenommen haben müssen und die Geschwindigkeiten der entfernten Massentheilchen mit dem zunehmenden Massenanteil m bis 0 abnimmt, sich also als eine Funktion von der Form $\frac{m}{M}v$ ausdrücken lassen, so ist das Differenzial der Arbeit dA , welche die Masse M in sich aufgenommen hat

$$1) dA = \frac{dm}{2} \left(\frac{mv}{M} \right)^2 \text{ und } A = \frac{v^2}{2M^2} \int_{m=0}^{m=M} m^2 dm = \frac{Mv^2}{6}.$$

So lange nun die Kraft P kleiner als μl bleibt, also keine Verschiebung, sondern nur eine Massen-Anspannung stattgefunden hat, muss uns dieser Ausdruck nach § 18 unverkürzt die Arbeit wiedergeben, welche die Kraft P während der Zeit T auf die Masse M einwirkend derselben mitzutheilen vermochte, oder welche die Zugkraft P verrichten konnte, während ihr Angriffspunkt den Weg $S = \frac{vT}{2} = \frac{pT^2}{2}$ zurücklegte. Nach geomechanischen Prinzipien drückt sich diese Arbeit aus durch $PS = \frac{PvT}{2}$. Wir erhalten damit in Verbindung mit Gleichung 1 die Beziehung $\frac{PvT}{2} = \frac{Mv^2}{6} = PS$, woraus folgt

$$2) P = \frac{Mv^2}{6S} = \frac{Mv}{3T} \quad 3) v = \frac{2S}{T} = \sqrt{\frac{6PS}{M}} \quad 4) M = \frac{6PS}{v^2} = \frac{3TP}{v}.$$

Diese Gleichungen gelten für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung von l . Auf eine gleichförmige Bewegung angewendet würde man darin $S = vT$ statt $\frac{vT}{2}$ zu setzen haben. Dieser Fall ist aber nur unter der Voraussetzung möglich, dass P kleiner oder gleich μl

und veränderlich wirksam ist, denn so bald es grösser wird, muss, da die Masse von 1 verschwindend klein gedacht worden, Abscheerung eintreten und 1 wird unabhängig von M beschleunigt. Beide erhalten dann verschiedene End-Geschwindigkeiten und die eine kann nicht mehr durch die andere gemessen werden. Besitzt 1 jedoch ebenfalls Masse, so würde dieselbe mit der Kraft $P - \mu l$ beschleunigt werden, und die hierdurch aufgesammelte Arbeit würde ohne Einwirkung auf die Beschleunigung des Wassers sein.

Wo es sich also darum handelt, die Cohäsion des Wassers als hebende Kraft für dasselbe mittelst Arbeits-Maschinen nutzbar zu machen, wie bei Centrifugal-Pumpen, Schrauben etc. muss für ein ganz bestimmtes Verhältniss von Kraft und Geschwindigkeit der erzielte Effekt ein Maximum werden, welches nur durch Vermehrung der letztern, aber nicht der erstern, gesteigert werden kann.

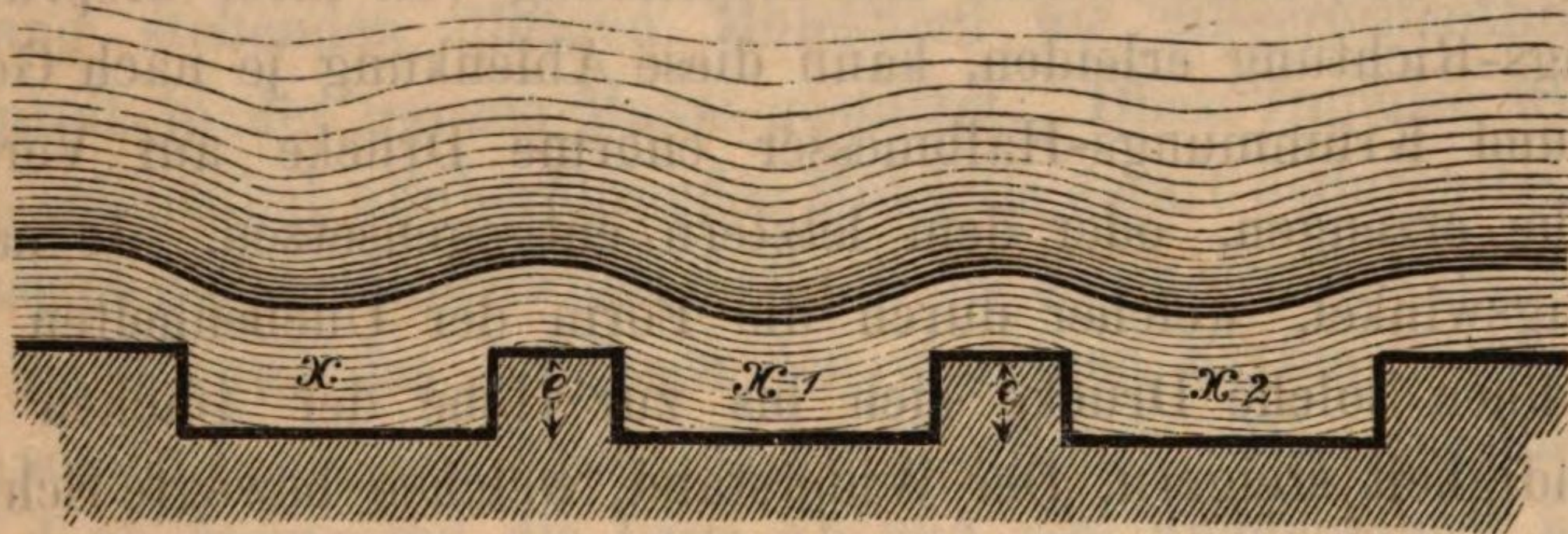
Die Gleichungen 1 bis 4 gestatten uns manche Fragen zu beantworten, welche bisher unlösbar schienen. Haben wir beispielsweise die Beobachtung gemacht, dass über dem stillstehenden Wasserspiegel eines Teiches eine Fläche ohne Masse von 5 □Fuss Grösse mit der Kraft $P = 5\mu = 2,6$ Pfund in Bewegung gesetzt worden, nach einer gewissen Zeit einen Weg von 12 Fuss zurückgelegt und dabei eine End-Geschwindigkeit von 3 Fuss gewonnen hat, so brauchen wir nur die entsprechenden Werthe in Gleichung 4 einzusetzen, um $Q = \frac{gM}{\gamma}$ die Wassermenge,

welche dabei in Bewegung gerathen sein muss, mit 10,86 Cbf. zu finden. Aus Gleichung 1 findet man die Arbeit, welche dabei dem Wasser mitgetheilt worden, auf 31,2 Fuss-Pfund. Diese Arbeit, welche nur durch Cohäsions-Verluste beeinträchtigt wird, vermag sich in keiner andern Weise zu äussern, als durch eine ihr entsprechende Hebung der Wassermasse M über den ursprünglichen Wasserspiegel hinaus. Sie wird durch eine Anstauung vor der bewegten Fläche sichtbar. Hat die Einwirkung der Kraft P aufgehört, so sinkt die gehobene Masse vermöge ihres eignen Gewichtes wieder mit beschleunigter Fall-Geschwindigkeit nieder, und diesem Niedersinken kann eben so wenig wie der Hebung ein erheblicher Cohäsions-Verlust entgegentreten, sofern die Anspannung innerhalb der Biegsamkeits-Grenze verbleibt, der Wasserbehälter unendlich weit und tief gedacht wird und immer neue Massen in die Bewegung hinein gezogen werden. Der Senkung muss wieder eine neue Hebung folgen und so entsteht die wellenartige Bewegung, welche uns in solchen Fällen vor Augen tritt und die in dem Maasse verschwindet, als die Masse sich vergrössert, auf welche sie sich erstreckt. Ist die Grösse des Wasserbehälters eine endliche und von Wandungen begrenzt, dann tritt

Richtung cf zerlegt sich in zwei Seitenkräfte $se\sin\alpha$ und $se\cos\alpha$, von denen nur die erste in der Richtung der Bewegung entgegenwirkt, während letztere normal gegen die Fläche ab gerichtet, also ohne Einfluss auf die Bewegung derselben bleibt.

Das Produkt $ef\sin\alpha$ wird aber, wie leicht ersichtlich, ein Maximum für $\alpha = 90$ und für Winkel $cef = \text{Winkel } fec = 45^\circ$. Für diesen Fall wird aber auch $ef = ce\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $se = ce\sqrt{\frac{1}{2}}$ wird μce , weil $s = \mu\sqrt{2}$ ist. Es folgt daraus, dass auch bei der günstigsten Gestaltung des Kerbes auf die ausserhalb desselben fliessende Wassermasse keine grössere Wirkung erzielt werden kann, als wenn derselbe gar nicht vorhanden wäre. Was für einen solchen Kerb gilt ebenmässig für alle übrigen, auch für eine durchgehends in beliebigen Schnittwinkeln gezahnte Fläche. Denkt man sich die Bewegung umgekehrt gegen die Fläche ef gerichtet, so wird die relative Geschwindigkeit v desselben Wasserprisma's, auf dessen Beschleunigung die Kraft sef wirkte, stetig durch den Stoss gegen ef verzögert. Vernichtet könnte sie nur dann werden, wenn die Verhältnisse ein Ausweichen der stossenden Wassermasse unmöglich machen. Dieser Fall gehört indessen zu den undenkbaren, und so wird also der Bewegung der Fläche l nur diejenige Componente entgentreten, welche dem Krümmungs-Halbmesser, dem Ablenkungs-Winkel und der Geschwindigkeit des abgelenkten Wasserprisma's entspricht und die sich nach dem Gesetze der Centrifugal-Bewegung für gegebene Bedingungen ermitteln lässt.

Fig. 59.



Wenn wir uns also in eine ursprünglich eben gewesene Flusssohle ab Figur 59 quer gegen die Stromrichtung die Einsenkungen xx_1x_2 von der Tiefe e ausgehoben denken, so wird nach der vorhergegangenen Betrachtung diese Aenderung keine Aufstauung des Flusses, also auch keine Vermehrung der Widerstände erzeugen, was freilich mit der praktischen Erfahrung und Anschauung so übereinstimmen möchte, dass

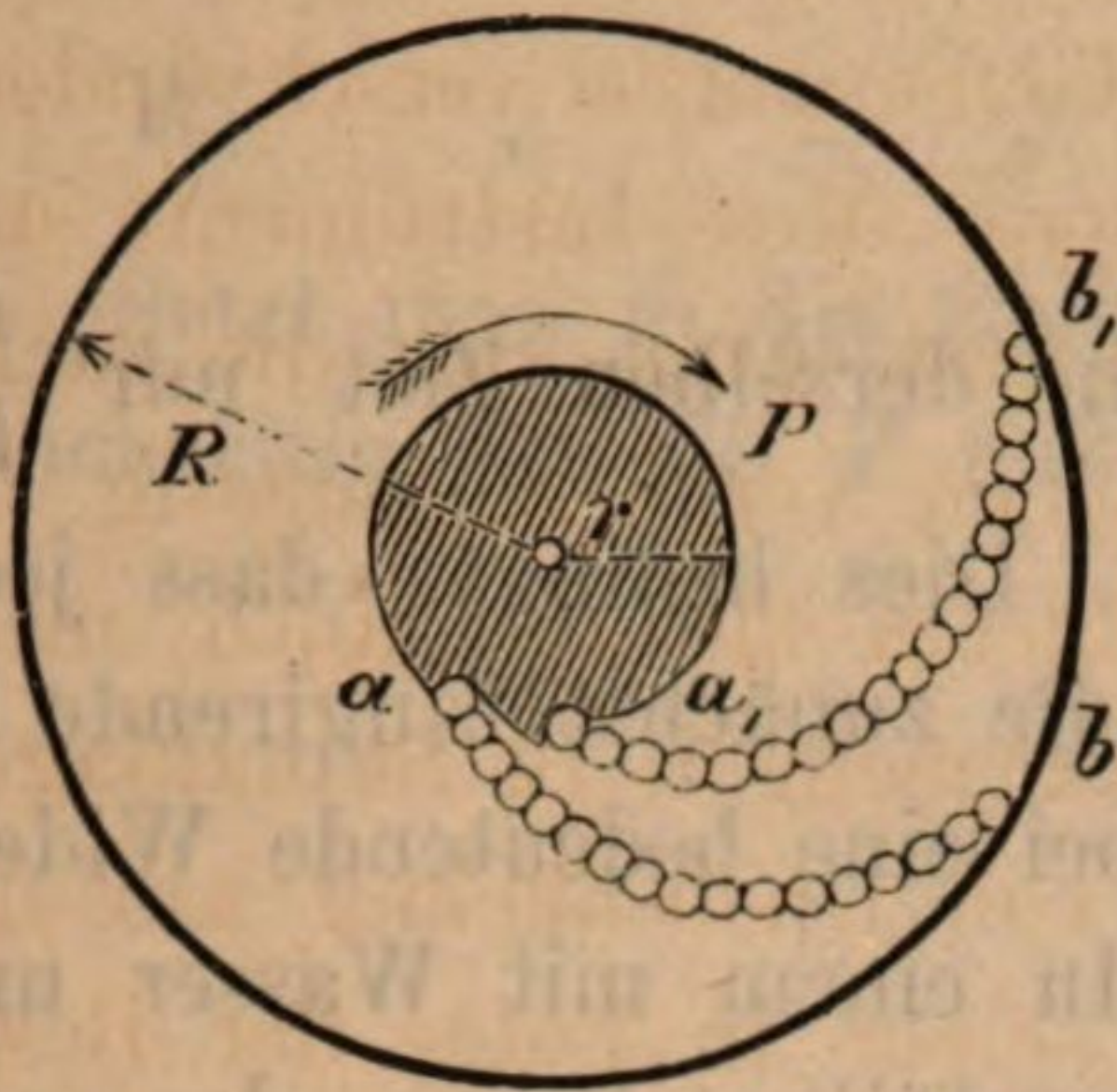
es keines Beweises dafür bedurft hätte, wenn nicht die Erscheinung selber von grosser Wichtigkeit für die Zurückführung des Einflusses der Beschaffenheit benetzter Wandungen auf das richtige Maass wäre. Fast in allen vorkommenden Fällen, sowohl der Messung von Gefässen, als insbesondere der Tiefenbestimmung der Ströme durch Peilungen, haben wir es nur mit Unebenheiten zu thun, deren Tiefenmaasse verschwindend klein werden gegenüber der Genauigkeit unserer Mess-Instrumente und unserer Operationen. Nur bei Gebirgsbächen erstrecken sich die zackigen Vorsprünge der felsigen Betten durch einen verhältnissmässig bedeutenden Theil der Wassertiefe. Dagegen bieten sie uns auch meist Gelegenheit zur direkten Messung ihrer Wassermengen in Stauanlagen.

Wenn wir nun aber die Einwirkungen von Unebenheiten auf den Widerstand, welchen die benetzten Flächen selber in Folge der Bewegung des Wassers erleiden, einer nähern Betrachtung unterziehen, so kommen wir hier auf ein wesentlich verschiedenes Resultat. Konnten wir § 27 noch von der Vorstellung einer längs des Wassers bewegten Fläche ohne Masse ausgehen, so müssen wir derselben hier mindestens die Masse derjenigen Wassermenge zuerkennen, deren Geschwindigkeit zwischen den Unebenheiten wo nicht stetig vernichtet resp. erzeugt, so doch zur stetigen Ablenkung von der Bewegungs-Richtung der Fläche oder des Wassers gelangt. Sie wird sich in den meisten Fällen je nach der Beschaffenheit der Oberfläche durch eine Netzsicht, deren Dicke der mittlern Tiefe der Einsenkungen gleichkommt, darstellen und in Rechnung bringen lassen. Während die stossenden Wassertheilchen selber ausser den verhältnissmässig geringen Cohäsions-Verlusten durch den Anprall an die einzelnen Vorsprünge der Fläche keine Einbusse an lebendiger Kraft, sondern nur eine Ablenkung von ihrer ursprünglichen Bewegungs-Richtung erleiden, kann diese Ablenkung je nach Geschwindigkeit und Krümmungs-Halbmesser enorme Drucke auf Verschieben der Fläche erzeugen, oder dem letztern entgegensetzen. Je nach dem Ablenkungswinkel, welcher durch die Form der Unebenheiten bedingt wird, können solche Drucke sich bis zur Höhe der 4fachen Arbeits-Geschwindigkeit steigern. Der Widerstand, welchen bewegte Schlepptaue im Wasser erleiden, die Bewegung der Geschiebe auf den Flusssohlen, die Einwirkung des Wellenschlages auf Seebauten, die Zerstörungs-Arbeit, welche Wasserfälle auf harten Felsblöcken verrichten, bringt uns dies zur Anschauung, wenn wir uns die feine Zertheilung vorstellen, in der sich die einzelnen Massentheilchen der unscheinbarsten Angriffspunkte und Wassertheilchen zu bemächtigen vermögen.

§ 29.

Rotirende Bewegung.

Fig. 60.



Figur 60 stelle den Horizontalschnitt durch ein cylindrisches mit Wasser gefülltes Gefäss vom Radius R vor, um dessen Axe wir uns einen Cylinder ohne Masse vom Radius r durch eine an seinem Mantel horizontal und tangential wirkende Kraft P in drehende Bewegung und zwar in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung gesetzt denken wollen. Der Einfachheit wegen lassen wir die Cohäsion an den Kopfflächen beider Cylinder ausser Acht und ziehen also nur ein gegen die ganze Höhe derselben verschwindend kleines Höhen-Element l in Betracht. Derjenige Theil der Kraft P , welcher auf Beschleunigung der Wassermasse im Cylinder zu wirken vermag, kann gemäss § 28 wohl kleiner, aber nicht grösser als $\mu 2r\pi l$ werden. Am Mantel des Cylinders R wirkt dagegen die bei weitem grössere Kraft $\mu 2R\pi l$ entgegen und es kann daher wohl die Frage aufgeworfen werden, wie es unter diesen Umständen möglich sei, dass bei fortgesetzter Drehung des Cylinders r sich dennoch die ganze Masse durch $\mu 2r\pi l$ beschleunigt in Bewegung setzt und den Abscheerungs-Widerstand $\mu 2R\pi l$ überwindet. Wenn wir auch annehmen müssen, dass zunächst sich jedes Molekül unmittelbar an der drehenden Fläche ablöst, so hat es dadurch doch einen Impuls erhalten, welchem zu folgen nicht nur ihm, sondern allen mit ihm in zusammenhängender Berührung stehenden übrigen Molekülen die ausserordentlich leichte Biegsamkeit in der ganzen Masse gestattet. Diese Impulse wiederholen sich, bis schliesslich alle berührenden Moleküle derart dadurch beschleunigt sind, dass sie gleiche Geschwindigkeit mit der abscheerenden Mantelfläche r erlangt haben und das Abreissen der einzelnen Ketten nicht mehr an dieser, sondern an der Mantelfläche R erfolgt. Die einzelnen Ketten müssen dann momentan die Lage ab und a_1b_1 angenommen haben und während sie durch die Cohäsionskraft s in den Kerben bei a und a_1 festgehalten werden, leisten sie in tangentialer Richtung bei b und b_1 nur mit der Kraft $\mu = s\sqrt{\frac{1}{2}}$ der Bewegung Widerstand. Endlich hat durch fortgesetzte Impulse die ganze Masse ein Bewegungs-Moment erlangt, vermöge dessen sie den gesammten Abscheerungs-Widerstand an der Mantelfläche $2R\pi$ zu überwinden vermag. Für den Beharrungs-Zustand in der bis dahin erlangten Geschwindigkeit, findet sich dann die Bedingung, dass die Produkte aus den sich entgegenwirkenden

Kräften in die von ihren Angriffspunkten während gleicher Zeiten zurückgelegten Wege einander gleich sein müssen. Mithin

$$\mu 2r\pi l v = \mu 2R\pi l V$$

woraus sich V die Geschwindigkeit der abscheerenden Wassertheilchen am Cylinder-Mantel R ergibt auf

$$V = \frac{r}{R} v$$

Die äussere Wasserschicht kann also in derselben Zeit nur $\frac{r^2}{R^2}$ so viel Umdrehungen machen als die innere. Dies bedingt, dass jede concentrische Schicht sich schliesslich gegen die zunächst tangirende in stetiger Abscheerung befindet, und dass hiebei eine bedeutende Widerstands-Arbeit der Bewegung entgegentritt. In einem mit Wasser und kleinen darin schwimmenden Körperchen angefüllten Glase, das man durch Drehung eines Bleistiftes in Bewegung setzt, kann man diesen Vorgang deutlich beobachten, sich auch überzeugen, wie sehr bald das Wasser wieder in Ruhe gelangt, wie schnell also das der Masse mitgetheilte Bewegungs-Moment durch die Cohäsions-Arbeit verzehrt wird, nachdem die Kraft-Einwirkung aufgehört hat.

§ 30.

Der umgekehrte Vorgang, bei dem wir uns die Kraft P an dem äussern Mantel eines mit zwei Kopfplatten geschlossenen und ganz mit Wasser gefüllten Cylinders vom Durchmesser D und der Höhe l angreifend denken, welcher um seine lothrecht stehende Axe drehbar ist, gestaltet sich wesentlich verschieden von dem des § 29.

Die Masse des Cylinder-Inhaltes, auf dessen Mantel reducirt, sei M , die des Cylinder-Mantels nebst Kopfplatten m . Die gesammte innere Berührungsfläche mit dem Wasser berechnet sich auf $2\pi \frac{D^2}{4} + D\pi l$ und der Abscheerungs-Widerstand ebenfalls auf den Cylinder-Mantel reducirt daher auf $2 \cdot \frac{2}{3} \mu \pi \frac{D^2}{4} + \mu d\pi l = R = D\pi \mu \left(\frac{D}{3} + 1 \right)$. So lange nun P kleiner als R bleibt, werden Cylinder-Mantel und die ihn berührenden Wassertheilchen die gleiche gemeinschaftliche Beschleunigung erlangen. Wird P grösser als R , so muss, weil R über seinen Werth hinaus nicht wachsen kann, der Cylinder-Mantel mit $P - R$ für sich allein beschleunigt werden, also voreilen, während das Wasser zurück bleibt. Für $P = R$ wird die Voreilung $= 0$. Nehmen wir den letztern Fall, so wird jeder Wasser-Cylinder, welcher als Theil M_a der ganzen Masse M dem Durchmesser d entspricht durch die Kraft P_a , die aber nie grösser werden kann als $\pi d \mu \left(\frac{d}{3} + 1 \right)$, auf seinen Mantel redu-

beschleunigt, mit x , und denjenigen, welcher die Wassermasse beschleunigt, mit y , so ergibt sich durch die Bedingung $p = \frac{x}{m} = \frac{y}{M}$

$$4) x = mp = \frac{mP}{M + m} \text{ und } y = Mp = \frac{M.P}{M + m},$$

Diese Gleichungen gelten, so lange P kleiner als R bleibt. Wird P grösser, so wird m mit $P - R$ und M mit R beschleunigt. Dann erhält folglich die Beschleunigung von m den Werth $p = \frac{P - R}{m}$ und die von

M den Werth $p_1 = \frac{R}{M}$. Sollen beide gleich sein, also für den Zustand, da die Ablösung der Wassermasse vom Cylinder-Mantel eintritt, muss also

$$p = p_1 = \frac{P - R}{m} = \frac{R}{M} \text{ sein oder } M(P - R) = mR,$$

woraus sich der entsprechende Werth von P findet

$$5) P = R \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

Mit Hülfe der in Vorstehendem entwickelten Relationen lassen sich mannigfache Aufgaben lösen, die in Beziehungen zu Vorkommnissen in der Praxis treten können.

Es sollen beispielsweise Fässer von 3 Fuss Durchmesser und 4 Fuss Länge, welche mit einer Flüssigkeit vollständig gefüllt sind, deren Cohäsion und specif. Gewicht denen des Wassers gleichkommen, mittelst Herabrollen längs einer Rampe verladen werden, und man wünscht zu wissen wie steil die letztere angelegt werden könne, ohne dass dabei wirbelnde Bewegungen in der Flüssigkeit entstehen.

Für diesen Fall berechnet sich

$$R = \pi D \mu \left(\frac{D}{3} + 1 \right) = \frac{22}{7} \cdot 3 \cdot 0,52 (1 + 4) = 24,5,$$

Das Gewicht des leeren Fasses möge betragen 200 Pfund. Dann findet sich $m = \frac{200}{g} = \frac{200}{31,25} = 6,4$ Pfund.

Der Cubische Inhalt des Fasses enthält 28,28 Cb.-Fuss, das Gewicht desselben mithin 1746 Pfund, und dessen Masse auf den Umfang bezogen M wird $= \frac{1746}{2g} = \frac{1746}{62,5} = 27,9$ Pfund.

Setzt man diese Werthe in Gleichung 5 ein, so erhält man

$$P = 24,5 \left(1 + \frac{6,4}{27,9} \right) = 30,1 \text{ Pfund.}$$

Das Gesamtgewicht G beträgt $1746 + 200 = 1946$ Pfund. Bezeichnet man den gesuchten Gefälle-Quotienten der Rampe mit α und setzt den Coefficienten für den Widerstand der rollenden Reibung $= 0,04$, so erhält man durch die Beziehung

$$30,1 \text{ Pfund} = (1946\alpha - 0,04 \cdot 1946) \text{ Pfund.}$$

$\alpha = \frac{1}{18}$ also das Verhältniss der Höhe der Rampe zur Länge $= 1:18$.

§ 31.

Wenn ein nicht vollständig mit einer Flüssigkeit angefülltes cylindrisches Gefäss sich in rollende Bewegung setzt, muss, weil die erstere vermöge ihrer Schwerkraft stetig bestrebt sein wird, die tiefste Lage beizubehalten, an dem innern Cylinder-Mantel und an den Stirnflächen eine stetige Abscheerung stattfinden, und der Bewegung in tangentialer, also gleicher, Richtung mit der Zugkraft entgentreten.

Für einen ganz gefüllten Cylinder von der Länge l und dem Durchmesser D ergab sich R im § 30 $= \pi D \mu \left(\frac{D}{3} + 1 \right)$. Bezeichnet man den Inhalt des Querschnitt-Segmentes, welches ungefüllt bleibt mit J , den Abstand seines Schwerpunktes vom Cylinder-Mantel mit e , und die Länge des unbenetzt bleibenden Bogens mit b , so berechnet sich für den vorliegenden Fall der Widerstand R_1 auf

$$1) R_1 = \pi D \mu \left(\frac{D}{3} + 1 \right) - \mu (bl + Je).$$

Eine Chaussee-Walze, deren innere Mantel 5 Fuss Durchmesser und 4 Fuss Länge hat, sei nur bis zur Höhe von 4 Fuss 10 Zoll mit Wasser gefüllt, so dass ein Segment von 2 Zoll Höhe mit Luft angefüllt bleibt. Man wünscht den Arbeits-Verlust zu kennen, der durch die unvollständige Füllung beim Gebrauch der Walze erwächst.

Der Sehnen-Winkel α berechnet sich hier auf $42^\circ 5'$, die zugehörige Sehnen-Länge auf 1,79 Fuss, die Bogen-Länge b auf 1,83 Fuss, der Flächen-Inhalt des leeren Segmentes auf 0,20 □ Fuss, die Entfernung seines Schwerpunktes vom Mantel auf 0,11 Fuss.

Setzt man diese Werthe in Gleichung 1, so ergibt sich $R_1 = \frac{22}{7} \cdot 5 \cdot 0,52 (1,67 + 4) - 0,52 (1,83 \cdot 4 + 0,20 \cdot 0,11) = 42,5$ Pfund. Der Arbeits-Verlust beträgt mithin, wenn die Walze mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuss gezogen wird, $3 \cdot 42,5 = 127,5$ Fuss-Pfund oder 0,38 Pferdekraft. Bei ausserordentlichen Geschwindigkeiten kann dieser Verlust durch Unebenheiten der Mantel-Fläche nach § 29 noch erheblich gesteigert werden.

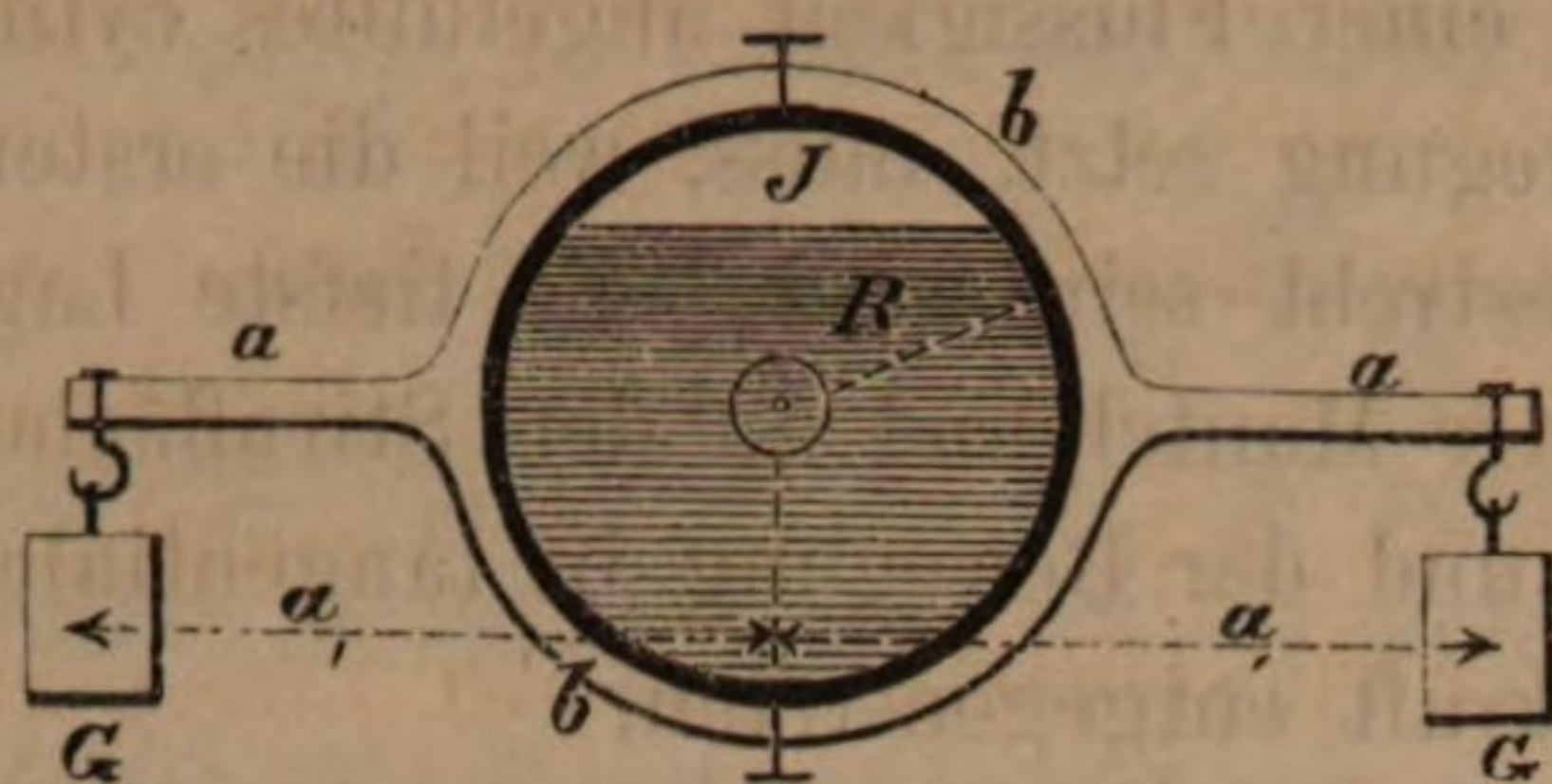
Die mangelhafte Füllung der Chaussee-Walze erschwert also nicht nur durch Schwankungen in der Schwerpunkts-Lage der Füllung, welche die Brust der Zugthiere angreifen, den Betrieb, sondern es geht auch eine nicht unbeträchtliche Arbeit auf Ueberwindung des Cohäsions-Widerstandes verloren.

§ 32.

Die Berechnung des § 31 führt uns zu der Construction einer einfachen Vorrichtung zum Messen der Cohäsion beliebiger Flüssigkeiten.

Figur 61 stelle den Querschnitt eines Glas-Cylinders vor, der um

Fig. 61.



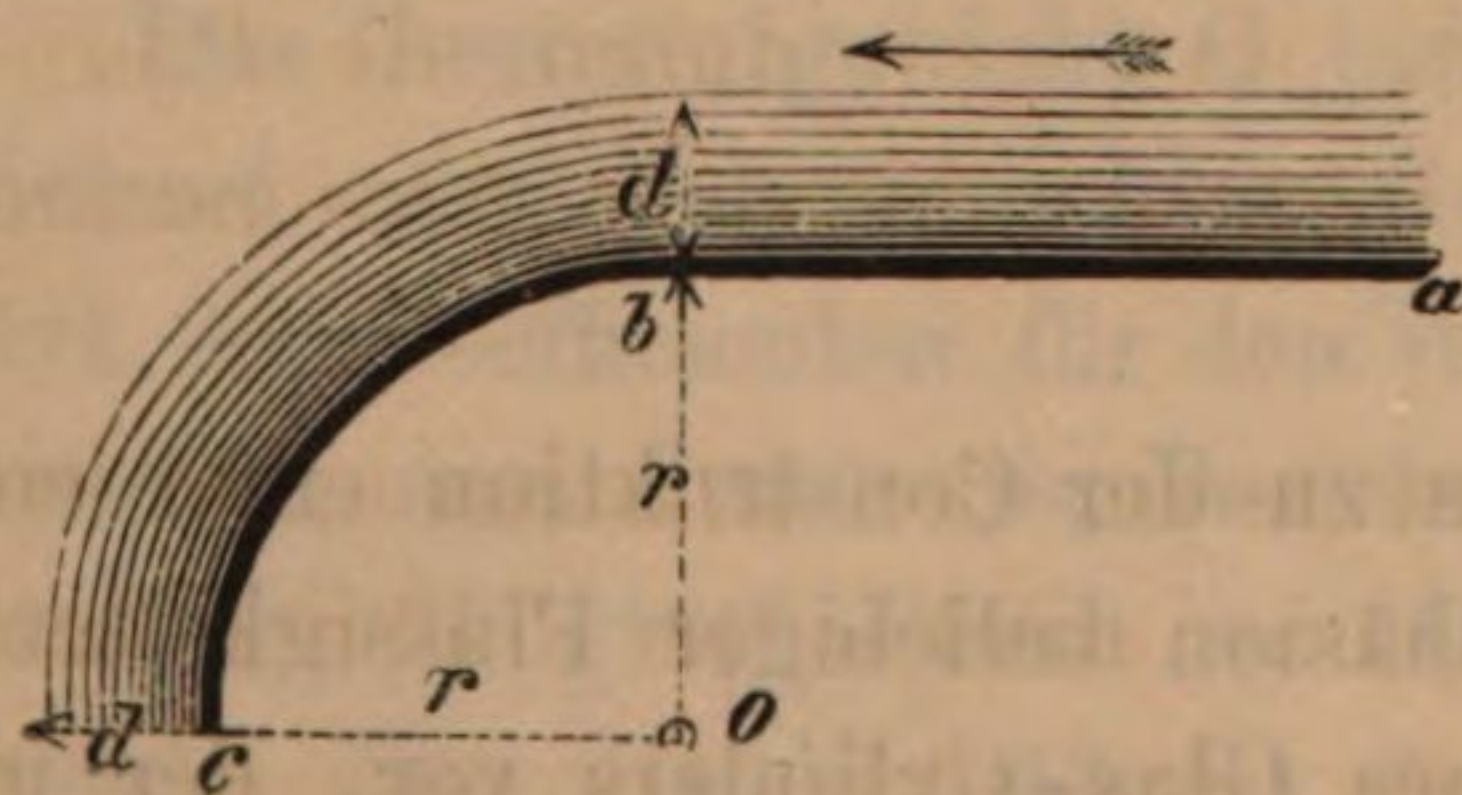
seine Längenaxe mittelst an den Stirnflächen befestigter Zapfen im Lagern leicht beweglich sei. Derselbe möge durch eine verschliessbare Oeffnung mit einer Flüssigkeit Q vom Gewicht $Q\gamma$ so weit gefüllt werden können, dass das Segment J leer bleibt. An einem

bis auf die halbe Länge des Cylinders aufzuschiebenden, und daselbst mit Klemmschraube festzustellenden metallenen Ringe bb , befinden sich die beiden Hebel-Arme aa , mit Haken für zwei Gewichte GG , deren Aufhängepunkte die gleiche Entfernung $a_1 = a_1$ von dem Mittelpunkt O des Cylinders haben. Jedes der Gewichte G wiege $\frac{Q\gamma}{2}$ Pfund. Vor der Füllung des Cylinders werden letztere dann das Gewicht derselben darstellen, und die Axenreibung mit den Gewichten GG des leeren Cylinders, wird gleich der des gefüllten ohne dieselben sein. Hierdurch ist man in der Lage, dieselbe vorher durch ein Zuschlag-Gewicht y an einem der Hebel-Arme im Gleichgewicht zu erhalten und zu messen. Nach Beseitigung der Gewichte GG und nach Einbringung der Füllung $Q\gamma$ wird ein zweites Zuschlag-Gewicht x erforderlich sein, um den Cylinder in drehende Bewegung zu setzen, und den Abscheerungs-Widerstand der Flüssigkeit an der innern Cylinder-Fläche zu überwinden. Das Gewicht x von dem Hebel-Arm a auf den innern Radius des Cylinders reducirt, wird der Kraft R_1 § 31 entsprechen, und da alle übrigen Grössen in dem Ausdrücke für R_1 bekannt sind, oder leicht gemessen werden können, den unbekannten Abscheerungs-Widerstand μ_1 pro Flächen-Einheit ergeben, aus welchem man die Cohäsion s_1 durch die Beziehung $s_1 = \mu_1 \sqrt{2}$ berechnen kann. Die Richtigkeit des gewonnenen Resultates lässt sich nach § 8 prüfen.

§ 33.

Centrifugalkraft und Adhäsion, Ausrundung der Kniee in Rohrleitungen.

Fig. 62.



Ein Wasserstreifen von der Dicke d Figur 62 bewege sich längs einer Fläche ab in der Richtung von a nach b bis c mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v , ohne der Schwerkraft unterworfen zu sein. Von b bis c sei die Fläche nach einem Radius r gekrümmt.

Die Erfahrung lehrt, dass bei einem gewissen Verhältniss von v zu r das Wasser der Einwirkung der Centrifugalkraft nachgebend sich nicht nach c bewegt, sondern sich zwischen b und c in tangentialer Richtung von der Fläche ablöst. In Rohrleitungen entsteht in solchen Fällen ein, die Bewegung beeinträchtigendes, Vakuum, welches auch mit einem Druckhöhen-Verluste verbunden ist. Es soll nun dieses Verhältniss ermittelt werden. Um die Rechnung nicht ohne praktischen Zweck zu erschweren, nehmen wir mit hinreichender Genauigkeit an, dass jede Flächeneinheit des Wasserstreifens von der Dicke d und dem Gewicht $d\gamma$, also der Masse $\frac{d\gamma}{g}$ durch seine Cohäsion s an der Fläche festgehalten, dagegen mit der Centrifugalkraft $P = \frac{mv^2}{r_1}$ sich davon zu entfernen bestrebt sei. Im Gleichgewichtszustande muss mithin

$$P = s = \frac{mv^2}{r_1} = \frac{d\gamma v^2}{g(r + \frac{d}{2})} \text{ sein.}$$

Erweitern wir unsere ursprünglichen Voraussetzungen noch dahin, dass wir noch eine dritte Kraft z pro Flächeneinheit als wirksam annehmen, welche dieselbe entweder vom Wasser ab oder demselben zutreiben, also eben sowohl positiv wie negativ sein kann, so wird

$$s \pm z = \frac{2d\gamma v^2}{g(2r + d)} \text{ und } r = \frac{d(2\gamma v^2 - (s \pm z)s)}{2(s \pm z)g}.$$

Der Bruch $\frac{(s \pm z)s}{2(s \pm z)g}$ hat, da $s = 0,73$ und $2g = 62,5$ nur den Werth $0,011'$, und kann füglich vernachlässigt werden. Dann ergibt sich

$$1) r = \frac{d\gamma v^2}{g(s \pm z)}.$$

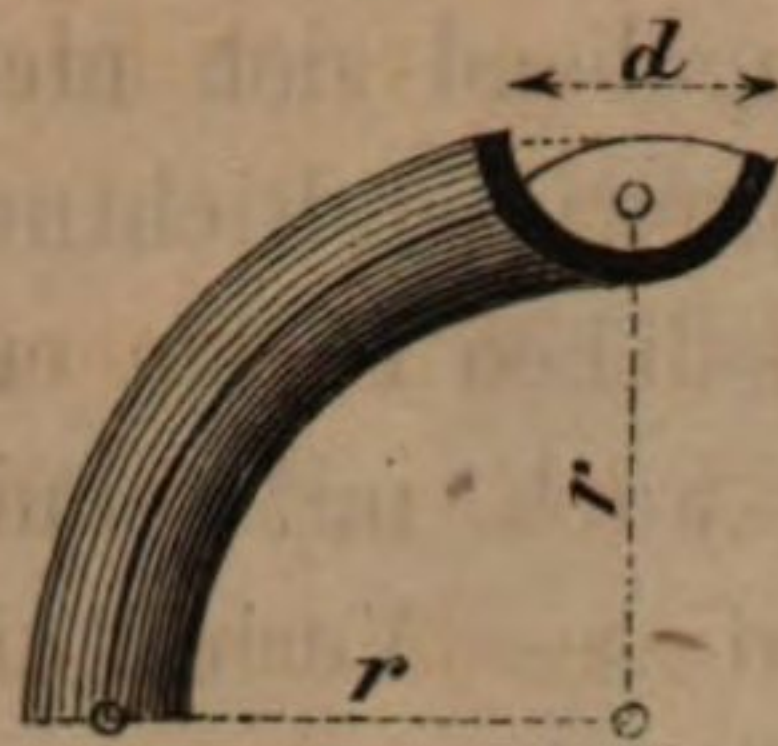
Für $z = 0$ wird $2) r = \frac{d\gamma v^2}{gs} = 2,71 dv^2$,

wenn man die Zahlenwerthe einsetzt.

Gleichung 2 passt für die Seitenwände gekrümmter Wasserleitungen, in welchen der Seitendruck des Wassers in normaler Richtung auf die Bewegung $= 0$ ist, wie dies bei einem gewissen Verhältniss der Geschwindigkeit zum Wasserstande der Fall sein muss. In geschlossenen Rohrleitungen kann die Bewegung ebensowohl durch Zug von der Ausmündung, als durch Druck von der Einmündung erhalten werden, daher z ebensowohl positiv als negativ werden, was sich durch die Piezometerstände erkennen lässt. Gleichung 1 wird daher hier Anwendung finden.

Nicht nur für quadratische, sondern auch für kreisrunde Rohr-Querschnitte berechnet sich die Cohäsion, mit welcher der halbe Inhalt der Längeneinheit in normaler Richtung auf den Durchmesser d

Fig. 63.



Figur 63 an der Wendung haftet auf

$$ds + 2 \cdot \frac{d}{2} \mu = d(s + \mu),$$

die Masse des halben Inhaltes für kreisförmige Querschnitte auf $\frac{d^2 \pi \gamma}{8g}$ und für quadratische auf $\frac{d^2 \gamma}{2g}$. Man erhält demgemäss

3) für kreisförmige Querschnitte $d(s + \mu) = \frac{d^2 \pi \gamma v^2}{8gr}$, woraus $r = 0,62 dv^2$ für pr. Fuss und $r = 6,3 dv^2$ für Metermass.

4) für quadratische Querschnitte $d(s + \mu) = \frac{d^2 \gamma v^2}{2gr}$ und $r = 0,79 dv^2$ für pr. Fuss und $r = 8 dv^2$ für Metermass.

Wenn man beispielsweise in einer Rohrleitung von 3 Zoll Durchmesser, durch die man das Wasser mit 2 Fuss Geschwindigkeit bewegen, die Knie so ausrunden will, dass unter allen Umständen der Querschnitt gefüllt bleiben soll, so lange der Druck im Rohre positiv bleibt, so ergibt sich aus Gleichung 3 der Krümmungs-Halbmesser auf $0,62 \cdot 4 \cdot 4 = 0,62$ Fuss oder 7,4 Zoll, und zwar bis zum Schwerpunkte der halbkreisförmigen Querschnittsfläche gemessen. Bei grössern Geschwindigkeiten müssen die Krümmungs-Halbmesser mit dem Quadrate derselben zunehmen.

Viertes Abschnitt.

Die Widerstands-Arbeit des bewegten Wassers.

§ 34.

Äusserer Widerstand.

Wenn während jeder Zeiteinheit eine gewisse constante Wassermenge Q durch einen von ebenen Wandungen eingeschlossenen cylindrischen oder prismatischen Raum von der Länge l , dem Querschnitte a und dem Umfange b mit der gleichförmigen und in allen Schichten gleichen Geschwindigkeit v fliesst, so drückt sich die auf Ueberwindung des Abscheerungs-Widerstandes an den benetzten Wandungen durch die lebendige Kraft der bewegten Wassermasse während der Zeiteinheit verrichtete Arbeit, welche wir mit äusserer Widerstands-Arbeit A_{ar} bezeichnen wollen, wie dies keines weitem Beweises bedarf, durch das

Produkt aus dem Abscheerungs-Widerstande μlb in die Geschwindigkeit v , mit welcher derselbe überwunden wird, oder in den Weg v , welchen derselbe während der Zeiteinheit zurücklegt, mit μlbv aus.

Es muss hierbei der beschleunigenden Kraft P auf die Wassermenge Q eine gewisse Widerstands-Kraft R entgegen gewirkt haben, welche, wie sich im nächsten Abschnitte ergeben wird, keinesweges identisch mit dem Quotienten $\frac{A_{ar}}{v} = \frac{\mu lbv}{v} = \mu lb$ ist. Wir wollen desshalb fortan letztern Quotienten $\frac{A_{ar}}{v}$ mit „äussern Widerstand“ W_a bezeichnen.

§ 35.

Innerer und Gesamt-Widerstand.

Wenn es möglich wäre für das bewegte Wasser Leitungen mit absolut ebenen Wandungen herzustellen, deren Unebenheiten mindestens verschwindend klein selbst gegen die unendlich kleine Grösse eines Wasser-Moleküles werden, wäre es ferner denkbar, dass der stetige Zufluss einer Leitung aus einem Reservoir statthabe, ohne dass sich in Folge der Biegsamkeit die einzelnen Theilchen mit verschiedener Geschwindigkeit in Bewegung setzen, auch auf die Weiterschiebung der einzelnen Wasserfäden in der Leitung nicht in allen Querschnitts-Elementen gleichen Druck ausüben und gleiche Beschleunigung erzeugen, so würde die Voraussetzung gleicher Geschwindigkeit aller Wasserschichten, welche in § 34 gemacht worden, auch in Wirklichkeit zutreffen, und man hätte mit der äussern Widerstands-Arbeit A_{ar} auch gleichzeitig die gesammte Widerstands-Arbeit, welche wir mit A_r , sowie den Gesamt-Widerstand, den wir mit W bezeichnen wollen, gemessen.

Stellt man sich beispielsweise in einem prismatischen Längen-Elemente von der Länge l , der Breite 1 und der Höhe T , welches sich im Längen-Profil eines Flussbettes darstellt, die einzelnen übereinander liegenden parallelen Wasserfäden der gleichen beschleunigenden Kraft unterworfen vor, so wirkt am untern Faden der Widerstand μl auf Verzögerung seiner Geschwindigkeit. In Folge dessen müssen die obern Fäden das Bestreben äussern, sich über die untern hinweg zu bewegen und dies Verschiebungs-Bestreben muss in allen Fäden nach der Richtung der Bewegung hin eine gewisse Abspannung erzeugen, mit welcher sie alle nach Verhältniss ihrer Masse und ihrer beschleunigenden Kraft zur Ueberwindung des Boden-Widerstandes beitragen. Sollen schliesslich alle Fäden gleiche Beschleunigung, also auch gleiche Geschwindigkeit erlangen, so ergibt sich aus den Gesetzen der Geomechanik, dass μ_1 die Anspannung irgend eines Wasserfadens in der Tiefe t unter der

Oberfläche $= \frac{ut}{T}$ sein, also von letzterer bis zum Boden von 0 bis μ wachsen muss. Nun behält aber jedes angespannte Wasser-Element das Bestreben bei, wieder in den dem statischen Molekular-Gleichgewichte entsprechenden Zustand der Spannungslosigkeit zurückzukehren. Die geringste Veranlassung zur Voreilung eines untern Wasser-Elementes vor einem obern, stellt diesen Zustand der Spannungslosigkeit wieder her, hebt somit den Widerstand auf und giebt dies Wassertheilchen auf einen Augenblick der alleinigen Einwirkung der beschleunigenden Kraft Preis. Dasselbe wird momentan beschleunigt und durch einen neuen Anspannungs-Impuls gegen die benachbarten Theilchen wieder verzögert. Durch jede auch noch so geringfügige Unebenheit am Boden wird in den dagegen anstossenden Wassertheilchen eine lokale und momentane Pressung aufgesammelt, welcher vorübergehende Ab- und Anspannungen in den obern Schichten und entsprechende stossweise Verschiebungen derselben gegen einander folgen und sich schliesslich der ganzen Masse vom Boden bis zur Oberfläche hin mittheilen müssen. Jede momentane Beschleunigung muss hinter sich ein eben so momentanes Vakuum und vor sich eine Pressung resp. Aufstauung erzeugen. Beide werden selbst bei mit kaum merklicher Geschwindigkeit fliessenden Gewässern an der Oberfläche deutlich wahrnehmbar. Das Vakuum füllt sich durch Nachsinken aus den obern Schichten wieder aus, was man durch zahlreiche trichterartige und durch kleine Wirbelungen markirte Einsenkungen schon bei mässiger Strom-Geschwindigkeit wahrnehmen kann. Als Folge davon tritt eine Verzögerung an der Oberfläche und eine der Grösse der impulsweise schiebenden Massen proportionale Voreilung über der Bodenschicht ein, wie sich solche in der sogenannten Geschwindigkeits-Kurve bei Strombetten in Parabelform darstellt, als Gegenwirkung der Senkungen schliesslich das Wellengeflechte an der Oberfläche und in der ganzen Masse. Aus diesen relativen Verschiebungen der einzelnen Wassertheilchen unter sich entspringt ausser der äussern Widerstands-Arbeit noch eine innere, die unter Umständen sehr bedeutend und grösser als die erstere werden kann.

Zieht man ferner die grosse Biegsamkeit, welche dem Wasser im Zustande des statischen Gleichgewichts und der gänzlichen Spannungslosigkeit eigen ist und erst bei einer gewissen Grösse der Anspannung überschritten wird, in Betracht, so kann man nach den wahrgenommenen Erscheinungen nicht daran zweifeln, dass durch sehr geringe Druckhöhen, auch bei fortgesetzter Bewegung, das stete Bestreben der einzelnen Wassertheilchen, in den ursprünglichen Zustand der Abspannung zurückzutreten, nicht in dem Maasse überwunden wird, dass eine vollständige Abscheerung an den benetzten Wandungen eintritt. Es

wird vielmehr statt derselben eine theilweise Abbiegung oder Ablösung, wie solche § 29 in Betracht gezogen, stattfinden, bei welcher zwar der Cohäsions-Widerstand μ resp. s als Faktor in Wirksamkeit bleibt, aber dessen Arbeit trotzdem verschwindend klein werden kann, weil seine in der Krafrichtung zurückgelegten Wege nicht nur erheblich kleiner als die mittlere Geschwindigkeit des Wassers, sondern unter Umständen verschwindend klein werden können. In Leitungen ferner, bei welchen die Unebenheiten der Wandungen schon in einen beträchtlichen Theil des Durchfluss-Profiles hineinragen, wird, wie dies bereits § 28 ausgeführt, auch die Beschaffenheit der Wandungen von merklichem Einfluss auf die Widerstands-Arbeit und die davon abhängige Durchfluss-Geschwindigkeit sein. Fast in allen vorkommenden Fällen der Praxis wird derselbe indessen verschwindend klein. Es liegt sonach wohl im Bereiche der Möglichkeit, die wirkliche Widerstands-Arbeit für jeden vorkommenden Fall als Funktion der Grössen μ , $l \tan \varphi$ und der Druckhöhe h durch Rechnung zu bestimmen. Wir fühlen uns indessen einstweilen dieser Aufgabe nicht gewachsen, werden ihre Lösung der Zukunft überlassen und den weniger beschwerlichen Weg der direkten Messung durch Versuche einschlagen.

Einstweilen vermögen wir schon zu übersehen, dass die Gesamt-Widerstands-Arbeit des bewegten Wassers, weil lediglich durch den mechanischen Vorgang der Ueberwindung des äussern Widerstandes erzeugt, auch nothwendig eine Funktion des letztern sein und solchen als Faktor enthalten muss, dass ferner das Zu- und Abnahme-Verhältniss derselben nicht die constanten Grössen μ , b und l , sondern nur das Verhältniss der Gesamtwege des Widerstandes zu dem mittlern Wege des Wassers während der Zeiteinheit berühren kann, als welchen wir in allen Fällen den Quotienten $\frac{Q}{a} = v$ aus der während der Zeiteinheit durch den Querschnitt a fliessenden Wassermenge dividirt durch den letztern, betrachten wollen. Dies Verhältniss kann aber wiederum nur von der beschleunigenden Kraft, welche bei den eintretenden Abspannungen und bei constantem Widerstande die zurückgelegten Wege verkleinert resp. vergrössert, abhängen und wir sind daher vollkommen berechtigt, die gesammte Widerstands-Arbeit als eine Funktion von der Form

$$\text{I) } A_r = A_{ar} f(h)$$

sowie den Gesamt-Widerstand durch

$$\text{II) } W = W_a f(h)$$

auszudrücken, wobei f als Funktionszeichen gilt.

Indem wir also in den nachfolgenden Paragraphen uns darauf beschränken, für verschiedenartig vorkommende Fälle die Grössen A_{ar} und

W_a durch Rechnung zu ermitteln, behalten wir uns die nähere Bestimmung von $f(h)$ auf dem Experimental-Wege vor.

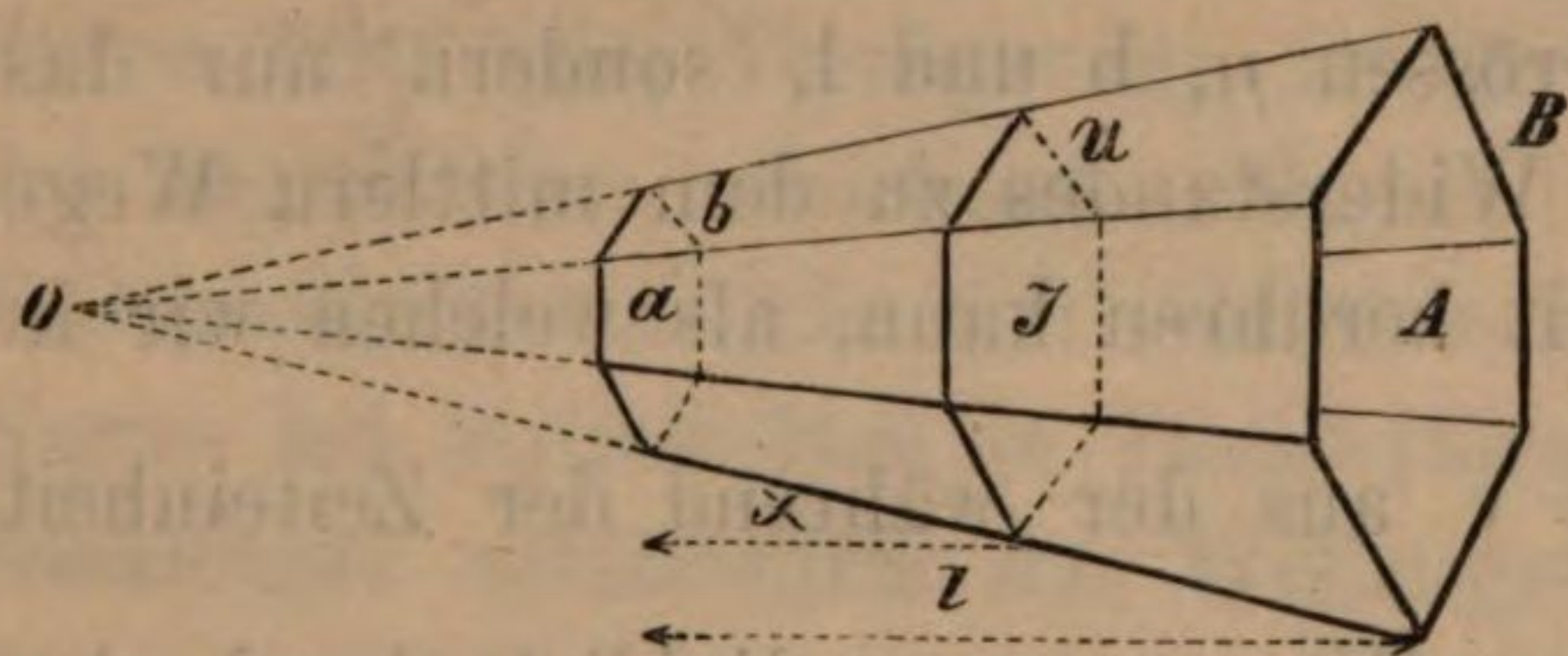
§ 36.

Widerstand in convergenten Röhren.

Die constante Wassermenge Q pr. Zeiteinheit bewege sich durch einen von festen und ebenen Wandungen eingeschlossenen Raum, welcher beim Eintritt den Querschnitt a , den benetzten Umfang b , und beim Austritt den Querschnitt A , den benetzten Umfang B hat. Unter dieser Voraussetzung muss die Wassermenge Q , wenn sie den ganzen Raum ausfüllt, durch denselben entweder mit beschleunigter oder mit verzögerter Geschwindigkeit fließen, mit der v eintreten und der v_1 austreten. Es soll für diesen Fall die Widerstands-Arbeit A_{ar} und der Widerstand W_a ermittelt werden.

Diese Aufgabe ist für jeden einzelnen Fall lösbar, wenn die Aenderungs-Verhältnisse $\frac{db}{dl}$ und $\frac{da}{dl}$ als in den Grenzen zwischen b und B resp. a und A integrirbare Funktionen gegeben sind. Eine einfache und für die praktische Anwendung in den meisten Fällen hinreichende Lösung lässt sie unter der Voraussetzung zu, dass a und A ähnliche Figuren sind und von einer Strahlen-Pyramide tangirt werden, deren Spitzen in eine gewisse Entfernung von a nach 0 (Fig. 64) fällt. In

Fig. 64.



dieser Entfernung werden dann als Funktionen der verlängerten Axe l Umfang und Querschnitt gleichzeitig $= 0$, und es müssen sich nach einem bekannten Lehrsatz der Geometrie in verschiedenen Entfernungen vom ideellen Nullpunkte die Querschnitte wie

die Quadrate der Umfänge verhalten.

Bezeichnet man mit U und J Umfang und Gehalt irgend eines Querschnittes in der beliebigen Entfernung x von dem kleinern Profil a , so muss also die Gleichung statthaben

$$1) \frac{U^2}{J} = \frac{b^2}{a} = \frac{B^2}{A} \text{ oder durch } U \text{ dividirt } 2) \frac{U}{J} = \frac{b^2}{Ua} = \frac{B^2}{UA}.$$

Für U findet sich aber leicht der Werth

$$U = b + (B-b) \frac{x}{l} = \frac{lb + (B-b)x}{1}.$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung 2, so erhält man

$$3) \frac{U}{J} = \frac{lb^2}{alb + A(B-b)x}.$$

Da die Eintritts-Geschwindigkeit im Querschnitte $a = v$ angenommen wurde, so muss die Durchfluss-Geschwindigkeit in $J = \frac{av}{J}$ sein. In dem unendlich kleinen Längen-Elemente dx kann man ferner ohne Fehler das Gefäss als prismatisch annehmen. Dann ergibt sich nach § 34 das Differenzial der Widerstands-Arbeit beim Durchflusse durch das Längen-Element dx

$$d(A_{ar}) = \mu \cdot U \cdot \frac{a}{J} v \cdot dx.$$

Setzt man hierin den Werth für $\frac{U}{J}$ aus Gleichung 3 ein, so wird

$$d(A_{ar}) = \frac{\mu v l b^2 dx}{l b + (B - b)x} \quad \text{und} \quad A_{ar} = \frac{\mu v l b^2}{B - b} \int_{x=0}^{x=1} \frac{(B - b) dx}{l b + (B - b)x}.$$

Die Integration in dem Ganzen von $x = 1$ bis $x = 0$ ergibt

$$A_{ar} = \frac{\mu v l b^2}{B - b} \ln \frac{B}{b} \quad \text{und} \quad 4) \quad W_a = \frac{\mu l b^2}{B - b} \ln \frac{B}{b}.$$

Drückt man den grössern Umfang B als ein n mal Vielfaches des kleinern $= nb$ aus, so ergibt sich anstatt Gleichung 4

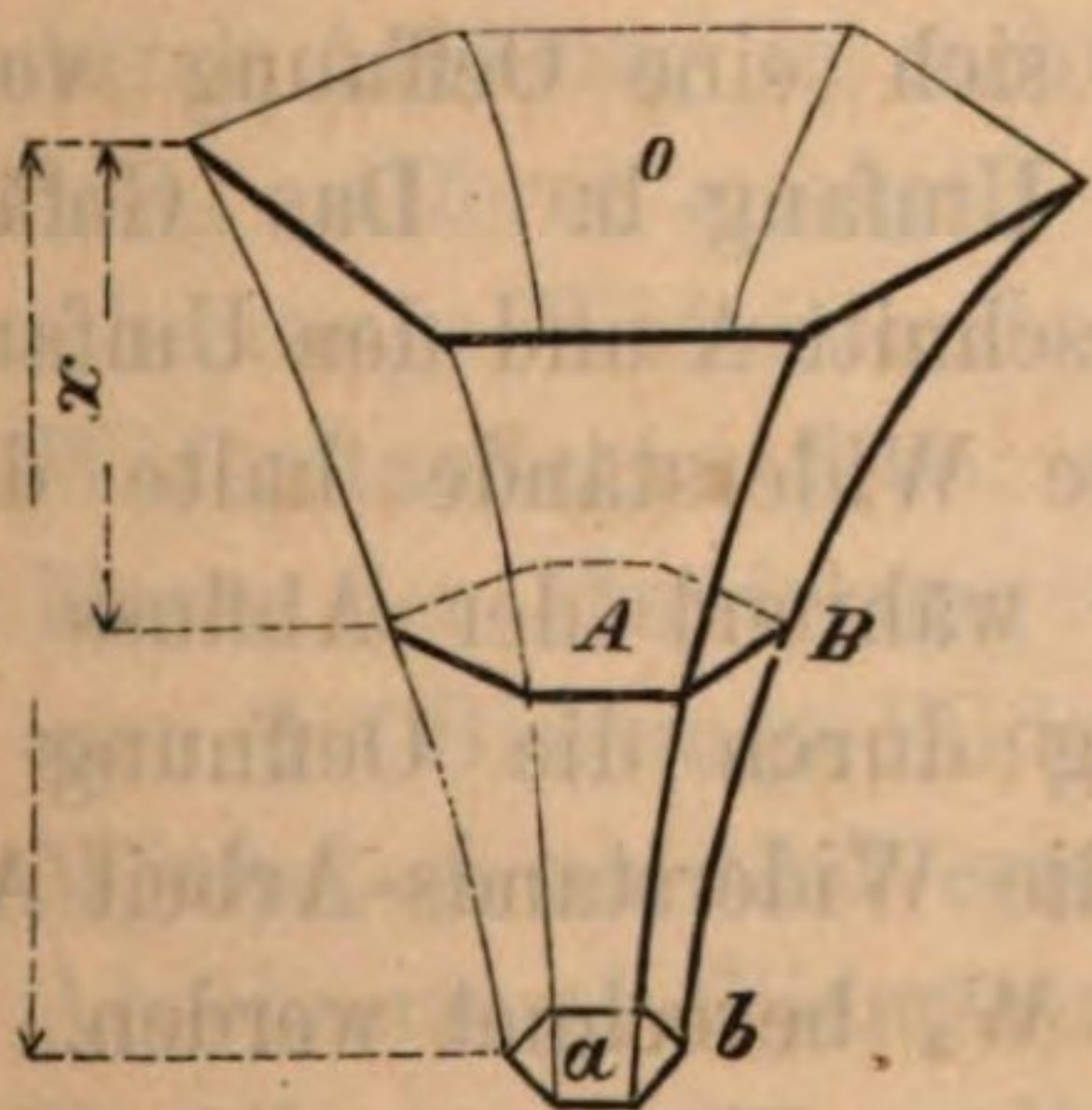
$$5) \quad W_a = \mu l b \frac{\ln n}{n - 1}$$

d. h. man erhält den äussern Widerstand beim Durchflusse durch ein convergentes oder divergentes Längen-Profil, dessen grösster Umfang n mal so gross als der kleinste ist, wenn man den äussern Widerstand des prismatischen Längen-Profiles vom kleinsten Umfange b mit dem Quotienten $\frac{\ln n}{n - 1} = \frac{2,3 \log n}{n - 1}$ multiplicirt. Für $n = \infty$ wird also $W_a = 0$.

§ 37.

Widerstand in trichterartigen Gefässen.

Fig. 65.



In dem trichterartigen Gefässe Figur 65 sei jeder Querschnitt A in der beliebigen Entfernung x von dem obern Querschnitte O

eine Funktion von der Form $A = \frac{a\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

Für $x=0$ wird der obere Querschnitt $A=\infty$ und es entspricht demnach dieser Trichter einem Durchfluss-Gefässe, bei dem die Geschwindigkeiten der einzelnen horizontalen Schichten von der Oberfläche bis zum Boden,

an welchem der Ausfluss stattfindet, wie die Quadrat-Wurzeln aus den

Entfernungen von der Oberfläche, also bei vertikaler Stellung den Fallhöhen zunehmen, weil die Querschnitte in diesem Verhältnisse abnehmen. Es werde wieder vorausgesetzt, dass sämtliche Querschnitte ähnliche Figuren seien, dass also wie § 36, wenn b den Umfang des Querschnittes

a bezeichnet, $\frac{B^2}{A} = \frac{b^2}{a}$ und $B = \frac{b\sqrt{A}}{\sqrt{a}}$ sei.

Das Differenzial der äussern Widerstands-Arbeit beim Durchflusse oder beim Ausflusse unter constant gehaltener Druckhöhe findet sich dann nach Anleitung des § 36

$$d(A_{ar}) = \mu B \cdot \frac{a}{A} \cdot v \cdot dx.$$

Substituirt man hierin für A den vorausgesetzten Werth $\frac{a\sqrt{1}}{\sqrt{x}}$ und für

$B = \frac{b\sqrt{A}}{\sqrt{a}}$, so wird

$$d(A_{ar}) = \frac{\mu b v dx \sqrt{x}}{\sqrt{1}}.$$

Die Integration in den Grenzen $x = 1$ bis $x = 0$ ergiebt

$$A_{ar} = \frac{2}{3} \mu b v l \text{ und } 1) \ W_a = \frac{2}{3} \mu b l.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich für das Abhängigkeits-Verhältniss $A = \frac{a l}{x}$

$$2) \ W_a = \frac{1}{2} \mu b l$$

und für das $A = \frac{a l^2}{x^2}$

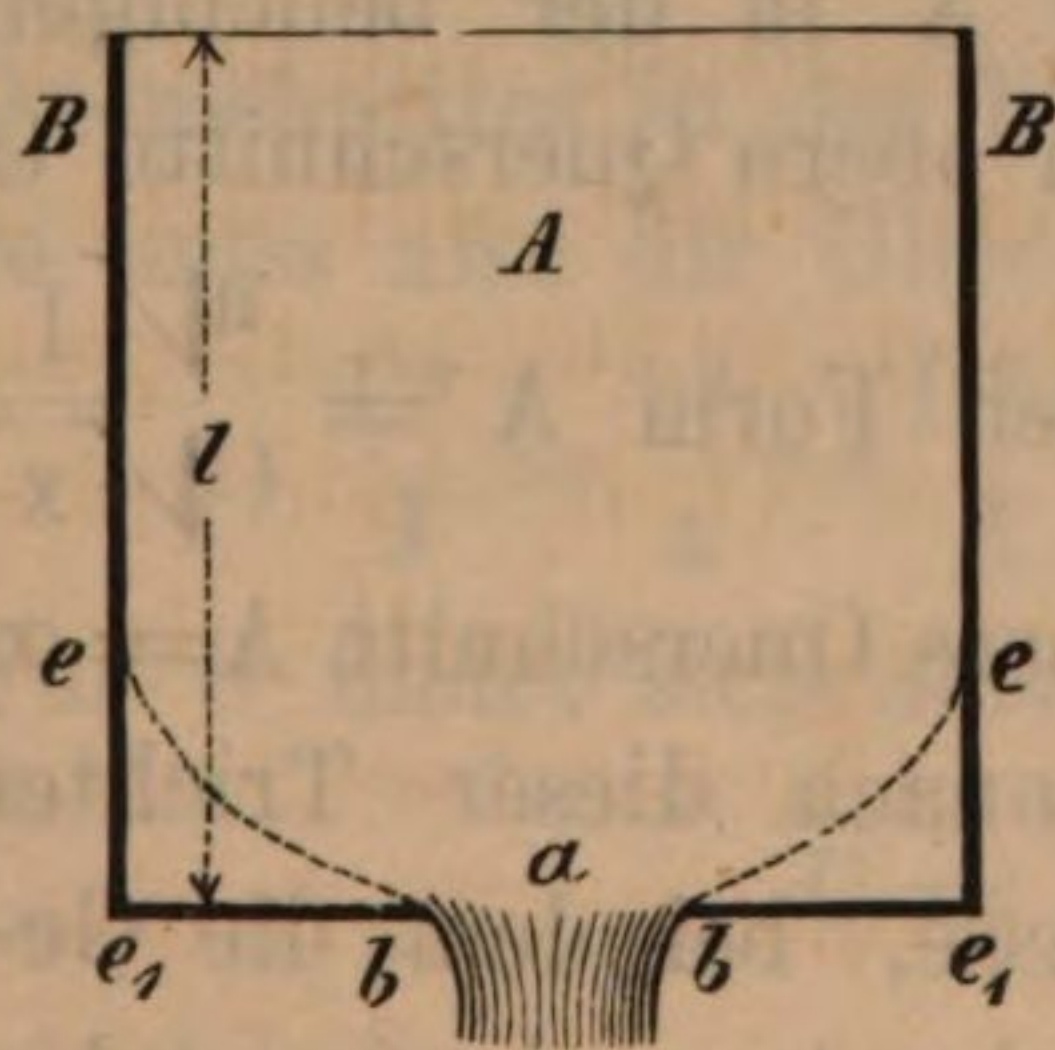
$$3) \ W_a = \frac{1}{3} \mu b l.$$

§ 38.

Widerstand an den Gefässwandungen beim Ausflusse durch Oeffnungen.

In der dünnen Bodenwand eines cylindrischen oder prismatischen

Fig. 66.



Gefässes Figur 66 mit ebenen Wandungen von der Höhe l befinde sich eine Oeffnung vom Querschnitt a und Umfang b . Das Gefäss selber habe den Querschnitt A und den Umfang B . Ein Zufluss ohne Widerstände halte das Gefäss stets gefüllt, während der Abfluss in einheitlicher Richtung durch die Oeffnung a stattfinde. Es soll die Widerstands-Arbeit A_{ar} und der Widerstand W_a berechnet werden.

Man könnte versucht sein, die Abscheerungs-Fläche, welche den Widerstand erzeugt, in dem Mantel der Richtungslinie Beb , anstatt in

der vertikalen Bee_1 des Gefässes zu berechnen, weil die Beobachtung in dem Querschnitte ee_1b nur eine kaum wahrnehmbare Bewegung erkennen lässt. In diesem Falle würde man aber Widerstands-Kräfte in Richtungen messen, welche der auf Ausfluss wirkenden Kraft nicht entgegengesetzt, sondern normal gegen dieselbe gerichtet sind, also keine Einwirkung auf die Ausfluss-Bewegung auszuüben, vielmehr nur der innern Bewegung der einzelnen Wassertheilchen gegen und durch einander entgegenzutreten vermögen. Dass alle diese innern Bewegungen vermöge der vollkommenen Elasticität des Wassers schliesslich von den Wandungen wiedergegeben und ohne andere als Cohäsions-Verluste in der Richtung des Ausflusses nutzbar werden müssen, ist bereits § 18 und § 19 erläutert. Die Summe der Widerstände, welche in der Richtung der Ausfluss-Bewegung dieser entgegentreten, kann also nur durch die Mantelfläche IB von der Wasseroberfläche bis zum Boden gemessen werden.

War die Ausfluss-Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte $a = v$, so muss sie im Querschnitte $A = \frac{a}{A}v$ betragen. Mit letzterer Geschwindigkeit muss also an der Fläche IB , sofern eine vollkommene Abscheerung daran vor sich geht, die Arbeit derselben verrichtet werden. Unter dieser Voraussetzung müsste sich solche auf

$$A_{ar} = \mu \cdot l \cdot B \cdot \frac{a}{A} \cdot v$$

berechnen.

Nun ist aber nur ein Theil der im Gefässe befindlichen Wassermenge der Ausfluss-Bewegung und der darauf wirkenden Kraft ausgesetzt. Die einzelnen Wassertheilchen erlangen demgemäss in einem und demselben Querschnitte je näher der Ausfluss-Oeffnung desto verschiedene Beschleunigungen und ihre Bewegungs-Richtungen erhalten ganz verschiedene Winkel zur Hauptaxe der Bewegung. Wenn auch schliesslich, nachdem das ganze Gefäss sich entleert hat, eine Ablösung von den benetzten Gefässwandungen stattgefunden hat, so darf diese in solchem Falle nicht durch vollständige Abscheerung, sondern sie kann theilweise durch Ablösung in mehr oder weniger normaler Richtung von der Wandung entfernt erfolgen. Wir haben es hier also nicht mit dem Abscheerungs-Widerstande, sondern mit dem erheblich geringern Biegungs-Widerstande zu thun, wie überall da, wo nur der Theil einer grössern Masse der Einwirkung einer Kraft unterworfen wird. Nach § 10 nehmen die Biegungs-Widerstände mit den Cotangenten der Verschiebungswinkel φ_1 ab, und erreichen für den Werth $\varphi = 39^\circ 48'$ die Grösse des Abscheerungs-Widerstandes μ . Nun findet man aber, dass bei gleicher Voreilung der innern Wassertheilchen über der Oeffnung vor den äussern an der Gefässwand, mit welchen sie biegsame Molekül-Ketten bilden,

deren Enden von letzterer festgehalten werden, die Verschiebungs-Winkel umgekehrt wie die Entfernungen von der Gefässwand wachsen. Wenn d den mittlern Durchmesser der Oeffnung und D den des Gefässes bezeichnet, wird man also die vorhin berechnete Widerstands-Arbeit mit dem Quotienten $\frac{d}{D}$ oder nahezu $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}}$ multipliciren müssen, um die wirklich verrichtete Widerstands-Arbeit zu erhalten, weil für den Werth $d = D$ oder $a = A$ die letztere der hypothetisch berechneten völlig gleich wird. Man erhält somit

$$1) A_{ar} = \mu l B v \cdot \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ und } 2) W_a = \mu l B \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Für kreisrunde und quadratische Oeffnungen und Gefässe von den Durchmessern resp. Seiten d und D wird $\frac{B}{A} = \frac{4}{D}$ und $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

Für diese speciellen Fälle ergibt sich durch Substitution in Gleichung 1 und 2

$$3) A_{ar} = \mu l B v \cdot \frac{d^3}{D^3}$$

$$4) W_a = \mu l B \frac{d^3}{D^3} \text{ oder } \frac{4\mu a l d}{D^2}.$$

Man erhält also nach Gleichung 4 den Widerstand beim Durchflusse durch ein Rohr von der Länge l und dem Umfange B , dessen Endfläche nicht ganz geöffnet ist, sondern nur eine Oeffnung vom Durchmesser d enthält, während das Rohr den grössern Durchmesser D hat, wenn man den Widerstand eines ganz geöffneten Rohres von gleichen Dimensionen mit der 3ten Potenz des Quotienten $\frac{d}{D}$ aus dem Oeffnungs- und Rohr-Durchmesser multiplicirt.

§ 39.

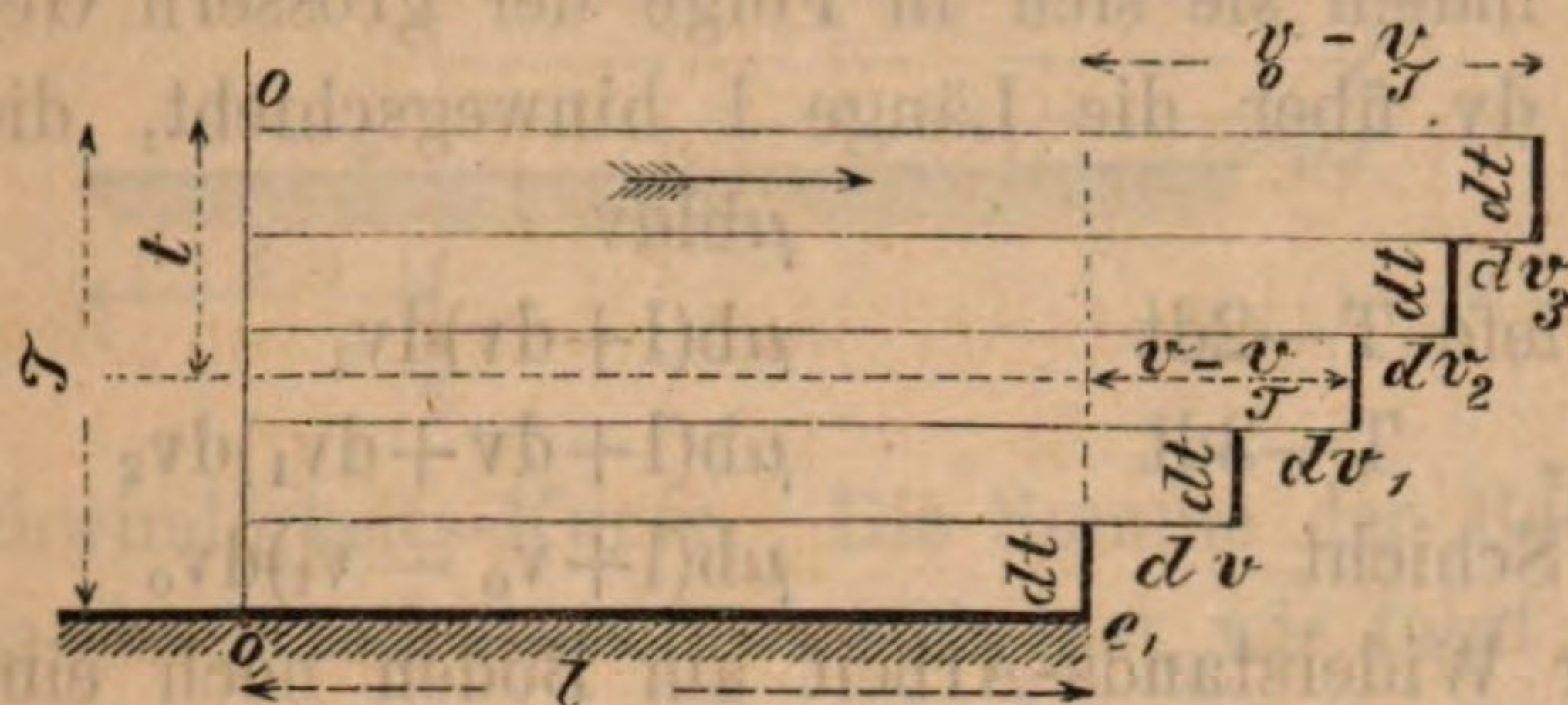
Da der Abscheerungs-Widerstand μ eine Funktion der absoluten Festigkeit s von der Form $s\sqrt{2}$ ist, so muss derselbe 0 werden, wenn s durch Einwirkung einer anderweiten Kraft aufgehoben wird. Bewegt sich das Wasser in einer convexen Bogenrinne mit der Geschwindigkeit v , so kann es vorkommen, dass die Centrifugalkraft $P = \frac{mv^2}{r}$ gerade so gross wie s oder ein Theil davon wird. In diesem Falle kann also auch in dem benetzten Umfange kein Abscheerungs-Widerstand, oder nur der entsprechende Theil eines solchen wirksam werden. Dieser Fall wird überall da eintreten, wo Wassertheilchen in Folge erhaltenen Impulses von Kräften, die in verschiedenen Richtungen wirken, sich in convex gekrümmten Bahnen bewegen, wenn die letztern durch sie berüh-

rende Wandungen eingegrenzt werden, insbesondere beim Ausflusse durch vollkommen ausgerundete Mundstücke, die sich der natürlichen Form des contrahirten Strahles anschliessen.

§ 40.

Voreilungs-Widerstand in Leitungen und Flussbetten.

Fig. 67.



Figur 67 stelle den Längen-Querschnitt durch ein Gerinne oder den Theil eines Flussbettes von der Länge l vor. Das Wasser durchflüsse die ganze Länge l mit der gleichmässigen Tiefe T in der Richtung von

o_1 nach e_1 und zwar in jeder als unendlich dünn zu denkenden horizontalen Schicht von der Dicke dt mit von der nachfolgenden verschiedener aber gleichmässiger Geschwindigkeit. V_0 bezeichne ein für alle Mal die Geschwindigkeit an der Oberfläche, v_T die am Boden, v_m die mittlere, v_x die Maximal-Geschwindigkeit und v die einer Schicht in der beliebigen Tiefe t unter der Oberfläche. V_0 soll hier mit v_x identisch angenommen werden. Die Breite des fließenden Wasserstreifens in der Sohle o_1e_1 soll b und dabei vorausgesetzt werden, dass die rechts und links fließenden Streifen in jeder horizontalen Schicht gleiche Geschwindigkeit mit denen in der Breite b fließenden haben, also vermöge ihrer Cohäsion auf die Bewegung der letztern weder fördernd noch hindernd wirken.

Wenn wir im § 35 auch übereingekommen sind, die Gesamtwiderstands-Arbeit als ein Produkt des benetzten Umfanges in die mittlere Geschwindigkeit und einer gewissen Funktion der Druckhöhe zu betrachten, so möchte es in diesem besondern Falle doch von Interesse sein, die Grösse desselben auch mit Rücksicht auf die Voreilung der einzelnen Schichten unter der freilich niemals zutreffenden Voraussetzung zu ermitteln, dass während der Bewegung die ganze Masse über die Biegungsgrenze hinaus gleichmässig und nicht stossweise angespannt war und demgemäss nachstehende Fragen aufzuwerfen.

1) Welche Widerstands-Arbeit verrichtet während der Zeiteinheit die ganze die Länge l durchströmende Wassermenge?

2) Welche Widerstands-Arbeit verrichten die obersten Schichten von der Dicke t unter der Oberfläche für sich allein, abgesehen von ihrem Antheil am Boden-Widerstande?

3) Welche Widerstands-Arbeit verrichtet für sich allein eine unendlich dünne Schicht von der Dicke dt in der Tiefe t unter der Oberfläche ebenfalls abgesehen von ihrem Antheile am Boden-Widerstande?

Die der Dicke des Wasserstreifens dt und der Tiefe t entsprechende Geschwindigkeits-Änderung wollen wir mit dv bezeichnen.

Auflösung zu 1. Die äussere Widerstands-Arbeit A_{ar} in Folge der stattfindenden Abscheerung über dem Boden berechnet sich nach § 34 auf $\mu b v_T$. Ausserdem verrichtet die Wassermenge von der Tiefe $T-dt$ unter der Oberfläche, indem sie sich in Folge der grössern Geschwindigkeit um den Weg dv über die Länge l hinwegschiebt, die innere Widerstands-Arbeit

	$\mu b l dv$
ferner die Schicht von der Tiefe $T-2dt$	$\mu b (l+dv) dv_1$
" " " " " " $T-3dt$	$\mu b (l+dv+dv_1) dv_2$
u. s. w., endlich die oberste Schicht	$\mu b (l+v_o - v_t) dv_o$

Es wird also ausser der Widerstands-Arbeit am Boden noch eine solche innerhalb der einzelnen Schichten verrichtet, deren Differenzial sich ganz allgemein darstellt durch

$$d(A_{ir}) = \mu b (l + v - v_T) dv.$$

Das Integral in den Grenzen $v = v_o$ bis $v = v_T$ genommen ergiebt $A_{ir} = \mu b l (v_o - v_T) + \frac{1}{2} \mu b (v_o^2 - v_T^2) - \mu b (v_T v_o - v_T^2)$ und demgemäss die gesammte Widerstands-Arbeit

$$1a) A_r = \mu b l v_o + \frac{1}{2} \mu b (v_o^2 - v_T^2) - \mu b (v_T v_o - v_T^2).$$

Für Leitungen von einigermaßen erheblicher Länge und Geschwindigkeiten unter 3 M. wird die Summe der beiden letzten Glieder, wie leicht ersichtlich, verschwindend klein, und es kann daher gesetzt werden

$$1b) A_r = \mu b l v_o.$$

Auflösung zu 2. Vorstehendem Ausdruck entsprechend berechnet sich die Widerstands-Arbeit in den untern Schichten über dem Boden zwischen t und T auf $\mu b l v$. Die Differenz $\mu b l v_o - \mu b l v$ ergiebt also die innere Widerstands-Arbeit in den obern Schichten von der Dicke t unter der Oberfläche

$$2) A_{ir} = \mu b l (v_o - v).$$

Auflösung zu 3. Die Widerstands-Arbeit der Schicht dt in der Tiefe t unter der Oberfläche ergiebt sich, wenn man von der gesammten Arbeit, die der untern Schichten zwischen t und T und die der obern zwischen o und $t-dt$ abzieht auf

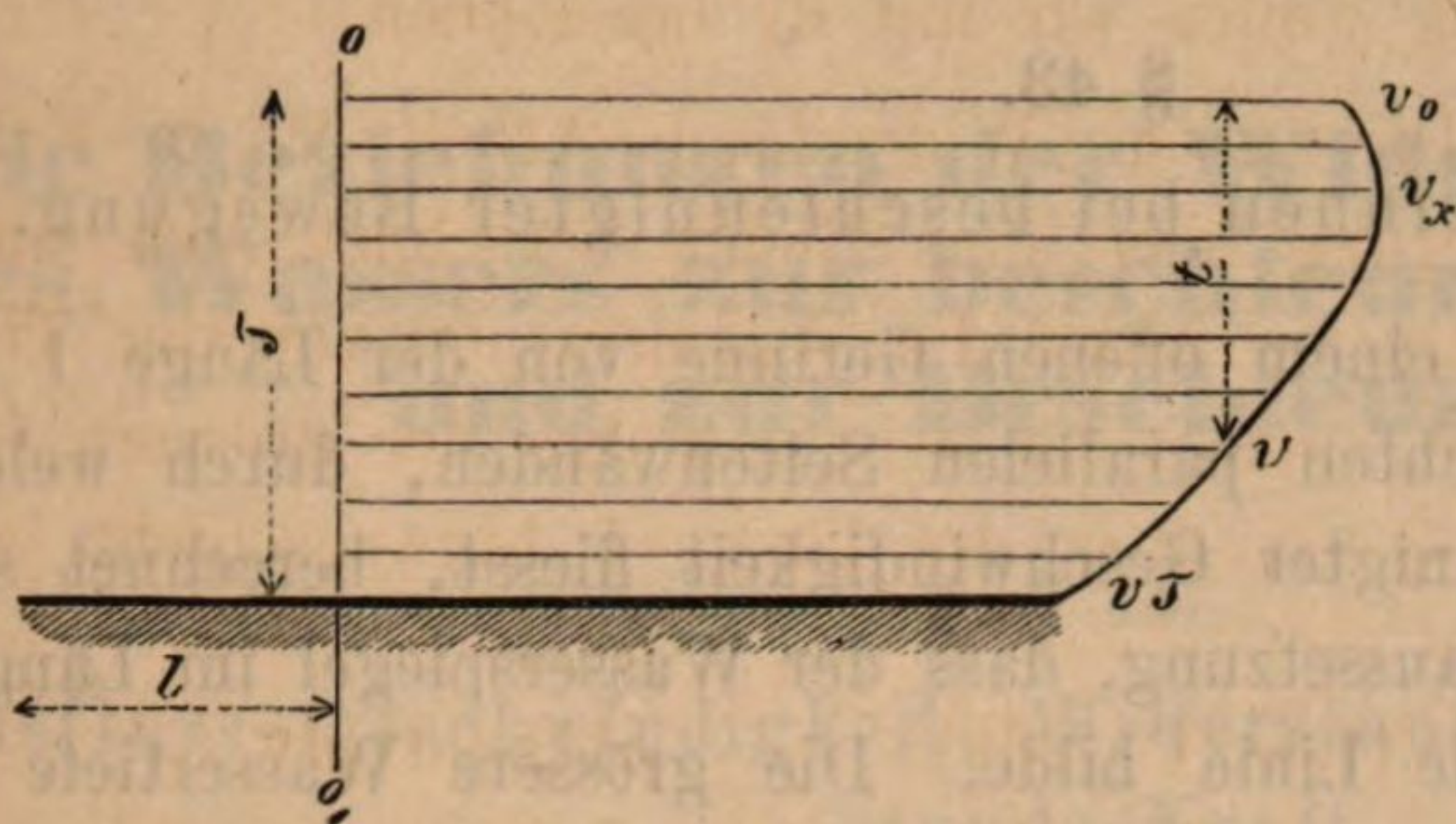
$$3) A_{ir} = \mu b l dv.$$

Für $dv = 0$ wird selbstverständlich auch $A_{ir} = 0$.

§ 41.

Stellt man in Figur 68 durch auf die Abscissen-Axe 00_1 von der Länge der Tiefe T senkrechte Ordinaten die während der Zeiteinheit

Fig. 68.



von den verschiedenen Wasserschichten in einem Flussbette von der Länge l zurückgelegten Wege, also deren verschiedene Geschwindigkeiten dar, so findet man in der krummen Linie $v_0 v_x v v_T$ die sogenannte Ge-

schwindigkeits-Kurve. Die Summe der Boden- und Voreilungs-Widerstands-Arbeit berechnet sich hier wie folgt:

- Zwischen v_x und v_T nach § 40 Gleichung 1b auf $\mu b l v_x$.
- Zwischen v_x und v_0 nach § 40 Gleichung 2 auf $\mu b l (v_x - v_0)$.

Die Summe ergibt

$$1) A_r = \mu b l (2v_x - v_0).$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Schichten zwischen v_0 und v_x hier keinen Antheil an der Boden-Widerstands-Arbeit haben können. Dass sie aber trotzdem nicht beschleunigt werden, kann nicht anders geschehen, als dadurch, dass Wassertheilchen stetig von v_0 nach v_x niedersinken.

§ 42.

Stellt Figur 69 in analoger Weise wie Figur 68 die Geschwindigkeits-Kurve eines horizontalen, zwischen zwei vertikalen ebenen Wandungen eines Gerinnes von der Länge l fließenden Wasserstreifens von der Dicke b dar, so berechnet sich unter der Voraussetzung, dass der oberhalb und unterhalb fließende Streifen die gleiche Geschwindigkeit hat,

für diesen Fall nach dem Vorigen

$$1) A_r = 2\mu l b v_x.$$

Denkt man sich dagegen unter Figur 69 den Längen-Durchschnitt durch eine ganz von Wandungen eingeschlossene Rohrleitung vom Umfange B , so erhält man sehr annähernd

$$2) A_r = \mu \cdot l \cdot B \cdot v$$

unter v die mittlere Geschwindigkeit verstanden.

Bei der Bewegung in Rohrleitungen also bleibt die Voreilung der innern Kernschichten, die desto wahrscheinlicher wird je kürzer die Leitung, je grösser die Druckhöhe und der Durchmesser der Leitung werden, ohne Einfluss auf den Werth der Gesamt-Widerstands-Arbeit.

§ 43.

Widerstand in Gerinnen bei beschleunigter Bewegung.

Der Widerstand in einem offenen Gerinne von der Länge l und der Breite b mit senkrechten parallelen Seitenwänden, durch welches das Wasser mit beschleunigter Geschwindigkeit fliesst, berechnet sich, wie folgt, unter der Voraussetzung, dass der Wasserspiegel im Längenprofil nahezu eine gerade Linie bilde. Die grössere Wassertiefe am Anfange des Gerinnes sei t_2 , die kleinere am Ende desselben t_3 . Die kleinere Geschwindigkeit v , die grössere V . Die Widerstands-Arbeit auf dem Boden wird dann

$$1) A_{ar1} = \mu b l \frac{V + v}{2}.$$

Das Differenzial der Widerstands-Arbeit an den beiden Seitenwänden in der Entfernung x und bei der Wassertiefe y

$$d(A_{ar2}) = 2\mu y dx V \cdot \frac{t_3}{y} = 2\mu V t_3 dx.$$

Das Integral von $x = 0$ bis $x = l$ giebt

$$2) A_{ar2} = 2\mu V t_3 l.$$

Die Summe von 1 und 2 wird

$$A_{ar} = \mu l \left(2V t_3 + \frac{b}{2} (V + v) \right).$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch die grössere Geschwindigkeit V , so erhält man

$$W_a = l \left(2t_3 + \frac{1}{2}b \left(1 + \frac{v}{V} \right) \right)$$

oder da $\frac{v}{V} = \frac{t_3}{t_2}$ ist

$$3) W_a = \mu l \left(2t_3 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \frac{t_3}{t_2} \right).$$

Bezeichnet man den gesuchten Widerstand kurz mit $\mu l p_m$ und begreift unter p_m den mittlern Umfang des Gerinnes, welcher dafür in Rechnung gebracht werden muss, hat man also

$$4) W_a = \mu l p_m$$

$$5) p_m = 2t_3 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \frac{t_3}{t_2}.$$

Für $t_3 = t_2$ wird in Gleichung 5 p_m selbstverständlich $2t_3 + b$.

Fünfter Abschnitt.

Die Beziehungen der Widerstands-Arbeit des Wassers zur beschleunigenden Kraft und zur Beschleunigung.

§ 44.

Ausfluss-Geschwindigkeit, Widerstands-Arbeit und Widerstands-Kraft.

Auf eine Masse m , welche sich in Ruhe befinde, fange gleichzeitig eine beschleunigende Kraft P und eine der Richtung derselben entgegengesetzte verzögernde Kraft R einzuwirken an. P werde grösser als R gedacht. Dann wird die Masse m mit der Kraft $P - R$ beschleunigt werden, also die Beschleunigung $\frac{P - R}{m} = (p - r)$ erlangen, wenn wir mit p die Beschleunigung, welche die Masse m unter alleiniger Einwirkung der Kraft P , und mit r diejenige, welche sie unter alleiniger Einwirkung der Kraft R erlangen würde, bezeichnen.

Da wir bei Anwendung dieser geomechanischen Beziehung auf die Hydraulik unter v den Geschwindigkeits-Zuwachs, welchen eine während jeder Zeiteinheit sich von Neuem in Bewegung setzende Wassermenge Q von der Masse m am Ende jeder Sekunde erhält, also deren Beschleunigung $(p - r)$ und unter m folglich die während der Zeiteinheit effektiv ausfliessende Masse verstehen müssen, so können wir jetzt schon $(p - r) = v$, und die Zeit $= 1$ setzen, also schreiben

$$1) \quad v = \frac{P - R}{m}$$

Es bleibt uns nunmehr noch übrig, in dieser Gleichung die Grösse der gewissermassen ideellen Widerstands-Kraft R durch die in Abschnitt IV bekannt gewordene Widerstands-Arbeit A_r auszudrücken. Diese Kraft R kann aber keine andere sein, als die aus den Beziehungen

$$A_r = \frac{mr^2}{2} \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{R^2}{m^2} = \frac{2A_r}{m}$$

zwischen Arbeit, Masse, Beschleunigung und Kraft am Ende der ersten Zeiteinheit nach begonnener Einwirkung und bei eingetretenem Beharrungs-Zustande resultirende

$$2) \quad R = \sqrt{2mA_r}$$

und die dem entsprechende Beschleunigung r , welche sie bei alleiniger Einwirkung der Masse m ertheilen würde

$$3) \quad r = \sqrt{\frac{2A_r}{m}}$$

Die ideelle Kraft R soll nämlich die Bedingung erfüllen, dass ihre Einwirkung auf die Ausfluss-Bewegung auch während jedes als unendlich klein zu denkenden Zeittheilchens die Widerstands-Arbeit überwindet, oder ihr Aequivalent durch Einwirkung auf dieselbe Masse, welcher der Widerstand entgegentritt, erzeugt. War die Widerstands-Arbeit während der Zeiteinheit A_r nämlich proportional dem gleichzeitigen Wege, welchen die ausfliessende Masse zurücklegt, so beträgt sie während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt nur $A_r dt$. Die Arbeit aber, welche die Kraft R bei alleiniger Einwirkung auf die Ausfluss-Bewegung dadurch verrichten würde, dass sie während jeder Zeiteinheit der in Ruhe gewesenen Masse m die Endgeschwindigkeit r ertheilt, berechnet sich auf $\frac{mr^2}{2}$, während der Zeit dt also auf $\frac{mr^2}{2}dt$, weil r als ideelle Ausfluss-Geschwindigkeit hier constant gedacht werden muss, und die ausgeflossene Masse das Produkt aus Querschnitt, Endgeschwindigkeit und Zeit wird. Die Gleichsetzung beider Arbeits-Impulse ergibt

$$A_r dt = \frac{mr^2}{2} dt$$

und auf beiden Seiten mit dt dividirt

$$A_r = \frac{mr^2}{2}$$

wie Gleichung 3 für jeden Zeitraum also auch die Zeiteinheit gültig.

§ 45.

Haupt-Gleichung und Widerstands-Tabelle.

Bezeichnen wir die Arbeits-Geschwindigkeit, welche eine mit dem Querschnitte a aus einem Gefässe ausfliessende Wassermasse ohne Einwirkung von Widerständen unter alleiniger Einwirkung der beschleunigenden Kraft P erlangen würde mit C , so resultirt hieraus eine Ausfluss-Masse $m = \frac{aC\gamma}{g}$, welche in dem Querschnitte a pro Sekunde die Beschleunigung C erlangt. Hieraus berechnet sich leicht die beschleunigende Kraft durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung

$$P = \frac{aC^2\gamma}{g}$$

während sich die Widerstandskraft R , welcher derselben auf die effektiv

ausfliessende Masse $m = \frac{av\gamma}{g}$ entgegenwirkt, durch Gleichung 2. § 44 ergab $R = \sqrt{2mA_r}$, also wenn man hier für m den Werth einsetzt

$$R = \sqrt{\frac{2av\gamma A_r}{g}}$$

Aus Gleichung 1 § 44

$$v = \frac{P - R}{m}$$

erhält man nun, wenn man für P und R obige Werthe, und für m die effektiv ausfliessende Masse $m = \frac{av\gamma}{g}$ einsetzt.

$$v = \frac{C^2}{v} - \sqrt{\frac{2gA_r}{av\gamma}}$$

und auf beiden Seiten mit v multiplicirt auch für $\frac{A_r}{v}$ den Widerstand W eingesetzt

$$1) \quad v^2 = C^2 - v \sqrt{\frac{2gW}{a\gamma}}$$

Wollen wir nun für alle vorkommenden Fälle der Praxis einen Coefficienten ϱ suchen, mit dem wir die theoretische Arbeits-Geschwindigkeit $C = \sqrt{2gh}$ multipliciren müssen, um dadurch die effektive v zu erhalten, so müssen wir $v = \varrho C$ und $C = \frac{v}{\varrho}$ setzen. Selbstverständlich

kann dann ϱ seinen Werth nur innerhalb der Grenzen 0 bis 1 haben. Setzen wir in die zuletzt erhaltene Gleichung $v = \varrho C$ ein, so wird

$$\varrho^2 + \frac{\varrho}{C} \sqrt{\frac{2gW}{a\gamma}} = 1$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt

$$\varrho = \frac{1}{C} \left(\sqrt{C^2 + \frac{gW}{2a\gamma}} - \sqrt{\frac{gW}{2a\gamma}} \right)$$

und wenn man für C den Werth $\sqrt{2gh}$ einsetzt.

$$2) \quad \varrho = \sqrt{1 + \frac{W}{4a\gamma h}} - \sqrt{\frac{W}{4a\gamma h}}$$

worin a der Arbeits-Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ entsprechend nicht den Querschnitt der Ausfluss-Oeffnung, sondern des in einheitlicher Richtung ausfliessenden Strahles bezeichnet, in allen Fällen nämlich, in welchen nicht beide identisch sind, wie beim Ausflusse aus Gefässen mit dünner Wand ohne Mundstücke oder Ansatzrohre.

Die sich aus Gleichung 2 ergebenden Werthe der Widerstands-Coefficienten setzen uns nun in den Stand, durch Versuche insbesondere an Rohrleitungen das Abhängigkeits-Verhältniss des Gesamt-Wider-

standes W von dem äussern Widerstande W_a , welches wir § 35 mit $f(h)$ bezeichnet haben, zu ermitteln. Diese Versuche ergeben auf das Augenscheinlichste die einfache Form

$$f(h) = h^{\frac{2}{3}} \text{ für pr. Fuss,}$$

$$f(h) = 2,165 h^{\frac{2}{3}} \text{ für Meter.}$$

Bezeichnen wir den benetzten Umfang, welcher nach Abschnitt IV für den äussern Widerstand in Rechnung zu bringen ist, fernerhin mit dem dafür gebräuchlichen Buchstaben p , und dessen Länge mit l , so haben wir also für W den allgemeinen Ausdruck

$$3) W = \mu pl h^{\frac{2}{3}} \text{ für pr. Fuss,}$$

$$4) W = 2,165 \mu pl h^{\frac{2}{3}} \text{ für Meter.}$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 2 ein, auch für μ und γ die 13° R. zugehörigen Zahlenwerthe, so ergibt sich schliesslich

$$5) q = 0,045887 \left[\sqrt[3]{474,9 + \frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h}} - \sqrt[3]{\frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h}} \right] \text{ für pr. Fuss u. Pfd.}$$

$$6) q = 0,037734 \left[\sqrt[3]{702,3 + \frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h}} - \sqrt[3]{\frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h}} \right] \text{ f. Meter u. Kilogr.}$$

Für Rohrleitungen vom Durchmesser d ist $\frac{p}{a} = \frac{4}{d}$.

Nach Gleichung 5 und 6 sind nun für verschiedene Werthe von $\frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h}$ resp. $\frac{l}{d^{\frac{3}{2}}h}$ die nachfolgenden Tabellen, die eine für pr. Fuss und Pfund, die anderen für Meter und Kilogramm berechnet, und der Kürze halber mit „Widerstands-Tabellen“ bezeichnet.

Will man nebenstehende Tabellen für Wasser von anderer Temperatur benutzen, so hat man nur nöthig, die sich ergebenden Werthe von p oder l in dem Verhältnisse kleiner oder grösser zu nehmen, als der Quotient $\frac{\mu}{\gamma}$ des Wassers bei dem betr. Temperaturgrade kleiner oder grösser wie $\frac{0,52}{61,74}$ oder $\frac{2,63}{1000}$ ist. Bei 35° R. hat μ beispielsweise nach § 5 den Werth $0,71 \cdot 0,621 = 0,44$ Pfund, während γ nur unerheblich abnimmt. Ergiebt sich nur für den Werth

$$\frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h} = 580, q = 0,387,$$

so würde sich für 35° R. q grösser und zwar 0,410 entsprechend einem Werthe von $\frac{pl}{a^{\frac{3}{2}}h} = 580 \cdot \frac{0,44}{0,52} = 491$ ergeben. Alle zwischen die der Tabelle fallenden Werthe von q lassen sich leicht durch Interpolation auffinden.

Widerstands-Tabelle

für Wasser von 13° R. den pr. Fuss als Maass- und das pr. Pfund
als Gewichtseinheit.

$$C = \sqrt{2gh}, v = eC = e \sqrt{2gh}.$$

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.
$\frac{a^3}{h}$	$\frac{d^3}{h}$	Werthe	$\frac{a^3}{h}$	$\frac{d^3}{h}$	Werthe	$\frac{a^3}{h}$	$\frac{d^3}{h}$	Werthe	$\frac{a^3}{h}$	$\frac{d^3}{h}$	Werthe
oder	für	von	oder	für	von	oder	für	von	oder	für	von
W_a	Rohr-	q	W_a	Rohr-	q	W_a	Rohr-	q	W_a	Rohr-	q
$\frac{a^3}{h}$	leit.		$\frac{a^3}{h}$	leit.		$\frac{a^3}{h}$	leit.		$\frac{a^3}{h}$	leit.	
0,04	0,01	0,992	56	14	0,714	1800	450	0,242	23520	5880	0,070
0,08	0,02	0,987	60	15	0,706	2048	512	0,228	24240	6060	0,069
0,12	0,03	0,984	64	16	0,698	2312	578	0,216	25040	6260	0,068
0,16	0,04	0,982	68	17	0,691	2592	648	0,205	25920	6480	0,067
0,20	0,05	0,980	72	18	0,684	2888	722	0,195	26840	6710	0,066
0,24	0,06	0,978	76	19	0,677	3200	800	0,186	27800	6950	0,065
0,28	0,07	0,976	80	20	0,670	3528	882	0,177	28760	7190	0,064
0,32	0,08	0,974	88	22	0,658	3872	968	0,170	29760	7440	0,063
0,40	0,10	0,972	96	24	0,646	4232	1058	0,163	30800	7700	0,062
0,60	0,15	0,965	104	26	0,635	4608	1152	0,157	31840	7960	0,061
0,80	0,20	0,960	112	28	0,625	5000	1250	0,151	32880	8220	0,060
1,00	0,25	0,955	120	30	0,616	5404	1352	0,145	33960	8490	0,059
1,20	0,30	0,951	128	32	0,607	5832	1458	0,140	35080	8770	0,058
1,40	0,35	0,947	144	36	0,590	6272	1568	0,135	36280	9070	0,057
1,60	0,40	0,944	160	40	0,577	6728	1682	0,130	37640	9410	0,056
2,00	0,50	0,938	180	45	0,559	7200	1800	0,126	39040	9760	0,055
2,40	0,60	0,932	200	50	0,544	7688	1922	0,122	40480	10120	0,054
2,80	0,70	0,926	220	55	0,530	8192	2048	0,118	42000	10500	0,053
3,20	0,80	0,921	240	60	0,516	8720	2180	0,115	43600	10900	0,052
3,60	0,90	0,916	264	66	0,501	9240	2310	0,112	45240	11310	0,051
4,00	1,00	0,912	288	72	0,488	9800	2450	0,109	46920	11730	0,050
4,80	1,20	0,904	312	78	0,477	10360	2590	0,106	49080	12270	0,049
5,60	1,40	0,897	336	84	0,466	10960	2740	0,103	51320	12830	0,048
6,00	1,50	0,895	360	90	0,454	11560	2890	0,100	53600	13400	0,047
6,80	1,70	0,889	392	98	0,443	12360	3090	0,097	58400	14600	0,045
8,0	2,00	0,879	416	104	0,432	12920	3230	0,095	64000	16000	0,043
9,2	2,3	0,870	448	112	0,424	13480	3370	0,093	70800	17700	0,041
10,4	2,6	0,862	480	120	0,413	14080	3520	0,091	78000	19500	0,039
12,0	3,0	0,853	512	128	0,404	14720	3680	0,089	86800	21700	0,037
14	3,5	0,842	580	145	0,387	15440	3860	0,087	102000	25500	0,034
16	4,0	0,833	648	162	0,372	16240	4060	0,085	115200	28800	0,032
18	4,5	0,824	720	180	0,357	17080	4270	0,083	131200	32800	0,030
20	5,0	0,816	800	200	0,341	17960	4490	0,081	152000	38000	0,028
24	6,0	0,801	880	220	0,329	18880	4720	0,079	176400	44100	0,026
28	7	0,787	968	242	0,316	19840	4960	0,077	206000	51500	0,024
32	8	0,774	1040	260	0,307	20320	5080	0,076	244000	61000	0,022
36	9	0,762	1152	288	0,295	20800	5200	0,075	290000	72500	0,020
40	10	0,751	1240	310	0,287	21280	5320	0,074	328000	82000	0,019
44	11	0,740	1352	338	0,277	21760	5440	0,073	364000	91000	0,018
48	12	0,731	1440	360	0,269	22280	5570	0,072	412000	103000	0,017
52	13	0,722	1568	392	0,257	22880	5720	0,071	467000	116000	0,015

Widerstands-Tabelle

für Wasser von 13° R., den Meter als Maass- und das Kilogramm
als Gewichtseinheit

$C = \sqrt{2gh}, v = eC = e \sqrt{2gh}.$

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.	pl	l	Entspr.
$\frac{3}{a\sqrt{h}}$	$\frac{3}{d\sqrt{h}}$	Werthe	$\frac{3}{a\sqrt{h}}$	$\frac{3}{d\sqrt{h}}$	Werthe	$\frac{3}{a\sqrt{h}}$	$\frac{3}{d\sqrt{h}}$	Werthe	$\frac{3}{a\sqrt{h}}$	$\frac{3}{d\sqrt{h}}$	Werthe
oder	für	von	oder	für	von	oder	für	von	oder	für	von
W_a	Rohr-	ϱ	W_a	Rohr-	ϱ	W_a	Rohr-	ϱ	W_a	Rohr-	ϱ
$\frac{3}{\mu a\sqrt{h}}$	leit.		$\frac{3}{\mu a\sqrt{h}}$	leit.		$\frac{3}{\mu a\sqrt{h}}$	leit.		$\frac{3}{\mu a\sqrt{h}}$	leit.	
0,060	0,015	0,992	82,8	20,7	0,714	2664	666	0,242	34800	8700	0,070
0,120	0,030	0,987	88,8	22,2	0,706	3032	758	0,228	35840	8960	0,069
0,176	0,044	0,984	94,8	23,7	0,698	3424	856	0,216	37040	9200	0,068
0,236	0,059	0,982	100,4	25,1	0,691	3836	959	0,205	38320	9580	0,067
0,296	0,074	0,980	106,4	26,6	0,684	4276	1069	0,195	39680	9920	0,066
0,356	0,089	0,978	112,4	28,1	0,777	4736	1184	0,186	41120	10280	0,065
0,416	0,104	0,976	118,4	29,6	0,670	5220	1305	0,177	42520	10630	0,064
0,472	0,118	0,974	130,4	32,6	0,658	5732	1433	0,170	44000	11000	0,063
0,592	0,148	0,972	142,0	34,5	0,646	6260	1565	0,163	45560	11390	0,062
0,888	0,222	0,965	154,0	38,5	0,635	6816	1704	0,157	47080	11770	0,061
1,184	0,296	0,960	165,6	41,4	0,625	7396	1849	0,151	48640	12160	0,060
1,480	0,370	0,955	177,6	44,4	0,616	8000	2000	0,145	50240	12560	0,059
1,776	0,444	0,951	189,6	47,4	0,607	8628	2157	0,140	51880	12970	0,058
2,072	0,518	0,947	213	53,3	0,590	9280	2320	0,135	53640	13410	0,057
2,368	0,592	0,944	237	59,2	0,577	9952	2490	0,130	55680	13920	0,056
2,960	0,740	0,938	266	66,6	0,559	10652	2660	0,126	57720	14430	0,055
3,552	0,888	0,932	296	74,0	0,544	11360	2840	0,122	59880	14970	0,054
4,16	1,04	0,926	326	81,4	0,530	12120	3030	0,118	62120	15530	0,053
4,72	1,18	0,921	355	88,8	0,516	12880	3220	0,115	64480	16120	0,052
5,32	1,33	0,916	391	97,7	0,501	13680	3420	0,112	66920	16730	0,051
5,92	1,48	0,912	426	106,6	0,483	14480	3620	0,109	69400	17350	0,050
7,12	1,78	0,904	462	115,4	0,477	15320	3830	0,106	72600	18150	0,049
8,28	2,07	0,897	497	124,3	0,466	16200	4050	0,103	75880	18970	0,048
8,88	2,22	0,895	533	133,2	0,454	17080	4270	0,100	79280	19820	0,047
10,08	2,52	0,889	580	145	0,443	18280	4570	0,097	86400	21600	0,045
11,84	2,96	0,879	616	154	0,432	19120	4780	0,095	94640	23660	0,043
13,60	3,40	0,870	664	166	0,424	19920	4980	0,093	104800	26200	0,041
15,40	3,85	0,862	712	178	0,413	20840	5210	0,091	115400	28850	0,039
17,76	4,44	0,853	756	189	0,404	21760	5440	0,089	128400	32100	0,037
20,72	5,18	0,842	856	214	0,387	22840	5710	0,087	150800	37700	0,034
23,68	5,92	0,833	960	240	0,372	24000	6000	0,085	170400	42600	0,032
26,64	6,66	0,824	1064	266	0,357	25280	6320	0,083	194000	48500	0,030
29,60	7,4	0,816	1184	296	0,341	26560	6640	0,081	224800	56200	0,028
35,5	8,9	0,801	1304	326	0,329	27920	6980	0,079	260800	65200	0,026
41,6	10,4	0,787	1432	358	0,316	29560	7340	0,077	304800	76200	0,024
47,2	11,8	0,774	1540	385	0,307	30040	7510	0,076	360800	90200	0,022
53,2	13,3	0,762	1704	426	0,295	30760	7690	0,075	428800	107200	0,020
59,2	14,8	0,751	1836	459	0,287	31480	7870	0,074	485200	121300	0,019
65,2	16,3	0,740	2000	500	0,277	32200	8050	0,073	538400	134600	0,018
70,8	17,7	0,731	2132	533	0,269	32960	8240	0,072	609200	152300	0,017
76,8	19,2	0,722	2320	580	0,257	33840	8460	0,071			

§ 46.

Anwendungen.

In Gleichung 2 § 45 findet sich im Wesentlichen das rationale Grundgesetz der Bewegung des Wassers nicht nur, sondern der tropfbaren Flüssigkeiten im Allgemeinen ausgedrückt. Es wird daher schon in diesem Abschnitte von Interesse sein, die Brauchbarkeit der hiernach berechneten Widerstands-Tabelle durch einige Beispiele zu erläutern und zu prüfen.

1) Für den Ausfluss aus Gefässen.

Durch ein 0,028 Fuss weites, glatt polirtes und gehörig ausgerundetes Mundstück von Zinn in dem Boden eines 1 Fuss hohen kreisrunden Zinkgefässes von 0,5 Fuss Durchmesser erhielt Verfasser bei constant gehaltenem Drucke von 12 Zoll den Ausfluss-Coefficienten $\varrho = 0,949$, durch dasselbe Mundstück dagegen unter sonst gleichen Verhältnissen, jedoch in dem Boden eines nur 0,172 Fuss weiten Gefässes $\varrho = 0,910$.

Nach Versuchen von Weisbach ergeben solche Mundstücke aus unbegrenzten Gefässen bei 1 Fuss Druckhöhe einen Ausfluss-Coefficienten von 0,958 entsprechend in Col. 1 unserer Tabelle einem Werthe von $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}} = 0,88$, welcher also hier zunächst als Constante einzusetzen sein wird.

Nach § 33 Gleichung 4 ergibt sich, da l hier mit h identisch $= 1$ wird, für den vorliegenden Fall $\frac{W_a}{\mu a\sqrt[3]{h}} = \frac{4d}{D^2}$. Setzt man nun für d

und D die Werthe bei obigen Versuchen ein, so ergibt sich mit Hinzurechnung der Constante 0,88

für den 1ten Versuch $\frac{W}{\mu a\sqrt[3]{h}} = 1,33$ und dem entsprechend aus der

Tabelle $\varrho = 0,948$,

für den 2ten Versuch $\frac{W}{\mu a\sqrt[3]{h}} = 3,78$ und dem entsprechend aus der

Tabelle $\varrho = 0,906$, also eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung.

2. Für Rohrleitungen.

Es sind hier 52 Versuche von Du Buat, Couplet, Bossut und Gueymard bekannt, welche allen bisher aufgefundenen Näherungs-Formeln zu Grunde gelegt sind. Dieselben finden sich auch in der

Hydromechanik von Rühlmann § 149 mitgetheilt. Dasselbst findet sich auch die Näherungs-Formel von Eitelwein $v = \sqrt{\frac{478h}{1+0,02061 \frac{1}{d}}}$ für

alte par. Zolle und eine neuere Formel von St. Venant

$$v = 114,494 \left(\frac{d}{4} \cdot \frac{h}{1} \right)^{\frac{7}{12}}$$

für Metermaass mitgetheilt. Letztere für par. Zolle umgeformt ergibt $v = 515,1 \left(\frac{d}{4} \cdot \frac{h}{1} \right)^{\frac{7}{12}}$ und soll von allen bekannten Formeln sich am besten den 52 erwähnten Versuchen anschliessen.

Die nachfolgende Tabelle enthält eine vergleichende Zusammenstellung der sich aus den erwähnten Versuchen nach Eitelwein, St. Venant und der Rationaltheorie ergebenden Resultate für franz. Zollmaass. Nach § 22 ist den gemessenen Druckhöhen jedoch die Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,12$ par. Zoll zugesetzt. Ausserdem sind 5 von dem Verfasser selber mit einem kleinen Bleirohr angestellte Versuche in die Tabelle mit aufgenommen.

Beobachter.	No. des Ver- suchs.	l	d	h	v in franz. Zollen			
		in franz. Zollen.			beob- achtet.	Nach der Ratio- nal- theorie.	Nach Eitel- wein.	Nach St. Ve- nant.
Du Buat	1	737	1	0,27	1,6	1,6	2,1	1,6
Couplet	2	84240	5	5,70	2,0	2,5	2,8	2,1
„	3	84240	5	11,45	3,2	3,9	3,9	4,3
Du Buat	4	737	1	0,62	3,6	2,9	3,8	4,3
Couplet	5	84240	5	16,87	4,1	5,2	4,8	4,0
„	6	84240	5	21,20	4,8	5,9	5,4	4,4
„	7	84240	5	24,12	5,2	6,4	5,7	5,0
„	8	84240	5	25,12	5,3	6,7	5,9	5,1
Du Buat	9	138,5	1	0,82	8,7	7,0	9,3	10,5
„	10	737	1	4,32	10,4	9,8	11,1	11,3
„	11	737	1	4,32	10,7	9,8	11,1	11,3
Bossut	12	600	1	4,12	12,2	10,1	12,0	12,3
„	13	2160	1 $\frac{1}{8}$	12,12	12,6	13,4	12,9	13,2
Du Buat	14	737	1	6,05	13,3	12,1	13,2	13,8
Bossut	15	1800	1 $\frac{1}{8}$	12,12	14,1	14,9	14,1	14,6
Gueymard	16	118212	10,16	102,9	14,8	20,9	14,3	14,5
Du Buat	17	737	1	7,90	15,1	14,1	15,2	16,1
Bossut	18	1440	1 $\frac{1}{8}$	12,12	16,1	15,8	15,7	16,1
Du Buat	19	737	1	9,08	16,3	15,4	16,3	17,5
Bossut	20	2160	2,01	12,12	16,4	16,2	15,7	16,7
Du Buat	21	737	1	9,08	16,6	15,4	16,3	17,5
Bossut	22	1800	2,01	12,12	18,3	17,2	17,2	18,5
„	23	2160	1 $\frac{1}{8}$	24,12	18,9	21,3	18,3	19,6
„	24	1080	1 $\frac{1}{8}$	12,12	19,9	17,9	18,0	19,4

Beobachter.	Nr. des Ver- suchs.	l	d	h	v in franz. Zollen.			
		in franz. Zollen.			beob- achtet.	Nach der Ratio- nal- theorie.	Nach Eitel- wein.	Nach St. Ve- nant.
Du Buat	25	737	1	12,44	20,0	19,4	19,1	21,1
Bossut	26	1440	2,01	12,12	20,7	19,4	19,1	21,1
Du Buat	27	737	1	13,82	21,0	20,8	20,1	22,2
Bossut	28	1800	1 $\frac{1}{3}$	24,12	21,0	22,8	20,0	21,9
Du Buat	29	737	1	14,72	21,9	21,5	20,8	23,2
Bossut	30	600	1	12,12	22,3	21,3	20,7	23,4
»	31	720	1 $\frac{1}{3}$	12,12	23,4	22,5	21,8	24,9
»	32	1080	2,01	12,12	23,8	22,5	22,0	25,0
»	33	1440	1 $\frac{1}{3}$	24,12	24,0	24,5	22,2	25,0
»	34	2160	2,01	24,12	24,7	24,6	22,3	24,9
»	35	1800	2,01	24,12	27,5	27,4	24,3	27,8
»	36	1080	1 $\frac{1}{3}$	24,12	28,0	28,9	25,5	29,4
Du Buat	37	737	1	23,82	28,7	30,2	26,5	30,9
Bossut	38	720	2,01	12,12	29,2	26,5	26,2	31,7
Du Buat	39	138,5	1	6,12	29,3	25,2	37,3	36,7
Bossut	40	1440	2,01	24,12	30,9	30,9	27,0	31,7
»	41	360	1 $\frac{1}{3}$	12,12	33,2	29,0	29,6	37,3
»	42	720	1 $\frac{1}{3}$	24,12	34,5	34,6	30,8	37,3
»	43	1080	2,01	24,12	35,8	34,7	30,8	37,4
Couplet	44	43200	18	145,2	39,2	56,1	37,1	44,8
Bossut	45	360	2,01	12,12	40,3	35,0	35,0	47,3
»	46	720	2,01	24,12	43,0	40,9	37,0	47,3
»	47	360	1 $\frac{1}{3}$	24,12	48,5	45,8	41,9	55,9
Du Buat	48	117	1	18,12	58,3	52,3	50,2	77,0
»	49	138,5	1	21,07	58,8	54,2	51,0	76,2
Bossut	50	360	2,01	24,12	58,9	53,8	49,5	71,0
Du Buat	51	117	1	26,79	71,3	66,3	61,1	96,8
»	52	117	1	36,12	84,9	79,9	71,0	115,3
Heinemann	53	230,5	0,236	4,44	7,9	8,6		
»	54	230,5	0,236	11,53	15,8	15,6		
»	55	230,5	0,236	33,34	32,6	31,1		
»	56	230,5	0,236	73,9	50,9	53,2		
»	57	195,8	0,236	164,4	92,8	94,2		

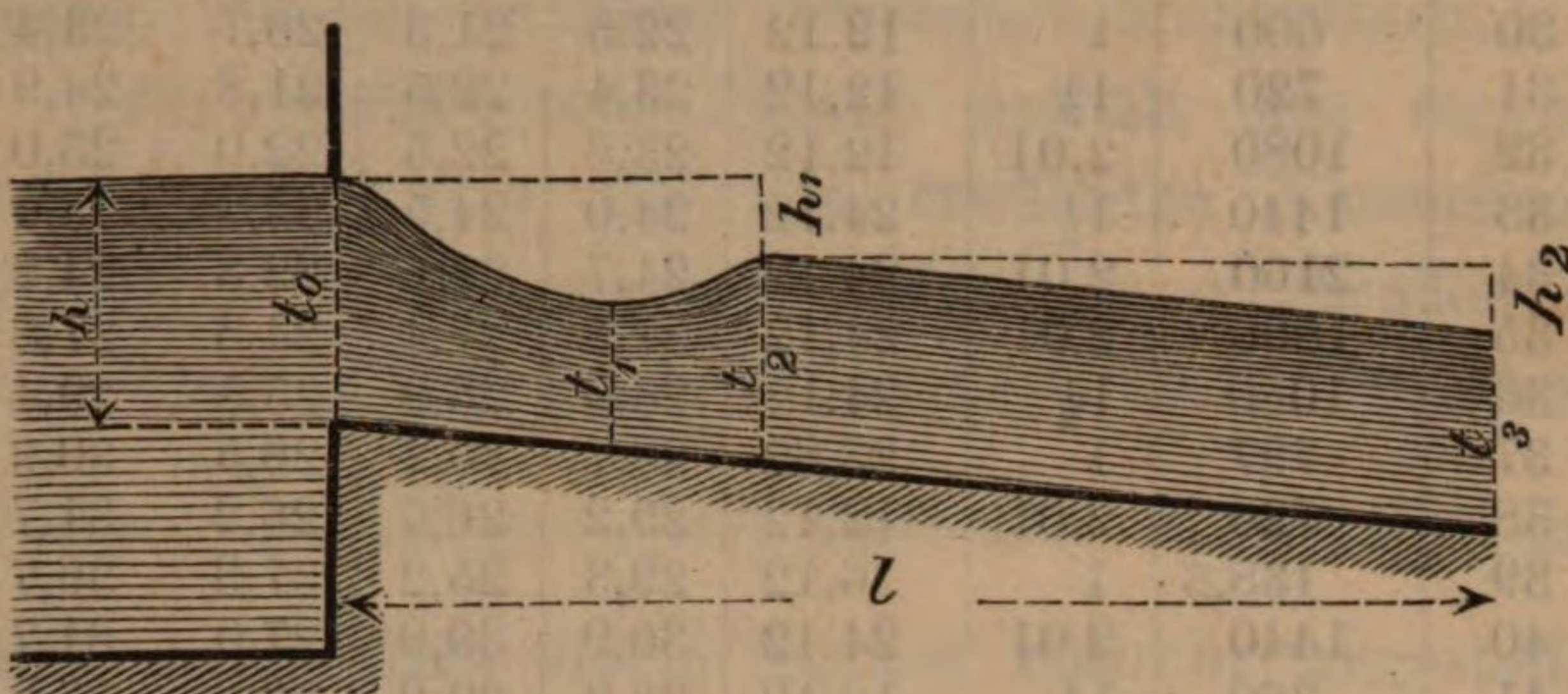
Die sich ergebenden Differenzen sollen in dem Abschnitte, welcher die Bewegung in Rohrleitungen speciell behandeln wird, einer nähern Beleuchtung unterzogen werden. Nur möge hier schon darauf hingewiesen werden, dass die Formeln von Eitelwein und St. Venant grade da die grösste Uebereinstimmung mit den Versuchs-Resultaten ergeben, wo die Messungs-Resultate, insbesondere der kleinen Druckhöhen, am unzuverlässigsten werden. Die Rationaltheorie dagegen ergiebt bemerkenswerthe und ganz consequente Differenzen nur da, wo die ausserordentliche Länge der Leitungen das Vorhandensein von Undichtigkeiten und andern hindernden Umständen, deren Einwirkung nicht hat in Rechnung gestellt werden können, wahrscheinlich macht. Insbesondere üben Undichtigkeiten weniger durch Wasserverluste, als da, wo der grössere Theil der Druckhöhe in der Leitung und nicht im Reservoir

liegt, durch Nachsaugen atmosphärischer Luft eine störende Wirkung auf die continuirliche Fortbewegung aus.

3) Für offene Leitungen in Kanälen.

Hier liegen 23 Versuche von Du Buat an einem künstlichen Kanale von 132 par. Fuss Länge vor, die sich ebenfalls in dem Werke von Rühlmann § 120 S. 300 mitgetheilt finden. Das Wasser trat dabei aus einem Reservoir in den Kanal, wie Figur 70 im Längenprofile skizzirt.

Fig. 70.



In der Du Buat'schen Versuchstabelle finden sich zwar die Werthe von $\frac{h_2}{l}$ des relativen Gefälles, nicht aber die von h_1 angegeben. Letztere müssen daher um

unsere Tabelle auch auf diese Versuche anwenden zu können, durch Rechnung ergänzt werden, was wir ziemlich annähernd durch die Beziehung

$$h_1 = \frac{(1,4 v)^2}{g}$$

bewirken können, indem wir annehmen, dass der Querschnitt des fließenden Wassers in der Einsenkung zwischen Reservoir und Leitung 0,7 des Querschnittes in letzterer betragen habe, demgemäss also im Reservoir noch eine der absoluten Ausfluss-Geschwindigkeit $\frac{v}{0,7} = 1,4 v$ nach § 22

entsprechende Druckhöhen-Differenz $\frac{(1,4 v)^2}{g}$ vorhanden gewesen sein muss. h_1 lässt sich auch, wie sich später ergeben wird, ziemlich übereinstimmend durch $\frac{v^2}{(\rho\beta)^2 2g}$ berechnen, wenn man den Ausfluss-Coeffi-

cient mit Berücksichtigung des Widerstandes im Gerinne 0,510 setzt. Rechnet man ausserdem jeder gemessenen Druckhöhe die Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,012$ pr. Fuss hinzu, und reducirt die hier ebenfalls in franz. Maass angegebenen Grössen auf pr. Maass, so giebt nachfolgende Tabelle eine vergleichende Uebersicht der Versuchs-Resultate mit der

Eitelwein'schen Näherungsformel $v = \sqrt{\frac{h_2 a}{l p}}$ und der Rationaltheorie unter der fernern Voraussetzung nämlich, dass der Widerstand in Kanälen mit ebenen Wandungen seiner Natur nach dem in Rohrleitungen entspreche.

Länge der Leitung = 136,8'.

Nr. des Ver- suchs.	Total- Druck- höhe. h Fuss.	Relatives Gefälle $\frac{h_2}{l}$ in der Leitung.	Werthe von $\frac{a}{p}$	Geschwindigkeit v in Zollen.		
				Beobach- tet.	berechnet	
					nach der Rational- theorie.	nach Eitel- wein.
1	1,015	}	0,124	28,4	28,5	26,4
2	1,053		0,148	29,9	31,3	28,8
3	0,691		0,277	28,0	30,8	28,3
4	0,502		0,153	18,9	19,9	21,0
5	0,528	}	0,187	21,0	22,3	22,8
6	0,571		0,214	23,2	24,5	25,0
7	0,596		0,227	24,4	26,0	25,1
8	0,715		0,305	29,5	32,5	29,0
9	0,760	}	0,332	31,2	34,8	30,2
10	0,812		0,347	33,0	36,8	30,9
11	0,829		0,354	33,6	37,7	31,2
12	0,128		0,132	9,2	7,9	9,5
13	0,135	}	0,174	10,0	9,2	11,0
14	0,163		0,194	12,7	10,8	11,6
15	0,504		0,140	20,9	19,1	19,1
16	0,691		0,273	29,3	31,1	26,6
17	0,247	}	0,140	14,1	12,5	13,4
18	0,149		0,143	9,5	9,0	11,0
19	0,178		0,192	12,5	11,3	12,7
20	0,205		0,252	14,7	13,8	14,6
21	0,225	}	0,304	16,1	16,6	16,0
22	0,0367		0,236	4,7	4,6	5,5
23	0,0417		0,380	5,9	5,7	7,0

Differenzen können hier selbstredend nicht auffallend erscheinen, weil die Total-Druckhöhen nicht genau gemessen, sondern nur hypothetisch berechnet sind. Ausserdem ist bei keinem der bekannten Versuche die Temperatur des Wassers beobachtet, während der Werth von μ von uns überall für 13° R. eingesetzt worden.

§ 47.

Beziehungen der Rationaltheorie zur Bewegung in Flussbetten.

Denken wir uns ein Flussbett von constantem Querprofile und unbegrenzter Länge, und nehmen an, es wäre möglich, dass Wasser dadurch mit einer in der ganzen Länge constanten Geschwindigkeit v abgeführt werde, so muss doch, wenn das Flussbett auch als endlos gedacht werden kann, irgend ein Anfangspunkt desselben vorhanden sein, in welchem das Wasser seine Geschwindigkeit v vermöge der Einwirkung einer ganz bestimmten vom nachfolgenden relativen Gefälle unabhängigen Kraft P_1 erlangt hat. P_1 berechnet sich nach § 45 auf $\frac{av^2\gamma}{g}$ und

wir müssen also die Gesamtheit der beschleunigenden Kräfte nach demselben Paragraphen

$$P = \frac{aC^2\gamma}{g} + \frac{av^2\gamma}{g} = \frac{a\gamma}{g} (C^2 + v^2)$$

setzen, wenn wir dieselbe Entwicklung für den hier vorausgesetzten Fall verfolgen wollen. Es ergibt sich dann analog derselben

$$\frac{P-R}{m} = v = \frac{C^2}{v} + v - \sqrt{\frac{2gA_r}{av\gamma}}$$

woraus folgt

$$1) \ v = C^2 \sqrt{\frac{a\gamma}{2gW}}$$

und für $C^2 = 2gh$ ferner für W den Werth $\mu l p f(h)$ gesetzt

$$2) \ v = \sqrt{\frac{2g\gamma a h^2}{\mu l p f(h)}}$$

Führt man nun für den Bruch $\frac{h}{l}$ das relative Gefälle α ein, und setzt für $2g$, γ und μ die Zahlenwerthe für pr. Fuss und Pfunde, so ergibt sich

$$3) \ v = 86,4 \sqrt{\frac{a\alpha h}{p f(h)}}$$

während die Eitelwein'sche Experimentalformel $v = 90,9 \sqrt{\frac{a\alpha}{p}}$ ergibt. Soll also das bisher vergeblich gesuchte Abhängigkeits-Gesetz für die Geschwindigkeit in Flussbetten bei völliger Unbestimmtheit der Länge derselben nicht nur, sondern damit auch der absoluten Druckhöhe und der bewegenden Kraft, möglich sein, so müsste die höchst merkwürdige Beziehung stattfinden, dass für eine solche Bewegung $f(h) = h$ wird. Dieser Voraussetzung widerspricht aber hinlänglich das Ergebniss der bei 3) mitgetheilten Versuchs-Tabelle.

Man wird vielmehr einstweilen auch hier $f(h) = h^{\frac{2}{3}}$ annehmen müssen, wonach man

$$4) \ v = 86,4 \sqrt[2]{\frac{a\alpha}{p}} \sqrt[6]{\alpha l} = 86,4 \sqrt[3]{\frac{a}{p l} h^{\frac{4}{3}}}$$

für pr. Fusse erhält, und damit in Beziehungen zu dem von Hagen neuerdings auf dem Wege der Wahrscheinlichkeits-Rechnung gefundenen Resultate der Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der sechsten Wurzel des Gefälles, tritt.

Für Metermass ergibt sich

$$5) \ v = 58,7 \sqrt[2]{\frac{a\alpha}{p}} \sqrt[6]{\alpha l} = 58,7 \sqrt[3]{\frac{a}{p l} h^{\frac{4}{3}}}$$

Bei der Berechnung des relativen Gefälles $\alpha = \frac{h}{l}$ muss dann

aber in jedem Falle dem gemessenen Werthe von h die Constante $\frac{s}{\gamma}$ zugesetzt werden.

Entwickelt man h aus Gleichung 4 und 5 so wird

$$6) \ h = 0,001243 \left(\frac{pl}{a} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot v^{\frac{3}{2}}, \text{ für pr. Fussmass.}$$

$$7) \ h = 0,002223 \left(\frac{pl}{a} \right)^{\frac{3}{4}} \cdot v^{\frac{3}{2}}, \text{ für Meter.}$$

Sechster Abschnitt.

Ausfluss durch Oeffnungen in dünner Wand bei constantem Drucke.

§ 48.

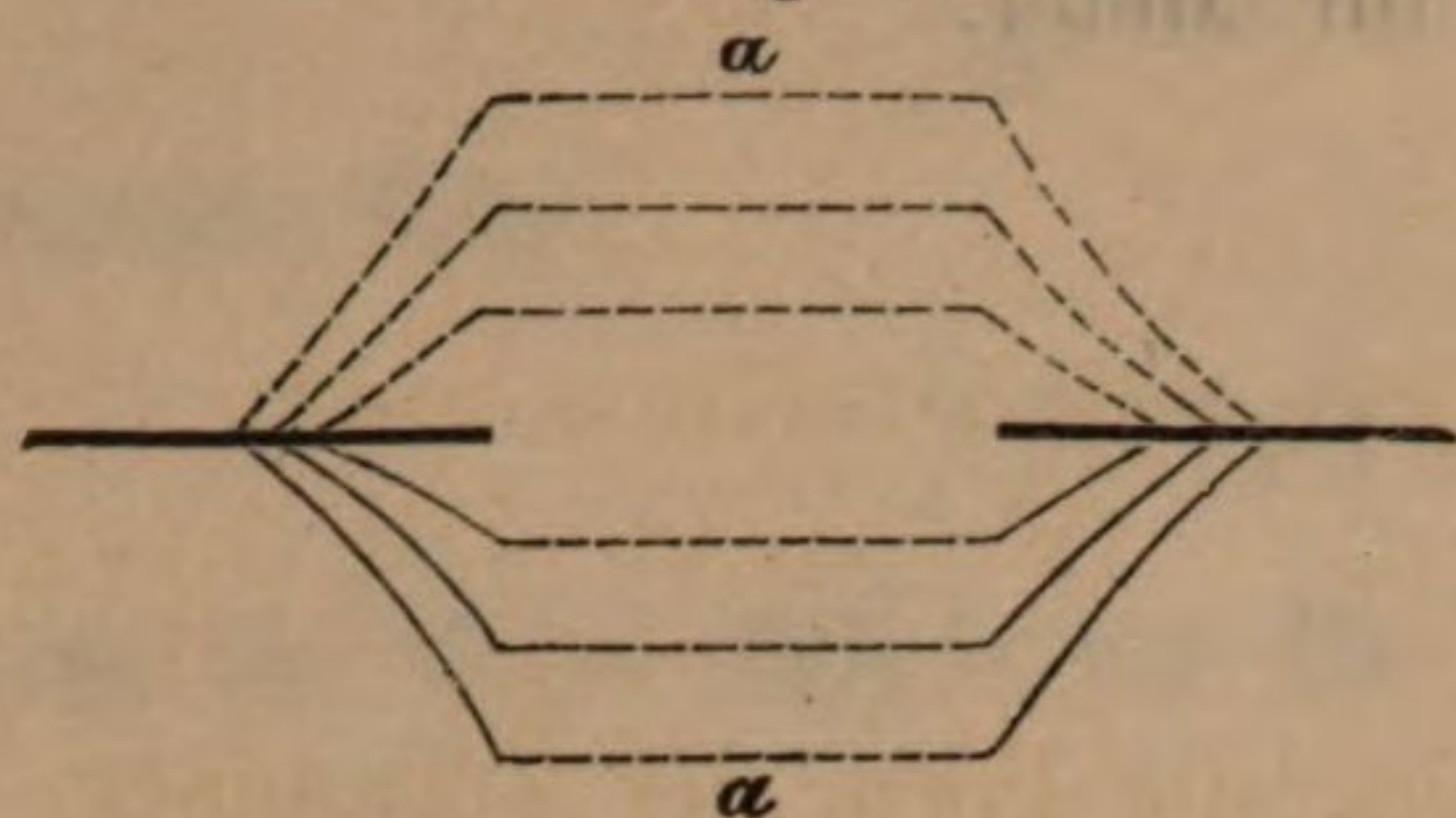
Allgemeines.

Im dritten Abschnitte § 22 bis 24 ist der Beweis dafür bereits geführt, dass die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit c eines unter der Druckhöhe h aus der Oeffnung vom Querschnitte a in dünner Wand eines unbegrenzten Gefässes tretenden Wasserstrahles $\sqrt{gh}$ und dessen Arbeits-Geschwindigkeit $C = \sqrt{2gh}$ sein muss. Die während der Zeiteinheit ausfliessende Wassermenge Q berechnet sich also gleichwerthig auf $a\sqrt{gh}$ und $\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{2gh}$ d. h. ihr Querschnitt behält, nachdem die Richtung aller Wasserfäden mit der Hauptaxe der Ausfluss-Bewegung zusammengefallen ist, nur $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ vom Querschnitte der Oeffnung.

Denkt man sich nun die Form des solchergestalt zusammengezogenen Strahles, wie derselbe Figur 55 annähernd dargestellt ist, bis zum Punkte der stärksten Zusammenziehung durch feste Wandungen begrenzt, so entsteht unter der Oeffnung ein sogenanntes Mundstück, welches man sich sowohl ausserhalb als innerhalb des Gefässes, wie auch in der Wanddicke selber angebracht resp. ausgeschnitten denken kann. Der Flächenraum der innern Oeffnung dieses Mundstückes ver-

hält sich dann zu dem der äussern wie $\sqrt{2}:1$, und man hätte nun die Wahl, welche man als Ausfluss-Oeffnung gelten lassen und in Rechnung bringen will. Correchter erscheint es, die äussere zu wählen und für diesen Fall werden Ausfluss- und Arbeits-Geschwindigkeit identisch, beide $\sqrt{2gh}$ in Uebereinstimmung mit dem von D. Bernoulli gefundenen Satze. Nun kann man sich aber, wie in Figur 71 angedeutet,

Fig. 71.



die Bildung eines solchen Mundstückes von der kleinern Oeffnung a durch trichterartige Ausbiegung der Wandung allmählig vorbereitet denken, und es bedarf keiner weitem Erläuterung, dass für solche Oeffnungen die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit Werthe haben wird,

die zwischen $\sqrt{gh}$ und $\sqrt{2gh}$ als Grenzen liegen müssen. Will man in der Vorstellung alle möglichen Fälle erschöpfen, so denke man sich in Figur 71 dasselbe System durch Einbiegung nach innen gerichtet. Hier können selbstredend die äussern weitem Querschnitte nur so lange als Ausfluss-Oeffnungen in Rechnung gebracht werden, als dieselben von dem ausfliessenden Strahle auch ganz ausgefüllt sind. Im andern Falle kann nur der innere kleinere Querschnitt als Ausfluss-Oeffnung betrachtet werden.

Der grössern Einheit wegen, auch um die sich aus der Rationaltheorie ergebenden Widerstands-Coefficienten in übersichtlichere Beziehungen zu den bisherigen Ergebnissen und Ausdrücken der ältern Experimental-Theorie bringen zu können, werden wir daher bei allen nachfolgenden Untersuchungen, die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit c ganz allgemein mit $\beta\sqrt{2gh}$, die effektive v mit $(\varrho\beta)\sqrt{2gh} = \varrho c$, die theoretische Arbeits-Geschwindigkeit C mit $\sqrt{2gh}$, und die effektive V mit $\varrho_1\sqrt{2gh}$ bezeichnen. ϱ wollen wir den „Widerstands-Coefficienten“, $(\varrho\beta)$ den „Ausfluss-Coefficienten“, ϱ_1 den „Geschwindigkeits-Coefficienten“ und β kurzweg den „theoretischen Coefficienten“ nennen. Der letztere wird, wie leicht zu übersehen, in vielen Fällen ziemlich identisch mit dem sogenannten „Contraktions-Coefficienten“ der ältern Hydrauliker und in allen Fällen gewissermassen den theoretischen Contraktions-Coefficienten darstellen. Specieell für alle Erscheinungen des freien Ausflusses aus Gefässen mit dünnen Wandungen, können wir hier schon im Voraus als Ergebniss aller bisherigen Versuche hinstellen, dass sich der Werth von ϱ in den Grenzen von 0,76 bis 0,98, der von ϱ_1 0,90 bis 0,98 bewegt. Im Allgemeinen wird es für alle vorkommenden Fälle

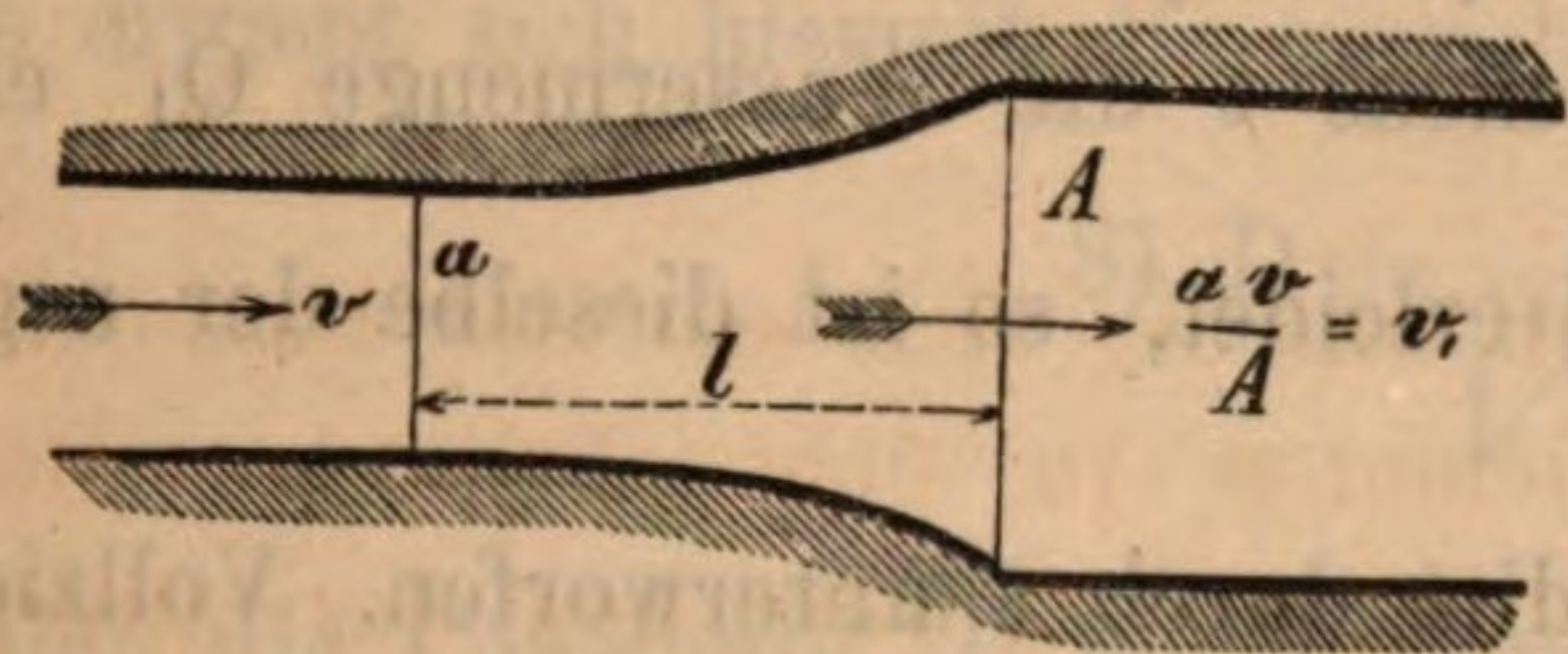
der Praxis genügen, die Ausfluss-Coefficienten bis auf 1% genau in Rechnung stellen zu können. Die Umstände, welche die Ausfluss-Menge bestimmen, sind überdies so mannichfach, dass es kaum möglich sein dürfte, eine grössere Genauigkeit zu erzielen. Wir bedürfen ihrer daher nur für den wissenschaftlichen Zweck der Erforschung der Rationaltheorie und ihrer Beziehungen zu den Ergebnissen der Experimentaltheorie.

§ 49.

Herleitung der Contraktions-Kurve des ausfliessenden Strahles.

In § 24 haben wir uns damit begnügt, die Form der Zusammenziehung des ausfliessenden Strahles annähernd zu bestimmen. Es giebt jedoch auch eine exakte Lösung für diese Aufgabe aus den einfachsten Gesetzen der Geomechanik, unter der alleinigen Voraussetzung, dass die einzelnen aus der Oeffnung strömenden Wassertheilchen einer constanten Kraft-Einwirkung und daher auch einer gleichförmig beschleunigten Bewegung unterworfen sind.

Fig. 72.



Figur 72 stelle das Längenprofil einer Wasserleitung dar. Das Wasser trete in den Querschnitt a mit der Geschwindigkeit v und verlasse den Querschnitt A mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{av}{A}, \text{ nachdem es die Strecke}$$

l mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit durchlaufen. Nach den Grundgesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung hat man dann die Beziehung für lvv_1 und die Beschleunigung p

$$l = \frac{v^2 - v_1^2}{2p} \text{ und weil } v_1^2 = \frac{a^2 v^2}{A^2}$$

also 1) $l = \frac{v^2}{2p} \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)$ und 2) $p = \frac{v^2}{2l} \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)$

Entwickelt man $\frac{a}{A}$ aus Gleichung 1) oder 2), so erhält man

$$3) \frac{a}{A} = \sqrt{1 - \frac{2pl}{v^2}}$$

Führt man statt des Querschnitts-Verhältnisses $\frac{a}{A}$ das Verhältniss der

Quadrate der Leitungs-Durchmesser $\frac{d^2}{D^2}$ ein, so ergibt sich

$$4) D = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{2p_1}{v^2}}}$$

als Gleichung für den Längenschnitt eines Wasserstrahles, in dem sich das Wasser mit gleichförmig verzögerter Geschwindigkeit von d nach D , oder mit gleichförmig beschleunigter von D nach d und zwar mit der Beschleunigung p und der Anfangs- oder End-Geschwindigkeit v im kleinern Querschnitte vom Durchmesser d gemessen, bewegt. Aus der Geomechanik hat man auch die Beziehung

$$l = \frac{v + v_1}{2} t \text{ also } = \left(v + \frac{a}{A} v \right) \frac{t}{2}.$$

Hieraus findet sich t die Zeit, welche jedes Wassertheilchen braucht um den Weg l von a nach A zurückzulegen

$$5) t = \frac{2l}{v} \left(\frac{A}{A+a} \right).$$

Die Wassermenge Q_1 , welche während der Zeit t , die jedes Wassertheilchen braucht, um den Weg l zurückzulegen, in jedem Querschnitte zum Durchfluss gelangt, drückt sich durch das Produkt avt aus, also wenn man hierin den Werth von t aus Gleichung 5) einsetzt

$$6) Q_1 = 2a^2 \left(\frac{A}{A+a} \right).$$

Wenn nun während jedes Zeittheilchens t die Wassermenge Q_1 eine Geschwindigkeits-Abnahme $v \left(\frac{A-a}{A} \right)$ erleidet, so ist dieselbe der negativen Beschleunigung $v \left(\frac{A-a}{A} \right)$ dividirt durch t unterworfen. Vollzieht man die Division mit dem Werth von t aus Gleichung 5), so erhält man selbstverständlich, wie in Gleichung 2), wieder

$$p = \frac{v^2}{2l} \left(1 - \frac{a^2}{A^2} \right).$$

Wenn ferner die Masse $\frac{Q_1 \gamma}{g}$ der Beschleunigung p unterworfen ist, so muss die darauf wirksame Kraft $P = \frac{Q_1 \gamma}{g} \cdot p$ sein. Setzt man hierin die Werthe aus Gleichung 2) und 6), so wird

$$7) P = \frac{a \gamma v^2}{g} \left(1 - \frac{a}{A} \right).$$

Für $A = a$ muss hier P natürlich 0 werden, weil weder Beschleunigung noch Verzögerung stattfinden kann. Für $A = 2a$ wird $P = \frac{a \gamma v^2}{2g} = a \gamma h$, unter h die Wasserdruck-Höhe verstanden, d. h. also die Kraft, welche zur Geschwindigkeits-Vermehrung zwischen $2a$ und a erforderlich wird,

ist gerade so gross wie der auf a wirksame hydrostatische Druck, während zur Erzeugung der Anfangs-Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ in 2a noch einmal derselbe Druck $ayh = \frac{av^2}{2g}$ erforderlich ist.

Will man nun aus Gleichung 4)

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{2p}{v^2} l}}$$

beispielsweise die Form des durch die kreisrunde Oeffnung in dünner Wand vom Durchmesser D eines unbegrenzten Gefässes ausfliessenden Wasserstrahles finden und setzt dabei der Einfachheit wegen $d = 1$, so hat man für die Bestimmung der Constante $\frac{2p}{v^2}$ folgende Bedingungen. Für den Werth $l = 0,5D$ oder $= 0,62d$ muss $D = 1,25$ werden. Also $d = 1$ angenommen, wird durch Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 4)

$$1,25 = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 0,62 \cdot \frac{2p}{v^2}}} \quad \text{woraus folgt} \quad \frac{2p}{v^2} = 0,95.$$

Es ergibt sich hiermit die gesuchte Gleichung der Contraktions-Kurve

$$8) \quad D = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 0,95l}}$$

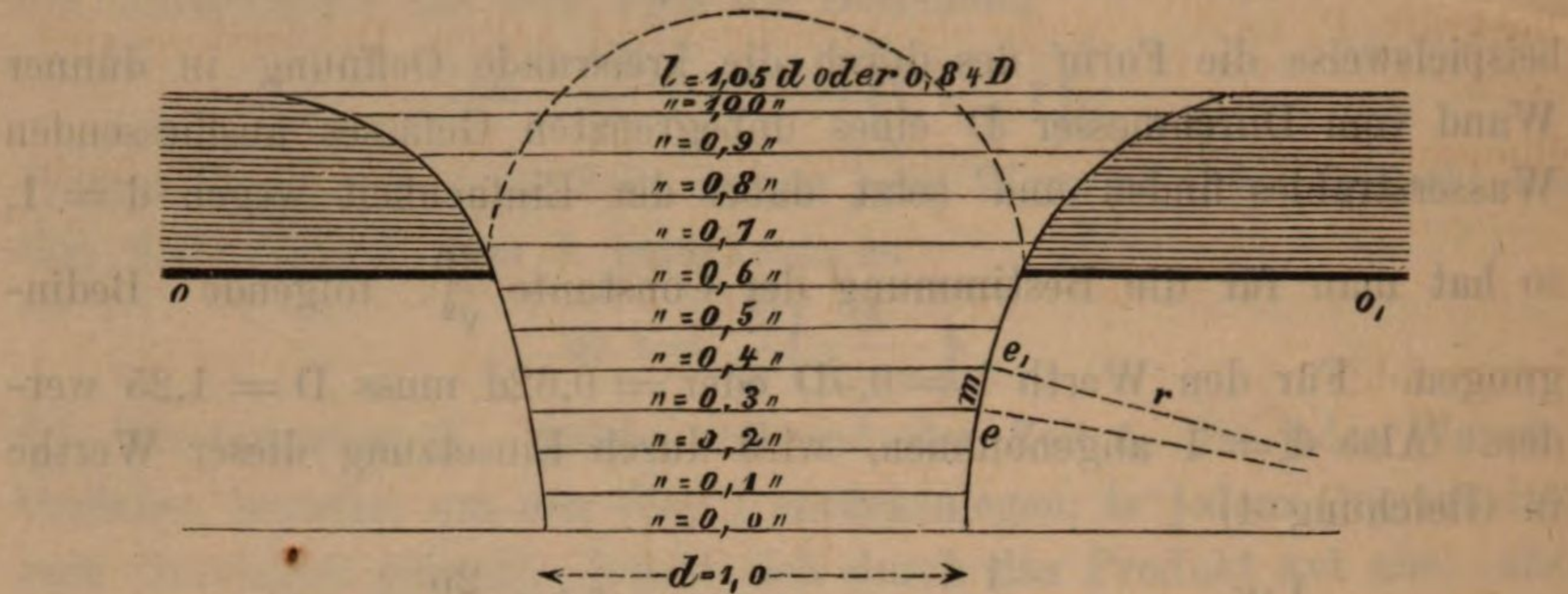
Auch die Constante $\frac{2p}{v^2}$ findet sich durch eine einfache Relation aus der Geomechanik wieder. Würde nämlich jede Masseneinheit in der Oeffnung von dem Gewichte γ frei fallen, so müsste dies mit der Kraft ihres eigenen Gewichtes also mit der Beschleunigung g geschehen. Nun presst aber auf jede Masseneinheit die Wassersäule h mit $h\gamma$. Da die Beschleunigung gleicher Massen nun proportional den treibenden Kräften ist, muss also die Beschleunigung jeder Masseneinheit in der Oeffnung anstatt g sein gh . Setzt man diesen Werth für p ein, so wird $\frac{2p}{v^2} = \frac{2gh}{v^2}$ also $= 1,0$ weil der Werth von v hier auf den contrahirten Querschnitt bezogen $\sqrt{2gh}$ ist. Die Differenz $1,00 - 0,95 = 0,05$ zeigt uns, wie genau die Gestalt des contrahirten Strahles beobachtet worden. Man erkennt hieraus zugleich, dass sie wirklich unabhängig von der Druckhöhe ist.

Für die verschiedenen Werthe von l berechnet sich hiernach folgende Coordinaten-Tabelle:

Für $l =$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,62	0,70	0,80	0,90	0,95	1,00	1,02	1,05
wird $D =$	1,000	1,025	1,052	1,087	1,127	1,175	1,235	1,250	1,314	1,429	1,621	1,787	2,115	2,386	∞

Nach vorstehender Tabelle findet sich nun die gesuchte Form in Figur 73 aufgetragen.

Fig. 73.



Man erhält damit zugleich die Normalform für ein ausgerundetes Mundstück, mit dem man den grösstmöglichen Ausfluss-Coefficienten bei einem Minimum von Widerständen erzielen will. Bei Oeffnungen in dünner Wand fällt der obere Theil dieses trichterartigen Mundstückes von der Länge $1,05 - 0,62 = 0,43d$ oder $0,34D$ in das Innere des Gefässes, wird also ideel, gewährt uns aber einen höchst interessanten und durch die Beobachtung in Glasgefässen leicht zu bestätigenden Aufschluss über die Natur der Zuströmungs-Bewegung zur Oeffnung, gar sehr verschieden von der Vorstellung, dass solche nach den Gesetzen des freien Falles in einem bis zur Oberfläche des Wassers hinaufreichenden Trichter vor sich gehe. Von der Richtigkeit der Trichterform Figur 73 kann man sich am leichtesten in einem Wannen-Bade überzeugen, indem man die flache Hand langsam der in Thätigkeit gesetzten Ablass-Oeffnung im Boden nähert. Erst in ganz unmittelbarer Nähe über derselben, macht sich die Zuströmungs-Bewegung durch kräftiges Ansaugen fühlbar. Bei sehr kleinen Oeffnungen unter 2 Centim. verkörpert sich, wie bereits § 25 nachgewiesen, dieser Trichter mehr oder minder durch die Adhäsion und Unbeweglichkeit der Netzschicht über dem Boden des Gefässes am Umfange der Oeffnung, was grössere Ausfluss-Coefficienten zur Folge hat.

Der Krümmungs-Halbmesser r des Bogenelementes ee_1 zwischen $l = 1$ und $l = l_1$ und den entsprechenden Werthen von $D = D$ und $D = D_1$ lässt sich zwar aus der Kurvengleichung 8) mit Hülfe der

höhern Analysis entwickeln, findet sich jedoch in völliger Uebereinstimmung damit noch durch eine andere einfache Beziehung.

Aus Gleichung 2) erhält man, wenn für $\frac{a^2}{A^2} = \frac{D^4}{D_1^4}$ und für $l = l_1 - 1$ gesetzt wird

$$p = \frac{v^2}{2(l_1 - 1)} \left(1 - \frac{D^4}{D_1^4} \right).$$

Nun muss aber in jedem unendlich kleinen Bogenelemente von der Masse m , der Pressung P , welcher die Beschleunigung p entspricht, die Fliehkraft $P_1 = \frac{mv^2}{r}$ stetig das Gleichgewicht halten. Die letztere wird

gemessen durch die Beschleunigung $p_1 = \frac{P_1}{m} = \frac{v^2}{r}$. Es muss also auch

$$p = p_1 = \frac{v^2}{2(l_1 - 1)} \left(1 - \frac{D^4}{D_1^4} \right) = \frac{v^2}{r} \text{ sein,}$$

woraus folgt

$$9) \quad r = \frac{2(l_1 - 1)}{\left(1 - \frac{D^4}{D_1^4} \right)}.$$

Will man hieraus beispielsweise den Krümmungs-Halbmesser der Kurve an der Gefäss-Oeffnung, also zwischen $l_1 = 0,62d$ und $l = 0,60d$, berechnen, so muss man in Gleichung 9) $l_1 - l = 0,02$ und für D und D_1 die entsprechenden Werthe aus der Coordinaten-Tabelle 1,235 und 1,250 einsetzen.

Danach ergibt sich

- a) Zwischen $l_1 = 0,95$ und $l = 0,90$, $r = 0,31D$
- b) „ $l_1 = 0,62$ „ $l = 0,60d$, $r = 0,67D$
- c) „ $l_1 = 0,40$ „ $l = 0,30d$, $r = 1,19D$
- d) „ $l_1 = 0,30$ „ $l = 0,20d$, $r = 1,29D$.

Weisbach berechnet den mittlern Krümmungs-Halbmesser, unter der Annahme, dass die ganze Kurve ein Kreisbogen sei, auf $1,30D$ in ziemlicher Uebereinstimmung mit dem Werthe bei c. In § 24 haben wir unter derselben Annahme annähernd $r = 0,500D$ also entsprechend dem Werthe zwischen a und b gefunden.

Durch Gleichung 4) und 9) ist übrigens die Gestalt des contrahirten Strahles vollständig bestimmt, sobald das Querschnitts-Verhältniss zwischen Oeffnung und stärkster Zusammenziehung gegeben ist. Auch die Constante $\frac{2p}{v^2}$ lässt sich für jeden Fall durch Rechnung finden. Wir haben dieselbe nur der Beobachtung entlehnt, um zugleich die Uebereinstimmung der letztern mit ersterer nachzuweisen.

§ 50.

Ausfluss durch Bodenöffnungen über 3 Centim. Weite aus unbegrenzten Gefässen.

Das Gesetz des Ausflusses durch Oeffnungen in der dünnen Bodenwand von Gefässen findet nur so lange Anwendung, als die Druckhöhe über kreisrunden und quadratischen Oeffnungen mindestens 0,35, über rektangulären, deren Länge ein erheblich Vielfaches ihrer Weite ausmacht, mindestens 0,71 der letztern beträgt. Im andern Falle findet kein voller Ausfluss mehr statt und die Ausflussmenge berechnet sich nach den Gesetzen des freien Ueberfalles über den Rand der Oeffnung. Nach diesen Gesetzen kann nur bei den erwähnten Druckhöhen-Verhältnissen so viel Wasser über den Rand fließen, als nöthig ist, um die Oeffnung auszufüllen.

Ist ferner der Flächeninhalt des ebenen Bodens, in welchem sich die Oeffnung befindet, mindestens 12mal so gross als die letztere und der Boden normal gegen die Axe des ausfliessenden Strahles gerichtet, sind auch die Seitenwandungen mindestens um das Dreifache der Oeffnungs-Weite von letzterer entfernt, so ergeben alle bisherigen Versuche, dass Ausfluss- sowohl als Arbeits-Geschwindigkeit bei allen Oeffnungen über 3 Centim. Weite und Gefässen über 0,4 M. Durchmesser ziemlich constante Coefficienten haben, die eben so wohl unabhängig von der Druckhöhe, als von der Form und Grösse der Oeffnung sind. Mindestens ergeben alle diese Versuche, auch die zahlreichen darüber vom Verfasser angestellten, keine Differenzen, welche andern als zufälligen Ursachen zugeschrieben werden können und die so gross sind, als dass es lohnend schiene, nach einem Abhängigkeits-Gesetze zu forschen. Sie weisen mit ziemlicher Uebereinstimmung den Werth von $\varrho = 0,870$ und von $(\varrho\beta) = 0,615$ nach. Die Wände der Oeffnung müssen dabei entweder von Aussen scharf zugekantet oder höchstens $\frac{1}{20}$ der Oeffnungsweite dick sein. Nach den Versuchen des Verfassers findet sich dieser Werth von $(\varrho\beta)$ sogar schon bei Oeffnungen von 2 Centim., während nach Versuchen von Weisbach, welche übrigens die gleiche Differenz auch gegen Versuche von Buff und Bossut ergeben, für Oeffnungen von 0,2 Centim. $(\varrho\beta)$ sich = 0,622 und für 0,3 Centim. sich = 0,615 ergeben haben soll.

Bossut und Michelotti fanden für quadratische Oeffnungen von 1 bis 9 □Zoll bei 7 Fuss bis 21 Fuss Druckhöhe im Mittel $(\varrho\beta) = 0,610$, und für kreisrunde 0,615, Bossut ferner für quadratische von 1 Zoll Seite bei 11 Fuss 8 Zoll Druckhöhe 0,616, für kreisrunde von 1 bis 2 Zoll Durchmesser 0,616 bis 0,620, und Michelotti für kreisrunde

von 3 Zoll Durchmesser bei 6 bis 11 Fuss Druck 0,611 bis 0,612, und solche von 6 Zoll Durchmesser 0,618 bis 0,619.

Bei Berücksichtigung der Versuchs-Resultate mit kleinen Druckhöhen muss man natürlich, um den massgebenden Werth von $(\varrho\beta)$ zu erhalten, der Versuchshöhe gemäss § 14 die kleine Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,012$ Fuss oder 0,0037 M. zu setzen, mit welcher der ausfliessende Strahl nachziehend auf die Oeffnung wirkt.

Versuche des Verfassers mit rektangulären Oeffnungen von 3,4 bis 4,5 mm. Weite und 20 bis 22 mm. Länge ergaben ziemlich denselben Ausfluss-Coefficienten, wie kreisrunde Oeffnungen vom Durchmesser der kleinern Weite. Auch solche nach der Form Figur 74 zeigten keine bemerkenswerthe Abweichungen davon.

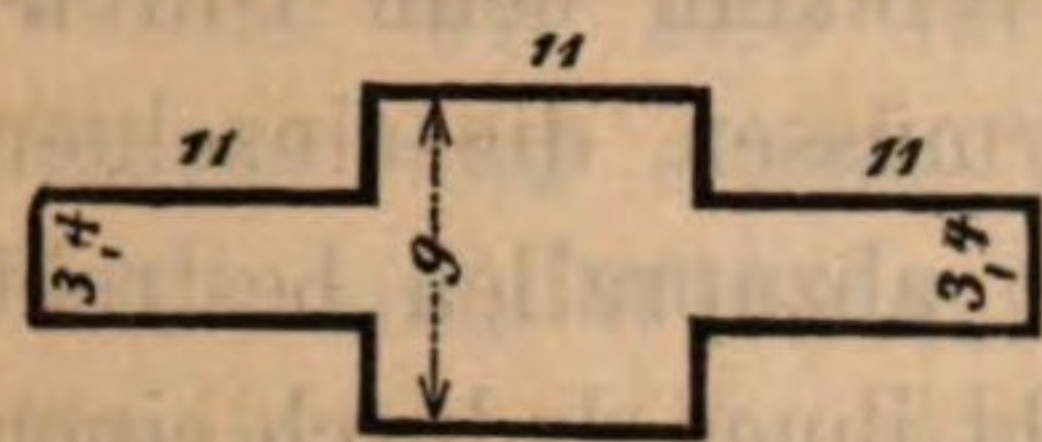


Fig. 74.

Der Widerstands-Coefficient $\varrho = 0,87$ entspricht auf Rohrleitungen bezogen in der Widerstands-Tabelle Abschnitt V einem Werthe von

$$\frac{1}{\frac{1}{3} \sqrt{h}} = 3,40 \text{ für Metermass und } 2,3 \text{ für pr. Fussmass. Es ist also}$$

der Widerstand, welchen der Strahl beim Ausflusse erleidet, gleich dem äussern Abscheerungs-Widerstande beim Durchgange durch ein Rohrstück, dessen Länge das 2,3fache des Oeffnungs-Durchmessers beträgt (vergl. § 45). Den Geschwindigkeits-Coefficienten ϱ_1 hat Weisbach durch Versuche mit glatt polirten Mundstücken von der Form Figur 73 in den Grenzen 0,958 bis 988 gefunden, und zwar bei 1 Fuss Druckhöhe = 0,958 bei 5 Fuss = 0,969, bei 10 Fuss = 0,975 und bei 390 Fuss = 0,988.

Da sich in solchen Mundstücken die einzelnen Wassertheilchen ohne Stoss zusammenfügen, und der Abscheerungs-Widerstand im untern Theile derselben nach § 39 durch die Centrifugal-Kraft aufgehoben wird, so bestimmt sich der Widerstand lediglich nach der Abscheerung in dem § 49 Figur 73 dargestellten obern trichterförmigen Theile zwischen $l = 0,50D$ und $l = 0,84D$. Compensiren wir denselben zu einem konischen Trichter von $0,30D$ Länge und dem kleinern Durchmesser D , dem grössern $1,69D$, so berechnet sich der entsprechende Widerstandswerth $\frac{1}{\frac{1}{3} \sqrt{h}}$ dafür nach § 36 auf $0,30 \cdot 0,76 = \frac{0,228}{\frac{1}{3} \sqrt{h}}$. Zu den

verschiedenen Werthen von h in pr. Fussen, die den Versuchen von Weisbach entsprechen, ergeben sich für $\frac{1}{\frac{1}{3} \sqrt{h}}$ nacheinander die Werthe 0,228 | 0,133 | 0,106 | 0,031, für die man in der Widerstands-

Tabelle § 45 findet $\varrho = 0,957, 967, 0,971$ und für 390 Fuss Druckhöhe 0,984. Die Uebereinstimmung der Weisbach'schen Versuchsergebnisse mit der Rechnung ist daher eine immerhin bemerkenswerthe.

Bossut fand ϱ_1 bei 3 Versuchen mit kreisförmigen und quadratischen Oeffnungen in dünner Wand von 1 bis 2 Zoll Weite bei einer constanten Druckhöhe von 11 Fuss 9 Zoll auf 0,924 bis 0,937. Wegen der sehr schwierigen Messung der Dicke des contrahirten Strahles, welche hier zur Bestimmung von ϱ_1 erforderlich war, dürfte das erzielte Resultat keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen können.

Bei dem Ausflusse durch Oeffnungen in dünner Wand erwächst, wenn wir uns § 24 Figur 55 vergegenwärtigen, der Widerstand hauptsächlich durch den Cohäsions-Verlust in Folge des Zusammenstossens der einzelnen Wasserfäden unter verschiedenen Winkeln beim Durchgange durch die Oeffnung. Nach dem Stosse müssen die einzelnen Theilchen in Folge ihrer Elasticität von einander abzurallen bestrebt sein, die Cohäsion tritt dem entgegen, und entzieht ihnen dadurch einen Theil der lebendigen Kraft, welche sie vor dem Stosse besaßen. Gleichzeitig müssen in Folge dieser entgegengesetzten Bestrebungen vibrirende Bewegungen der einzelnen Wassertheilchen in seitlicher Richtung beim Durchgange durch die Oeffnung entstehen. Wenn aber jedes Theilchen dabei nur einen unendlich kleinen Weg seitwärts hin und her macht, so können nicht so viele Theilchen in einem Momente die Oeffnungsebene passiren, als sich aus dem Produkte des Flächeninhaltes der letztern, in die virtuelle Geschwindigkeit normal auf dieselbe ergeben. Ausser dem Geschwindigkeits-Verluste muss der aussfliessende Strahl daher noch einen Querschnitts-Verlust erleiden. Der letztere entspricht der Differenz 0,71—0,64, welche der theoretische Querschnitt unterhalb der Oeffnung gegen den effektiven ergiebt. Es kann diese Differenz also nicht constant sein, sondern muss vom Ausfluss-Coefficienten oder umgekehrt muss der letztere von ersterer abhängen. Da nun die Ausflussmenge bei gleicher Druckhöhe als $f(av)$ ein Produkt dreier Faktoren als urvariabler ist, nämlich der Geschwindigkeit, der Länge der Oeffnung und deren Breite, bleibt kein Grund dafür vorhanden, warum nicht ein Arbeitsverlust, welcher die Ausflussmenge verringert, auch gleichmässig alle 3 Faktoren beeinträchtigen solle. Es muss sich also auch der Verlust-Antheil, welchen der Querschnitt erleidet, zu dem der Geschwindigkeit, wie 2:1 verhalten.

Ausser diesem Vibrations-Verluste, welcher in Mundstücken, durch deren feste Begrenzung, die keinen Spielraum für dieselben gestattet, aufgehoben wird, muss noch der hiervon unabhängige aus der Abtrennung oder Abscheerung der ausfliessenden von der im Gefäss bleibenden Masse stattfinden. Den letztern stellen die vorhin erwähnten Versuche

von Weisbach in Uebereinstimmung mit der Widerstands-Tabelle dar. Wenn nun derselbe sich auch als abhängig von der Druckhöhe, so hat sich doch der Gesamt-Widerstand, wie bereits erwähnt, unabhängig von letzterer ergeben, woraus auf seine Compensation geschlossen werden muss, die uns berechtigt, bei dem beziehungsweise constanten Werth von $\varrho = 0,87$ den von ϱ_1 auf den mittlern Werth 0,97 und den Querschnitts- und Vibrations-Verlust auf weitere 10% entsprechend dem beobachteten Verhältniss $\frac{0,71-0,64}{0,71}$ anzunehmen, so dass der Gesamtverlust 13% beträgt.

Durch die Beziehung

$$(1-\varrho_1) = 0,03 + \frac{0,97-\varrho}{3} \text{ woraus folgt}$$

$$1) \varrho_1 = 0,647 + \frac{1}{3}\varrho$$

werden wir also für alle Ausfluss-Bewegungen durch Oeffnungen in dünner und ebener Wand, eine Beziehung zwischen dem Geschwindigkeits- und Widerstands-Coefficienten gewonnen haben, welche für die Praxis jedenfalls passendere Werthe liefert, wie die Annahme eines mittlern constanten Werthes von etwa 0,96 für ϱ_1 , und die sich auch in Uebereinstimmung mit den erwähnten Versuchs-Resultaten von Bossut befindet. Von Wichtigkeit wird diese Beziehung für die Berechnung des Nutzeffektes der Wasserräder und der Sprunghöhe von Strahlen aus Oeffnungen in dünner Wand.

§ 51.

Kleine Bodenöffnungen unter 3 Centim. Durchmesser.

Dass kleine Oeffnungen unter 3 bis 2 Centim. Durchmesser grössere Ausflussmengen geben, und dass die theoretische Ausflussmenge sich hier mehr oder weniger nach dem Gesetze des Ausflusses durch Mundstücke bestimmt, ist bereits § 25 und in § 49 nachgewiesen. Gleichzeitig wird aber auch die Richtung der ausfliessenden Wasserfäden in Bezug auf den innern Cohäsions-Verlust in Folge Zusammenstossens, eine günstigere. Auch der Werth von ϱ muss daher ein grösserer werden.

Für die praktische Anwendung wird es genügen, hier durch die Zusammenstellung von Versuchs-Resultaten, für jeden vorkommenden Fall, die Beurtheilung der Werthe von $(\varrho\beta)$ und ϱ_1 zu ermöglichen.

Nach Versuchen von Weisbach bei 0,6 M. und 0,25 M. Druckhöhe mit Oeffnungen von 0,03 bis 0,01 M. Durchmesser ergab sich bei 0,03 Durchmesser bei 0,06 M. Druckhöhe $(\varrho\beta) = 0,614$ und bei 0,25 M. $(\varrho\beta) = 0,616$, bei 0,02 Durchmesser bei 0,06 M. Druckhöhe $(\varrho\beta) = 0,621$ und bei 0,25 M. $(\varrho\beta) = 0,623$, bei 0,01 Durchmesser bei 0,06 M. Druckhöhe $(\varrho\beta) = 0,628$ und bei 0,25 M. $(\varrho\beta) = 0,631$,

wenn man eben der geringern Druckhöhe 0,25 M. die dabei übersehene Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,0037$ M., deren Einfluss bei 0,6 M. verschwindend klein wird, zusetzt, also in einem solchen Grade übereinstimmend bei beiden Druckhöhen, dass die Differenzen keine Aufforderung zur weitem Erforschung bieten.

Die Versuche des Verfassers sind bei 0,03 bis 0,3 M. Druckhöhe in einem 0,27 M. weiten Gefässe von quadratischem Querschnitte angestellt. Die Dicke des Oeffnungsrandes betrug 0,5 mm. Ein Abhängigkeits-Verhältniss von der Druckhöhe ergab sich dabei nicht, sobald die Constante $\frac{s}{\gamma}$ in Rechnung gestellt war. Der Durchmesser der vollkommen kreisrund ausgeschliffenen Oeffnungen konnte jedoch nur auf 0,01 mm. genau bestimmt werden, wesshalb das Versuchs-Resultat mit der kleinsten Oeffnung von 2,39 mm. nur bis auf etwa $\frac{5}{6}\%$ genau angenommen werden kann, während bei den übrigen der Genauigkeitsgrad mit dem Quadrate des Durchmessers zunimmt. Das Resultat der Versuche ist in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Beobachtet		Berechnet			Beobachtet		Berechnet		
d in mm.	($q\beta$)	β	q	q_1	d in mm.	($q\beta$)	β	q	q_1
18,91	0,618	0,709	0,871	0,937	7,56	0,662	0,748	0,884	0,941
18,60	0,618	0,709	0,871	0,937	5,96	0,677	0,761	0,889	0,943
17,12	0,619	0,710	0,872	0,937	5,78	0,680	0,764	0,890	0,943
16,98	0,620	0,711	0,872	0,937	4,03	0,696	0,777	0,895	0,945
15,88	0,623	0,714	0,873	0,937	3,60	0,699	0,781	0,895	0,945
13,22	0,631	0,721	0,875	0,938	3,40	0,706	0,787	0,897	0,946
12,35	0,634	0,724	0,876	0,938	3,03	0,715	0,794	0,900	0,947
11,97	0,635	0,725	0,876	0,939	2,70	0,726	0,804	0,903	0,948
9,68	0,643	0,732	0,879	0,939	2,39	0,738	0,814	0,907	0,949
7,68	0,660	0,746	0,884	0,941					

Hat man nach vorstehender Versuchstabelle für eine Oeffnung von bestimmter Weite den passenden Werth von ($q\beta$) ermittelt, so ergeben sich unter der gerechtfertigten Voraussetzung, dass die Zunahme beider Faktoren in gleichmässigem Verhältnisse zur Zunahme des Produktes erfolgt, leicht nachfolgende Beziehungen zur Bestimmung von q und β , so wie mit Hülfe von § 50 Gleichung 1) auch von q_1

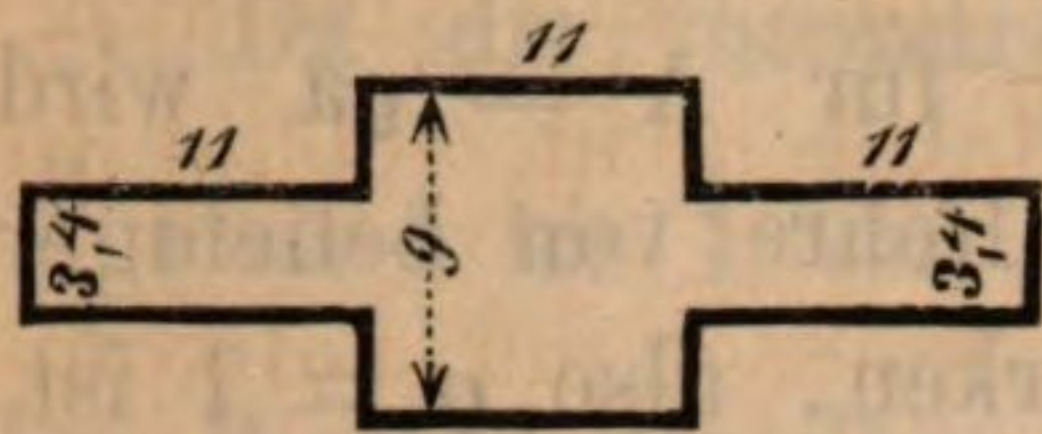
$$1) \quad q = 0,685 + 0,301q\beta = \frac{0,685}{1 - 0,301\beta}$$

$$2) \quad \beta = \frac{q\beta}{q}$$

$$3) \quad q_1 = 0,875 + 0,1q\beta.$$

Längliche und rektanguläre Oeffnungen haben hiermit ziemlich übereinstimmende Ausfluss-Coefficienten, wenn man, falls die Länge die Breite um das mehr als 6 bis 7fache übersteigt, die kleinere Dimension, und falls beide nur wenig von einander verschieden, das arithmetische Mittel aus beiden in Rechnung bringt. So ergab bei 0,25 M. Druckhöhe eine rektanguläre Oeffnung von 3,4 mm. Weite und 20 mm. Länge $(\varrho\beta) = 0,708$, eine von 4,6 mm. und 22 mm. $(\varrho\beta) = 0,684$

Fig. 75.



und eine nach der Form Figur 75 von 3,4, 9 und 11 mm. Weite $(\varrho\beta) = 0,680$, während die Rechnung mit Hülfe von Interpolation aus der Versuchs-Tabelle, für die erste Oeffnung 0,706, die zweite 0,690 und die dritte 0,677, also

immerhin genügende Uebereinstimmung liefert.

§ 52.

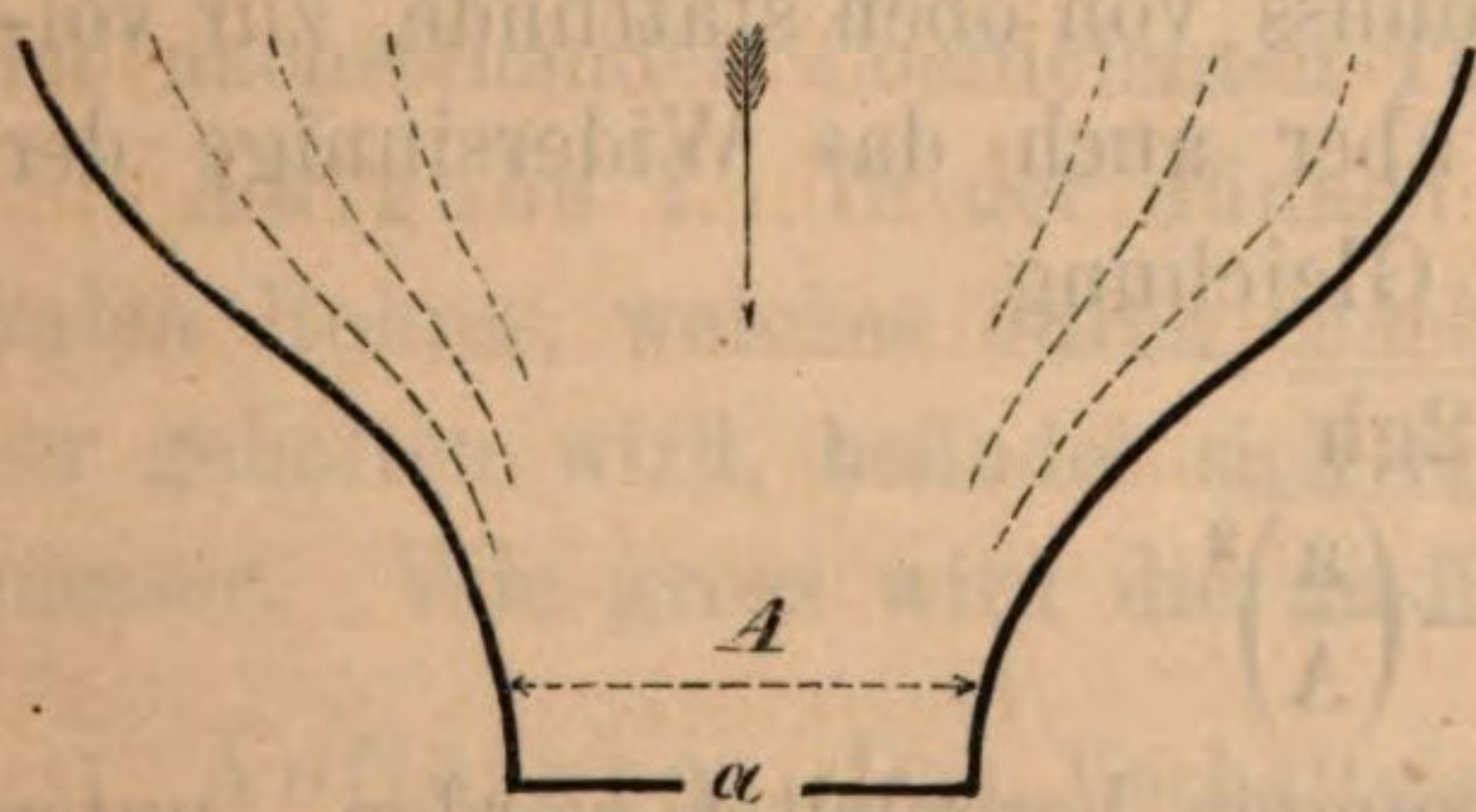
Ausfluss aus begrenzten Gefässen.

Wenn das aus der Oeffnung a in der dünnen Bodenwand eines Gefässes unter der Druckhöhe h ausfliessende Wasser, ehe es der Einwirkung des Druckes $ah\gamma$ über der Oeffnung unterworfen wurde, in der Richtung des Ausflusses bereits die Arbeitsgeschwindigkeit V_1 besass, so konnte es dieselbe nur in Folge seiner Schwerkraft bei einer freien Fallhöhe $\frac{V_1^2}{2g}$ erlangt haben, welche ausser der Druckhöhe $ah\gamma$ in der Oeffnung den Ausfluss befördern muss. Die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit c aus der Oeffnung muss in diesem Falle also der Druckhöhe $h + \frac{V_1^2}{2g}$ entsprechen und sein

$$1) c = \sqrt{g\left(h + \frac{V_1^2}{2g}\right)} = \sqrt{gh + \frac{V_1^2}{2}}$$

Befindet sich die Oeffnung a nach Figur 76 in der Wand eines

Fig. 76.



Gefässes, dessen Querschnitt in einer Entfernung aA , welche mindestens 0,3 des Oeffnungsdurchmessers gleichkommt, (vergl. Fig. 73) $= A$ ist, so müssen also die in A anlangenden Wassertheilchen, ehe sie der Beschleunigung durch den Druck $ah\gamma$ nach § 49 Figur 73 unterworfen werden, die Arbeits-

Geschwindigkeit $V_1 = \frac{a}{A} v = \frac{a}{A} \varrho c$ erlangt haben. Setzt man diesen

Werth von V_1 in Gleichung 1) ein, und entwickelt daraus c , so findet sich

$$2) \ c = \sqrt{\frac{1}{2 - \left(\frac{a}{A} \varrho\right)^2}} \cdot \sqrt{2gh} = \beta \sqrt{2gh}$$

der theoretische Coefficient β also

$$3) \ \beta = \sqrt{\frac{1}{2 - \left(\frac{a}{A} \varrho\right)^2}}$$

Für $A = \infty$ wird in Gleichung 2) $c = \sqrt{gh}$, für $A = \varrho a$ wird $c = \sqrt{2gh}$, d. h. das Wasser fliesst aus einem Rohre von beliebiger Länge, wenn keine Widerstände dem entgegenwirken, also $\varrho = 1$ ist, unter der Druckhöhe h mit der letzterer entsprechenden Fall-Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ stetig aus, wenn das Rohr stets genau bis zur Höhe h durch Nachfüllen vollgehalten wird. In der Praxis lässt sich letztere Voraussetzung gar nicht anders erfüllen, als wenn man die obere Mündung mit einem grössern Wasserreservoir in Verbindung setzt, aus welchem das Wasser über den Rand des Rohres ungehindert eintreten kann. Die Druckhöhe h muss dann natürlich bis zum Wasserspiegel des Reservoirs gemessen werden. Im andern Falle würde anstatt einer stetigen Ausfluss-Bewegung nur das freie Herabfallen des im Rohre befindlichen Wasserkörpers erfolgen. Der letztere würde die untere Oeffnung am Anfange der Bewegung mit der Fall-Geschwindigkeit 0, am Ende mit der $\sqrt{2gh}$ verlassen und das Rohr ein für allemal entleert sein. Denkt man sich $h = \infty$, so müsste also während jeder Sekunde die Geschwindigkeit um $g = 31,25'$ zunehmen und schliesslich unendlich werden. Derselbe Fall muss aber auch eintreten, wenn man h begrenzt annimmt, aber vom ersten Augenblicke des beginnenden freien Falles an, in dem obern Rohrende Wasser genau mit derselben stetig zunehmenden Geschwindigkeit nachgedrückt denkt, mit der die Säule h in jedem Augenblicke die untere Rohrmündung verlässt. Es wird nicht schwer sein, sich durch scharfe Vorstellung auch alle möglichen Zwischenfälle, beispielsweise, dass a nur unmerklich von A verschieden sei, und dass entweder gar kein oder nur ein beschränkter Zufluss von oben stattfinde, zur völligen Klarheit zu bringen, zugleich aber auch das Widersinnige der von ältern Hydraulikern aufgestellten Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

zu erkennen, welche unter Voraussetzungen hergeleitet worden, unter denen ein continuirlicher Ausfluss überhaupt nicht statthaben kann.

Gleichung 2) hat übrigens ihre Gültigkeit nicht nur für Ausfluss-

Bewegungen unter constant gehaltenem Zuflusse, sondern auch beim selbstthätigen Entleeren von Gefässen, wenn der Bruch $\frac{a}{A}$ sich nicht zu sehr der Einheit nähert, in welchem Falle die Entleerung immer mehr und mehr nach den Gesetzen des freien Falles beschleunigt wird, und die Ausfluss-Coefficienten nicht mehr constant bleiben.

§ 53.

Da die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit c in den Grenzen $\frac{a}{A} \varrho = 0$ bis 1 von 0,707 der Arbeits-Geschwindigkeit C bis zum vollen Werthe derselben wächst, so ist klar, dass sich die Wirkung dieses Wachstums in einer damit im Verhältnisse stehenden Abnahme der Contraktion äussern muss, als Folge der geringer gewordenen Divergenz der ausfliessenden Wasserfäden. Auch die Untersuchung über die demgemäss veränderte Richtung der Mittelkraft des Druckes nach Maassgabe des § 24 führt zu demselben, in Gleichung 2) § 52 ausgedrückten, Abhängigkeits-Verhältnisse. Mit der verminderten Divergenz der Wasserfäden muss auch der Ausfluss-Widerstand verhältnissmässig kleiner und ϱ entsprechend grösser werden, wenn nicht durch die Annäherung der Gefässwandungen an die Oeffnung neue Widerstände hinzutreten, die sich nach § 38 resp. § 36 und 37 in Zusatz bringen lassen.

Nach § 38 Gleichung 4) berechnet sich für Gefässe von constantem Querschnitte, dessen kleinster Durchmesser vom grössten nicht allzu sehr verschieden ist, W_a auf $\frac{4\mu a l d}{D^2}$ also $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}}$

$$1) \frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = \frac{4 l d}{D^2 \sqrt[3]{h}} = \frac{4 l}{D \sqrt[3]{h}} \cdot \sqrt{\frac{a}{A}}$$

Nach § 52 Gleichung 3) ist nun für verschiedene Werthe von $\frac{a}{A}$ nachfolgende Tabelle berechnet.

Die Lösung nachfolgender Aufgaben wird am besten den Gebrauch der nachstehenden Coefficienten-Tabelle erläutern.

Aufgabe 1. In der dünnen Bodenwand eines 6 Zoll weiten vertikalen Rohres, welches durch constanten Zufluss 49 Fuss hoch voll Wasser gehalten wird, befindet sich eine runde Oeffnung von 4 Zoll Durchmesser. Wie gross wird die ausfliessende Wassermenge sein?

Auflösung. Das Verhältniss $\frac{a}{A}$ berechnet sich auf $\frac{4^2}{6^2} = 0,444$.

Dem entspricht in Col. V ein Werth von $\sqrt{\frac{a}{A}} = 0,666$, während

I.	II.	III.	IV.	V.	I.	II.	III.	IV.	V.
Werthe von $\frac{a}{A}$	β	ϱ	$\varrho\beta$	$\sqrt{\frac{a}{A}}$	Werthe von $\frac{a}{A}$	β	ϱ	$\varrho\beta$	$\sqrt{\frac{a}{A}}$
1,02	1,000	0,98	0,980	1,010	0,72	0,814	0,965	0,786	0,843
1,01	0,990	0,98	0,970	1,005	0,71	0,810	0,963	0,780	0,837
1,00	0,981	0,98	0,961	1,000	0,68	0,796	0,955	0,760	0,818
0,99	0,972	0,98	0,953	1,995	0,64	0,781	0,944	0,737	0,793
0,98	0,963	0,98	0,944	0,990	0,59	0,767	0,933	0,716	0,768
0,97	0,954	0,98	0,935	0,985	0,54	0,756	0,922	0,697	0,735
0,96	0,946	0,98	0,927	0,980	0,49	0,746	0,912	0,680	0,700
0,95	0,938	0,98	0,919	0,975	0,44	0,737	0,903	0,665	0,663
0,94	0,931	0,98	0,912	0,970	0,39	0,730	0,895	0,653	0,625
0,93	0,924	0,98	0,906	0,965	0,34	0,724	0,888	0,643	0,582
0,92	0,917	0,98	0,899	0,960	0,28	0,719	0,882	0,635	0,529
0,91	0,910	0,98	0,892	0,954	0,23	0,714	0,877	0,626	0,479
0,90	0,903	0,98	0,885	0,948	0,17	0,711	0,874	0,621	0,416
0,87	0,885	0,98	0,867	0,933	0,11	0,709	0,872	0,618	0,331
0,84	0,868	0,98	0,851	0,917	0,08	0,708	0,871	0,616	0,282
0,82	0,857	0,98	0,840	0,907	0,05	0,707	0,870	0,615	0,219
0,80	0,878	0,978	0,829	0,894	0,03	0,707	0,870	0,615	0,173
0,77	0,834	0,975	0,813	0,877	0,01	0,707	0,870	0,615	0,100
0,74	0,822	0,969	0,797	0,853	0,001	0,707	0,870	0,615	0,030

sich, da h hier = 1 ist, $\frac{1}{D.\sqrt[3]{h}} = \frac{49\frac{2}{3}}{0,5}$ auf 26,8 findet. Nach Gleichung 1) beträgt also $\frac{W_a}{\mu a\sqrt[3]{h}} = 4.0,666.26,8 = 71,5$. Ferner entspricht dem obigen Werthe von $\frac{a}{A}$ in Col. III der Tabelle $\varrho = 0,907$ und dem letztern aus der Widerstands-Tabelle $\frac{W_a}{\mu a\sqrt[3]{h}} = 4,50$. Der

Gesamt-Werth von $\frac{W_a}{\mu a\sqrt[3]{h}}$ beläuft sich also auf $71,5 + 4,5 = 76$, welchem in der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,677$ gegenübersteht. Da β für $\frac{a}{A} = 0,444$ in Col. II 0,737 ist, wird mithin $(\varrho\beta)$ der Aufluss-Coefficient = $0,677.0,737 = 0,499$. Der Querschnitt der 4 Zoll weiten Oeffnung berechnet sich auf 0,0873 □Fuss, $\sqrt{2gh} = 7,9\sqrt{49}$ auf 55,3 Fuss. Also Q die Ausflussmenge pro Sekunde = $0,499.0,0873.55,3 = 2,41$ Cbf.

Aufgabe 2. Unter sonst der vorigen Aufgabe gleichen Verhältnissen soll der Ausfluss-Coefficient für ein Rohr, welches unten 6 Zoll und oben 24 Zoll weit ist berechnet werden.

Auflösung. Nach § 36 findet sich für den vorliegenden Fall der

Widerstand, wenn man den in Aufgabe 1) auf 71,5 berechneten mit den Quotienten $\frac{2,3 \log n}{n-1}$ multiplicirt. n bezeichnet hier die Verhältnisszahl der beiden Rohrdurchmesser, also $\frac{24}{6} = 4$.

$\frac{2,3 \log 4}{3}$ ist = 0,46. Es wird also hier $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 71,5 \cdot 0,46 = 32,9$ und mit Hinzurechnung des Widerstands-Werthes beim Durchgange durch die Oeffnung, der sich in Aufgabe 1) auf 4,5 beläuft, $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 37,4$. Dem entspricht in der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,759$. Da $\beta = 0,737$ war, ist also $(\varrho\beta) = 0,759 \cdot 0,737 = 0,559$ und zwar 0,060 grösser als vorhin.

Aufgabe 3. Unter sonst letzterer Aufgabe gleichen Verhältnissen soll der Ausfluss-Coefficient für ein Rohr berechnet werden, dessen Querschnitte bei denselben Flächeninhalten nicht Kreise sondern Rechtecke sind, und zwar soll die längere Seite n mal so lang als die kürzere sein.

Auflösung. Der Werth $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}}$ Gleichung 1) enthält den Werth $\frac{4}{D^2}$ anstatt des Faktors $\frac{B}{A}$ (Umfang dividirt durch Inhalt des Rohres), und gilt daher genau nur für kreisförmige oder quadratische Querschnitte. Bezeichnet man nun mit B_1 den Umfang eines Rechteckes, welches mit dem Quadrate vom Inhalt A gleichen Inhalt hat, dessen eine Seite aber n mal so lang als die andere ist, so findet sich durch einfache Rechnung das Verhältniss

$$2) \frac{B_1}{B} = \frac{2 \cdot (n + 1)}{4 \sqrt{n}}$$

Wie also beispielsweise das Rohr in Aufgabe (2) von einem Querschnitte, dessen längere Seite das 4fache der kürzern ausmacht, so müsste man, den daselbst gefundenen Werth von $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}}$ um $\frac{2 \cdot (4 + 1)}{4 \sqrt{4}} = \frac{5}{4}$ grösser in die Widerstands-Tabelle einsetzen, um ϱ zu finden.

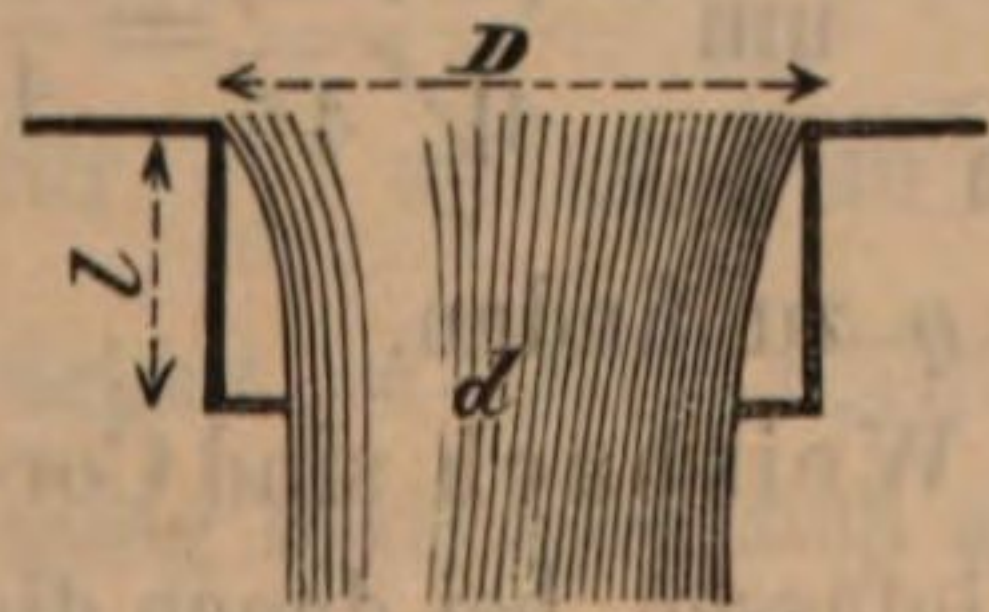
In der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik von Weisbach sind Correktions-Tabellen für die Ausfluss-Coefficienten aus Gefässen, bei denen die Oeffnung einen beträchtlichen Theil des Gefäss-Querschnittes ausmacht, durch Versuche ermittelt worden. Wir bedürfen nach dem Vorstehenden wohl keiner weitem Ausführung dafür, dass diese Tabellen, nur für diejenigen Gefässe passen können, mit denen jene Versuche angestellt

wurden, und kaum annähernde Resultate für die in vorstehenden Aufgaben vorausgesetzten Verhältnisse ergeben können. Trotzdem zeigt die Weisbach'sche Correktions-Tabelle mit den Werthen der unsrigen zwischen $\frac{a}{A} = 0,90$ bis $0,00$ keine bemerkenswerthen Differenzen, mitunter sogar genaue Uebereinstimmung. Nur für grössere Werthe bis $\frac{a}{A} = 1,00$ weist sie die Ausfluss-Coefficienten bis zu $0,03$ grösser nach. Dies kann um so weniger auffallen, als sie den Grenzwert von $(\varrho\beta)$ für $\frac{a}{A} = 1$ auf die höchst unwahrscheinliche Grösse von $0,992$, also grösser ergiebt, wie derselbe unter den allergünstigsten Verhältnissen bei 390 Fuss Druckhöhe aus glatt polirten Mundstücken erreicht werden kann.

§ 54.

Die in § 53 hergeleiteten Gesetze gelten natürlich unter der Voraussetzung, dass das zuströmende Wasser seine Geschwindigkeit V_1 in der Entfernung von $0,3$ des Durchmessers der Oeffnung von letzterer durch allmähliche aber nicht plötzliche und mit Contraktion verbundene Beschleunigung erlangt habe. Es muss also auch die Querschnitts-Änderung des Gefässes in der Nähe der Oeffnung eine allmähliche sein. In jedem einzelnen mehr oder weniger abnormen Falle muss man daher beurtheilen, ob das vorhin entwickelte oder eins von den in früheren oder nachfolgenden Paragraphen entwickelten Gesetzen, etwa für den Ausfluss aus zusammengesetzten Gefässen, aus Ansatzröhren etc. in Anwendung zu bringen sei. In ganz abnormen Fällen aber möchte es keine Schwierigkeiten haben nach Anleitung der hier vorkommenden allgemeinen Entwicklungen ein besonderes dafür passendes Ausflussgesetz herzuleiten.

Fig. 77.



So wird beispielsweise in Figur 77, wenn $d = 0,8D$ und $l = 0,5D$ sein, auch der ausfließende Strahl zwischen D und d die Gefässwand gar nicht berühren sollte, die Oeffnung vom Durchmesser d gar keine Einwirkung auf den Ausfluss haben können. Der Ausfluss-Coefficient wird sich vielmehr wie durch D aus dünner Wand, auf die grössere Oeffnung bezogen, $0,615$, und auf die kleinere $\frac{0,615}{0,64} = 0,945$ berechnen.

§ 55.

Ausfluss durch Oeffnungen in dünnen Seitenwänden.

Die in den vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze für die Widerstands- und Ausfluss-Coefficienten finden mit geringen Abweichungen auch auf den Ausfluss durch Oeffnungen in Seiten-Wänden Anwendung, wenn man statt der über Bodenöffnungen constanten Druckhöhe h eine mittlere Druckhöhe h_m in Rechnung bringt. Jede unendlich kleine horizontale Wasserschicht liegt hier nämlich in verschiedener Entfernung unter der Oberfläche, muss also auch unter verschiedener Druckhöhe ausfliessen. Nur werden die Widerstands-Coefficienten in dem Maasse kleiner, als die Cohäsions-Arbeit in Folge der verschiedenen Geschwindigkeit der einzelnen Schichten durch Verschiebung derselben gegen einander vermehrt wird. Je grösser daher die Differenz der Druckhöhen in der untersten und obersten Schicht, desto kleiner müssen die Ausfluss-Coefficienten sich ergeben, bei Ueberfällen also merklich kleiner, wie bei geschlossenen Oeffnungen unter dem Wasserspiegel. Gewöhnlich berechnet man die mittlere Druckhöhe unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeits-Abnahme der einzelnen Schichten nach Verhältniss der Quadrat-Wurzeln ihrer Druckhöhen erfolge. Unter dieser Voraussetzung erhält man für eine rektanguläre Oeffnung von der Breite b , deren Tiefe unter der Wasseroberfläche an der obern Seite h , an der untern dagegen H beträgt, die Differenzial-Gleichung

$$dQ = bdx \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h+x}$$

die obere Begrenzung der Oeffnung als Anfang der x gerechnet. Hieraus folgt Q als Integral in den Grenzen zwischen $x = H-h$ bis $x = 0$

$$Q = \frac{2}{3} b\beta \sqrt{2g(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}})}$$

Die Ausfluss-Geschwindigkeit c wird, indem man vorstehenden Ausdruck durch den Inhalt des Querschnittes $b(H-h)$ dividirt

$$c = \frac{\frac{2}{3} \beta \sqrt{2g(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}})}}{H-h}$$

Für $h = 0$ reicht die Oeffnung bis zur Oberfläche und entspricht einem freien Ueberfall. Für einen solchen ist

$$c = \frac{2}{3} \beta \sqrt{2gH} = \beta \cdot \sqrt{2g(\frac{4}{9}H)}$$

Man findet also unter der gemachten Voraussetzung, dass die mittlere Druckhöhe einer Ueberfallöffnung auf $\frac{4}{9}$ ihrer ganzen Tiefe unter dem Wasserspiegel anzunehmen sei.

Es ist dies indessen durchaus nicht richtig, weil die Annahme, dass die Ausfluss-Geschwindigkeit der einzelnen Schichten mit den Quadratwurzeln der Druckhöhen wächst, in Wirklichkeit auch nicht im Entferntesten zutrifft. Schon bei dem ersten Bewegungs-Anfange der ein-

zelenen Wassertheilchen im Gefässe tritt ihrer Verschiebung gegeneinander die Cohäsions-Spannung entgegen. Die unter grösserer Druckhöhe ausfliessenden Theilchen werden dadurch verzögert, und umgekehrt die unter geringerer in demselben Maasse beschleunigt. Schon in der Ebene der Oeffnung kommt die Geschwindigkeit an der Oberfläche einem sehr beträchtlichen Theile der Boden-Geschwindigkeit gleich. Damit hängt die Einsenkung an der Oberfläche zusammen, auch hier eine nothwendige Folge des Hineinfallens der obern Theilchen in die durch Beschleunigung der untern entstehenden Lücken. Diese Einsenkung giebt uns daher zugleich das ziemlich genaue Maass für die Geschwindigkeits-Vermehrung der obern Schichten über die ihrer Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeit hinaus. In sehr kurzer Entfernung schon ausserhalb der Oeffnung zeigt die Beobachtung unverkennbar, dass die Geschwindigkeit in allen Schichten eine gleichmässige geworden ist, und ein ganz einheitlicher Strahl zum Ausfluss gelangt.

Der rationelle Weg zur Aufsuchung der mittlern Druckhöhe kann daher nur von der Untersuchung der auf Ausfluss wirkenden verschiedenen Kräfte ausgehen, und nur die ihnen entsprechende Mittelkraft kann uns über die Lage derselben Aufschluss geben. Aus der hydraulischen Grundgleichung

$$P = ah\gamma$$

folgt ohne Weiteres auch die mittlere Druckhöhe

$$h_m = \frac{P_m}{a\gamma}$$

Wir erhalten dann unter Beibehaltung der früher gewählten Bezeichnungen die Differenzial-Gleichung

$$1) \quad dP = bdx(h + x)$$

Das Integral zwischen $x = H - h$ und $x = 0$ giebt

$$P_m = \frac{b\gamma}{2} (H^2 - h^2)$$

Also da nach dem Vorigen $h_m = \frac{P_m}{a\gamma} = \frac{P_m}{b(H-h)\gamma}$

$$2) \quad h_m = \frac{H + h}{2}$$

Dieselbe Rechnung ergiebt für eine kreisförmige Oeffnung vom Radius r

$$3) \quad h_m = h + r$$

Es wird augenscheinlich, dass Gleichung 1) dem Differenzial einer statischen Momenten-Gleichung entspricht, aus der sich in jedem einzelnen Falle als mittlere Druckhöhe die Entfernung des Schwerpunktes der Oeffnung unter der Wasseroberfläche ergiebt.

Die Einsenkung, welche der Wasserspiegel, im Ausfluss-Gefässe bei

freien Ueberfällen schon in der Ebene der Oeffnung erleidet, beobachtet man auf $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{4}$ der Oeffnungshöhe. Sie ist durchaus veränderlich und zwar lediglich eine Funktion der Form des Gefässes und seines Grössen-Verhältnisses zur Oeffnung. Ausserdem verändert sie sich in umgekehrtem Verhältnisse mit der Druckhöhe. Schon wegen dieser Abhängigkeit erscheint es rationeller und correkter, die Druckhöhen-Maasse bei jeder Untersuchung vom stillstehenden Wasserspiegel im Gefässe und nicht in der Oeffnung zu nehmen. Nur hierdurch können wir die auf die Ausfluss-Bewegung wirkende Kraft richtig messen und in sichere Beziehung zu den Widerständen bringen.

§ 56.

Ausfluss durch Oeffnungen in Seitenwänden unter Wasser aus unbegrenzten Gefässen.

Für den Ausfluss aus Oeffnungen unter Wasser aus unbegrenzten Gefässen liegt kein praktisches Bedürfniss zu einer theoretischen Bestimmung der Widerstands- und Ausfluss-Coefficienten vor, weil hier eine so grosse Zahl fast alle vorkommenden Fälle erschöpfender und überaus zuverlässiger Versuche von Poncelet und Lesbros angestellt sind, dass sich dadurch ein sicherer Anhalt bietet, sobald man nur in der Lage ist, das rationelle Gesetz in diesen Versuchs-Resultaten zu erkennen. Tabellen dieser Versuche finden sich am vollständigsten in der Hydromechanik v. Rühlmann § 91, 94 und 103 mitgetheilt. Es wird denn auch nicht schwierig, das rationelle Zu- und Abnahme-Gesetz der Coefficienten im Allgemeinen daraus zu erkennen, wenn man die Versuchs-Resultate von der dasselbe verdunkelnden Constante $\frac{s}{\gamma}$ befreit. Die nachfolgende Tabelle ergibt die für Oeffnungen in der vertikalen Wand eines im Verhältnisse zur Grösse der letztern als unbegrenzt anzunehmenden Behälters von Poncelet und Lesbros gefundenen Ausfluss-Coefficienten. Die Breite der Versuchs-Oeffnungen war constant 0,2 M., ihre Höhe wechselte von 0,01 bis 0,2 M., die Tiefe der obern Oeffnungskante unter dem ruhenden Wasserspiegel im Behälter von 0,05 bis 1,7 M. Die Coefficienten entsprechen in Uebereinstimmung mit unserer Herleitung im § 55 dem Ausdrücke

$$Q = (e\beta)b(H-h) \sqrt{2g \frac{H+h}{2}} \text{ und } v = (e\beta) \sqrt{2g \left(\frac{H+h}{2} \right)}$$

und ergeben dafür die Grösse von $(e\beta)$ dem Ausfluss-Coefficienten, wenn man jeder gemessenen Wasserstandshöhe über der Oeffnung die Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,0037 \text{ M.}$ zusetzt.

Wasserstand über dem obern Rande der Oeffnung. Meter.	Mündungshöhen in Metern.					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
	($\varrho\beta$)	($\varrho\beta$)	($\varrho\beta$)	($\varrho\beta$)	($\varrho\beta$)	($\varrho\beta$)
0,000						
0,005						0,618
0,010			0,587	0,597	0,612	0,618
0,015		0,583	0,592	0,601	0,616	0,625
0,020	0,567	0,586	0,596	0,604	0,619	0,631
0,03	0,573	0,590	0,603	0,612	0,623	0,638
0,04	0,577	0,593	0,608	0,616	0,627	0,641
0,05	0,580	0,596	0,610	0,618	0,630	0,643
0,06	0,582	0,598	0,612	0,619	0,632	0,645
0,07	0,584	0,600	0,614	0,620	0,634	0,645
0,08	0,586	0,602	0,616	0,621	0,636	0,645
0,09	0,587	0,603	0,617	0,622	0,637	0,645
0,10	0,588	0,604	0,618	0,624	0,639	0,645
0,20	0,594	0,609	0,622	0,625	0,638	0,644
0,30	0,597	0,611	0,623	0,626	0,637	0,642
0,40	0,599	0,613	0,623	0,626	0,636	0,641
0,50	0,600	0,614	0,624	0,626	0,636	0,639
0,60	0,601	0,614	0,624	0,627	0,634	0,637
0,70	0,602	0,614	0,624	0,626	0,634	0,636
0,80	0,603	0,614	0,626	0,627	0,636	0,634
0,90	0,603	0,613	0,624	0,626	0,632	0,633
1,00	0,603	0,613	0,624	0,626	0,631	0,630
1,10	0,603	0,613	0,623	0,625	0,629	0,627
1,20	0,603	0,612	0,622	0,624	0,626	0,624
1,30	0,602	0,612	0,620	0,622	0,623	0,620
1,40	0,602	0,611	0,619	0,620	0,620	0,616
1,50	0,601	0,610	0,618	0,618	0,618	0,614
1,60	0,601	0,610	0,617	0,616	0,616	0,612
1,70	0,601	0,609	0,616	0,615	0,614	0,611

Mit der Höhe der Oeffnung und deren Tiefe unter dem Wasserspiegel nimmt, wie bereits erwähnt, das Differenzial-Verhältniss in der Geschwindigkeit der einzelnen horizontalen Wasserschichten bis schliesslich zur Unmerklichkeit ab. Wir finden desshalb auch zunächst in der letzten Reihe bei den Oeffnungshöhen unter 0,1 M. fast ganz genau den Ausfluss-Coefficienten für Oeffnungen in der dünnen Bodenwand mit 0,615 wieder, entsprechend einem Widerstands-Coefficienten von 0,87. Die grösseren Werthe für Mündungshöhen unter 3 Centim. entsprechen auch hier wiederum dem § 51 entwickelten Ausnahme-Gesetz und endlich lässt sich bei allen Mündungsweiten das § 55 erwähnte Differenzial-Verhältniss nicht verkennen. Der niedrigste Werth für eine Oeffnungshöhe von 0,2 M. kommt, wie sich später ergeben wird, bis auf 0,016 dem für einen ganz freien Ueberfall in dünner Wand gleich, weil hier auch nur ein sehr geringer Unterschied zwischen beiden Fällen verbleibt. Auffallender und schwieriger zu erklären bleibt das Maximal-Verhält-

niss, welches alle Versuchsreihen für den Fall ergeben, dass die Wasserstandshöhe über der Oeffnung etwa das 6 bis 7fache der Höhe der letztern beträgt. Bemerkenswerth und entschieden tritt dies Verhältniss jedoch nur bei sehr kleinen Oeffnungs- und geringen Druckhöhen hervor und es möchte daher einerseits in der unvollständigeren Ausbildung des natürlichen Adhäsions-Mundstückes in zu grosser Nähe der Wasseroberfläche (vergl. § 51), andererseits in dem Umstande seine Erklärung finden, dass die Oeffnung bei den Versuchen in einer 0,05 M. starken, nach Aussen abgeschrägten, Bohle eingeschnitten war und die Sprungkraft des Strahles bei geringen Druckhöhen nicht zur völligen Ablösung desselben von der Bohlenkante ausreichte. In diesem Falle mussten die untern Schichten einen Abscheerungs-Widerstand auf letzterer erleiden, welcher die Wirksamkeit der Constante $\frac{s}{\gamma}$ und damit den Ausfluss-Coefficienten entsprechend verkleinerte. Die von Lesbros angestellten Versuche mit Schützöffnungen von bestimmter Wanddicke, welche in § 84 mitgetheilt werden sollen, geben darüber übersichtliche Auskunft. Für die Berechnung der Widerstands- und Geschwindigkeits-Coefficienten aus dem Produkt ($\varrho\beta$) findet auch hier § 50 und § 51 Anwendung.

§ 57.

Offene Ueberfälle in dünner Wand unbegrenzter Gefässe.

Wenn man in § 55 Gleichung 2) h die Druckhöhe über der Oeffnung $= 0$ setzt, so erhält man die mittlere Druckhöhe h_m für Ueberfälle, nach welcher die mittlere Ausfluss-Geschwindigkeit wie für Bodenöffnungen zu berechnen ist $= \frac{H}{2}$, also die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit $c = \sqrt{g \frac{H}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2gH} = \beta \cdot \sqrt{2gH}$, woraus also für β der Werth 0,5 folgt.

Bezeichnet mithin b die Breite des Ueberfalles und H die ganze Tiefe desselben unter dem ruhigen Wasserspiegel des Gefässes, so wird die effektive Ausfluss-Geschwindigkeit v

$$1) v = 0,5\varrho \sqrt{2gH} \text{ oder } 0,702\varrho \sqrt{2gh_m}$$

und die effektiv ausfliessende Wassermenge Q

$$2) Q = 0,5\varrho b \cdot H \sqrt{2gH} \text{ oder } = 0,707\varrho b H \sqrt{2gh_m}.$$

Von den Lesbros'schen Versuchen, welche sich in der Hydromechanik von Rühlmann § 103 mitgetheilt finden, passen für den hier vorausgesetzten Fall, nämlich, dass die Grösse der Oeffnung keinen namhaften Theil des Zuflussgewinnes ausmache, dass ferner der Wasserstand in letzterem sich in Ruhe befinde und die Höhe H vom stillstehenden

Wasserspiegel ab gemessen sei, nur die in der ersten vertikalen Columne mit A_a bezeichneten. Entkleidet man die Versuchs-Resultate ebenfalls von dem Einflusse der übersehenen Constante $\frac{s}{\gamma}$, so erhält man nachstehende Tabelle der Ausfluss-Coefficienten für Ueberfälle in dünner Wand von 0,2 M. Breite. Da die Oeffnung aber wegen der Einsenkung an der Oberfläche nur zu etwa $\frac{9}{10}$ gefüllt ist, so kann auch von dem Werth $\frac{s}{\gamma} = 0,0037$ M. nur $\frac{9}{10}$ mit 0,0033 in Ansatz gebracht und der Grösse von H unter dem Wurzelzeichen zugesetzt werden.

Ueberfall- höhe H in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22	0,25	0,30
Ausfluss- Coefficient ($q\beta$) für H als Druckhöhe berechnet.	0,367	0,386	0,390	0,391	0,390	0,389	0,389	0,388	0,386	0,382	0,376	0,369
Desgl. für $h_m = \frac{H}{2}$ als Druckhöhe berechnet.	0,519	0,546	0,551	0,553	0,551	0,550	0,550	0,549	0,546	0,540	0,532	0,522

Für Oeffnungshöhen von 0,02 bis 0,20 M. finden wir in vorstehender Tabelle eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung. Für alle Fälle, in denen die Breite das $1\frac{1}{3}$ bis 7fache der Oeffnungshöhe beträgt, können wir daher den Werth des Ausfluss-Coefficienten auf 0,390 mit genügender Sicherheit annehmen.

Der Werth für den Widerstands-Coefficienten $q = \frac{q\beta}{\beta}$ ergibt sich $\frac{0,390}{0,5} = 0,78$, also um 0,09 kleiner wie bei Oeffnungen in der dünnen Bodenwand, was nach dem darüber in § 56 Bemerkten wohl nicht überraschen darf. Auch die erheblich geringern Werthe für die kleinen Ueberfallhöhen von 0,01 und 0,02 M. haben dort bereits ihre Erklärung gefunden. Dieselben sind als Abnormitäten zu betrachten und finden überdies kaum Anwendung in der Praxis. Für Ueberfälle, deren Höhe das 1fache bis $1\frac{1}{2}$ fache der Breite beträgt, nimmt der Ausfluss-Coefficient von 0,386 bis 0,369 der Widerstands-Coefficient also von 0,772 bis 0,738 ab.

Auch für andere in der Praxis vorkommende Fälle bieten die sonstigen Versuchs-Resultate von Lesbros, die sich in hydraulischen Lehrbüchern mitgetheilt finden, einen genügend sichern Anhalt. Wir wiederholen die Mittheilung derselben hier darum nicht, weil sich ihre Coeffi-

cienten fast alle aus den in unserer Tabelle aufgeführten durch Rechnung finden lassen, wenn man den hinzutretenden Werth von $\frac{Wa}{\mu a \sqrt[3]{h}}$ nach Anleitung der früheren Beispiels-Rechnungen ermittelt und die entsprechenden Werthe von ϱ in der Widerstands-Tabelle dafür aufsucht. Versuchs-Resultate und Rechnung ergeben überall die gewünschte Uebereinstimmung.

§ 58.

Ausfluss durch dünne Seitenwände aus Gefässen mit begrenztem Querschnitte.

In der Maschinen- und Ingenieur-Mechanik von Weisbach findet sich auch für den Ausfluss aus Seitenwänden ein Versuch gemacht, durch Berechnung einer Correktions-Tabelle, mit den für den Ausfluss aus unbegrenzten Gefässen geltenden Coefficienten diejenigen für den Ausfluss aus begrenzten herzuleiten. Die Korrektur wird daselbst abhängig von dem Verhältnisse $\left(\frac{a}{A}\right)^2$ zwischen Oeffnung und Behälter gemacht. Dass auch diese Tabelle nur innerhalb sehr beschränkter Grenzen richtige Werthe ergeben kann, ist bereits § 53 nachgewiesen. Abgesehen von den zu grossen Grenzwerten, welche sie ergiebt (für $\frac{a}{A} = 1, (\varrho\beta) = 1,01$) findet eben der Widerstand in den Wandungen des Ausfluss-Behälters darin keine Berücksichtigung.

Das § 52 entwickelte Gesetz gilt auch für den Ausfluss durch Seitenwände und es wird daher genügen, die Anwendung desselben hier durch einige Beispiele zu erläutern.

Aufgabe 1. Die Versuche von Lesbros ergaben den Ausfluss-Coefficienten für einen freien Ueberfall von 0,2 M. Breite und 0,3 M. Höhe, welcher in der Mitte der Seitenwand eines grossen Behälters angebracht war auf 0,324, wenn der ausfliessende Strahl nicht in die freie Luft, sondern durch Vermittlung eines 3 M. langen horizontalen Gerinnes vom Querschnitte der Oeffnung zum Ausfluss gelangte. Der Boden des Gerinnes lag horizontal mit der Unterkante der Oeffnung. Wie gross ergiebt sich der Ausfluss-Coefficient durch Rechnung?

Auflösung. In pr. Maass berechnet sich $H = 0,956$ also $\frac{H}{2} + \frac{s}{\gamma}$ die Druckhöhe, welche hier in Rechnung zu stellen ist 0,49', b die Breite des Gerinnes 0,637', l die Länge desselben 9,56', a der wahrscheinliche Querschnitt des Strahles im Gerinne auf 0,67 des Quer-

schnittes der Oeffnung, also 0,408 □Fuss, $\sqrt[3]{h}$ findet sich 0,788, der benetzte Umfang der Rinne $B = 0,637 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,956 = 1,98'$.

$$\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = \frac{1 \cdot B}{a \sqrt[3]{h}} \text{ ist also } \frac{9,56 \cdot 1,98}{0,408 \cdot 0,788} = 59,0.$$

Der Widerstands-Coefficient für den Ausfluss ohne Gerinne findet sich nach der Versuchs-Tabelle § 57 aus der letzten Rubrik derselben $\frac{0,382}{0,5} = 0,764$. Dem entspricht in der Widerstands-Tabelle ein Werth

$$\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 35,3. \text{ Für den Gesamtwert von } \frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 59,0 + 35,3$$

$= 94,3$ ergibt die letztere $\varrho = 0,648$, woraus $(\varrho\beta)$ der Ausfluss-Coefficient folgt $0,5 \cdot 0,648 = 0,324$ in genauester Uebereinstimmung mit dem Versuchs-Resultate von Lesbros.

Aufgabe 2. Mit einem Sammelteiche stehen ein 4 Fuss breites, 12 Fuss langes, 3 Fuss unter dem Wasserspiegel des Teiches tiefes, horizontales Gerinne, mit vertikalen Seitenwänden in Verbindung. Das Ende desselben sei durch ein 2 Fuss über der Gerinne-Sohle hohes Schutzbrett mit scharfen Kanten geschlossen, so dass sich ein 4 Fuss breiter und, vom ruhigen Wasserspiegel im Teich ab gemessen, 12 Zoll hoher freier Ueberfall bildet. Es soll der Ausfluss-Coefficient berechnet werden.

Auflösung. Es findet sich zunächst $H = 1'$, also incl. $\frac{s}{\gamma}$, $h = 0,512'$, $l = 12'$, $b = 4'$ und wenn man die mittlere Wasserstandshöhe $= 2' - 11''$ annimmt, $B = 4 + 2 \cdot 2,9 = 9,8$, $A = 12$ □Fuss,

$$\frac{a}{A} = 0,333, \sqrt[3]{\frac{a}{A}} = 0,577, \sqrt[3]{h} = 0,8.$$

Nach § 38 Gleichung 2), $W_a = \mu l B \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{3}{2}}$ berechnet sich also

$$\frac{W_a}{\mu a} = \frac{l B}{A} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{A}} \text{ auf } 5,65 \text{ und}$$

$$\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = \frac{5,65}{0,8} = 7,04, \text{ wenn für } a \text{ der Oeffnungs-Querschnitt in Rech-}$$

nung gebracht wird. Da die Widerstands-Tabelle aber für die Strahl-Querschnitte berechnet worden und der letztere hier nur auf 0,7 des erstern angenommen werden kann, so haben wir für

$$\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} \text{ den Werth } \frac{7,04}{0,7} = 10,06 \text{ in die Tabelle einzusetzen.}$$

Für $\frac{a}{A} = 0,333$ findet sich § 53, $\varrho = 0,887$ entsprechend

$$\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 7,04.$$

Ausserdem erleidet das Wasser noch bei seinem Eintritte aus dem Teiche in das Gerinne einen Widerstand. Nehmen wir den Coefficienten dafür dem beim Ausflusse durch eine dünne Wand $= 0,87$ an, so entspricht

dem $\frac{W}{\mu a \sqrt[3]{h}} = 9,2$. Nach Verhältniss der Geschwindigkeit, mit welcher

dieser Widerstand überwunden wird, zur Ausfluss-Geschwindigkeit kann hiervon nur in Anrechnung kommen $0,333 \cdot 0,7 \cdot 9,2 = 2,14$. Der

Gesamt-Werth von $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}}$ ergibt sich mithin auf

$$10,06 + 7,04 + 2,14 = 19,24.$$

Dem entspricht in der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,818$.

Es bleibt nunmehr noch die Bestimmung von β übrig.

Das Zunahme-Verhältniss des theoretischen Coefficienten für den Ausfluss aus unbegrenzten und begrenzten Gefässen findet sich in der Tabelle § 53 für $\frac{a}{A} = 0$ bis $\frac{a}{A} = 0,333$ auf $\frac{0,723}{0,707}$. Da β für den vorliegenden Fall bei unbegrenzten Gefässen nach § 57 $= 0,5$ ist, berechnet es sich also in diesem Falle auf $\frac{0,723}{0,707} \cdot 0,5 = 0,511$.

Hieraus folgt der gesuchte Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta) = 0,818 \cdot 0,511 = 0,418$. Genau denselben Werth ergibt zwar für diesen Fall auch die Correktions-Tabelle von Weisbach. Es kann dies indessen nur Zufall sein, denn nehmen wir die Länge des Gerinnes 6 Fuss anstatt 12 Fuss an, so findet sich der Widerstands-Coefficient schon 0,833 anstatt 0,812 und der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta)$ 0,426, also um 0,008 grösser, wie ihn Weisbach bei seinen Versuchen gefunden hat.

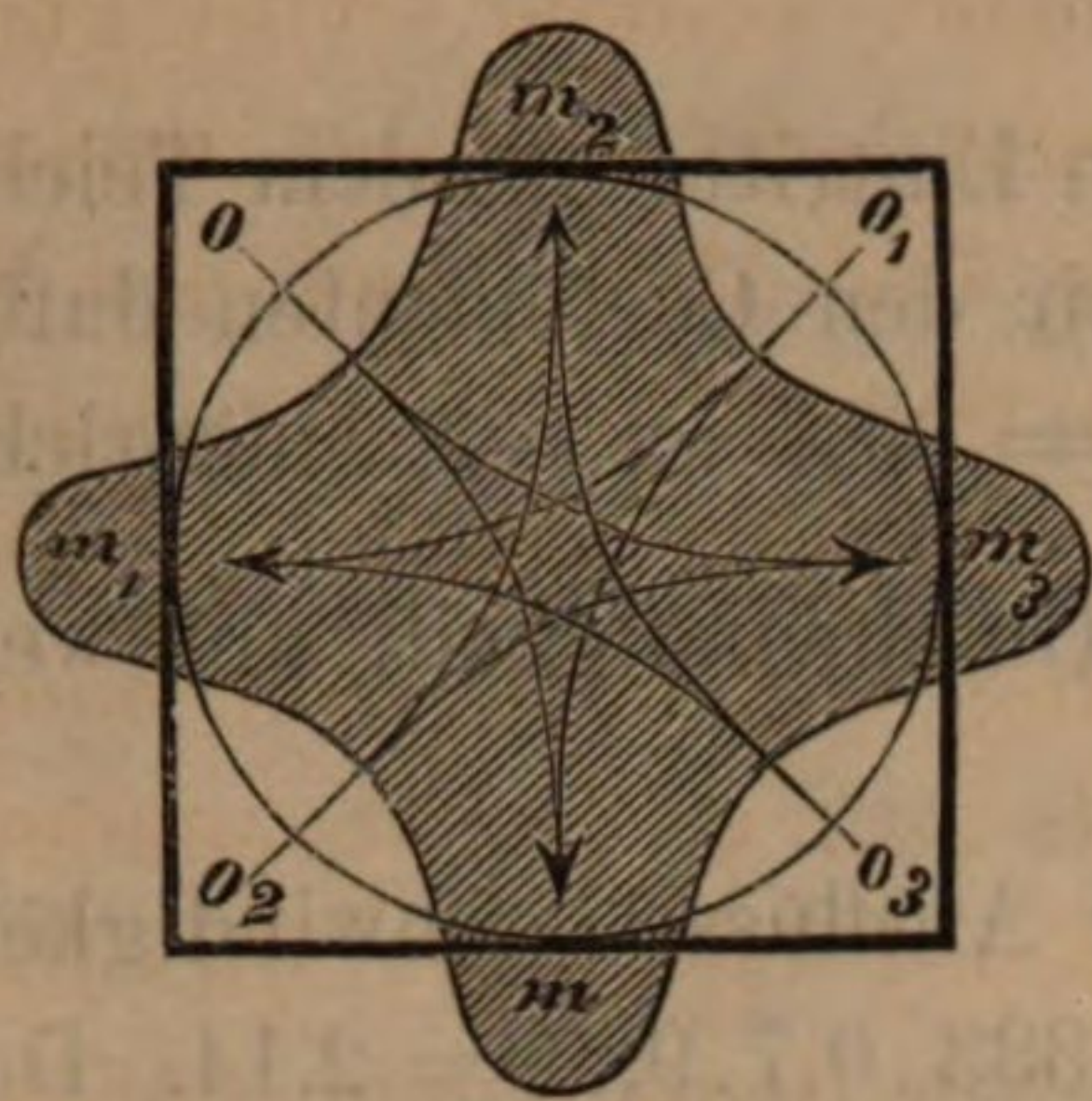
§ 59.

Verschiedene Strahlen-Querschnitte.

Besonders geeignet, uns die Thatsache zu veranschaulichen, dass der Ausfluss aus dünnen Wänden keine Funktion der freien Fall-Bewegung, sondern der Einwirkung des durch die Oeffnung frei gewordenen hydrostatischen Druckes auf jedes Flächen-Element der in der Oeffnung befindlichen Wassertheilchen ist, erscheint die Beobachtung der Querschnitte, welche durch verschieden geformte Oeffnungen fliessende Strahlen nach ihrem Austreten annehmen. Diese Formen sind lediglich von der

Richtung der Mittelkräfte des Druckes auf die Oeffnung abhängig. Denkt man sich beispielsweise in Figur 78 eine kreisrunde Oeffnung zu einer

Fig 78.



quadratischen erweitert, so treten in den 4 Ecken des Quadrates $0, 0_1, 0_2, 0_3$ neue Druckkräfte mit horizontalen Componenten in den Diagonal-Richtungen des Quadrates hinzu, die sich zu den 4 Mittelkräften m, m_1, m_2, m_3 vereinigen und die Umformung des Strahl-Querschnittes unterhalb der Oeffnung in den mit schraffirten Linien angedeuteten, wie solchen die Beobachtung ergibt, herbeiführen müssen. Die Veränderungen, welchen die Querschnittsform bei der fortge-

setzten Bewegung unterliegt, sind lediglich Funktionen des Beharrungsvermögens der einzelnen Wassertheilchen in ihrer ursprünglichen Bewegungs-Richtung, der stets wirksamen Cohäsionskraft und der vollkommenen Elasticität beim Zusammenfügen und Auseinandergehen derselben. Eine nähere Untersuchung des Gesetzes der Strahlenbildung möchte weder von besonderem praktischen noch wissenschaftlichen Interesse sein. Dass Strahlen-Querschnitte im weiteren Verlaufe des freien Falles unterhalb der Oeffnung eines Gefässes grösser werden können, wie dies Lesbros beobachtet haben will, ist darum nicht möglich, weil in diesem Falle auch die Geschwindigkeit der einzelnen Wassertheilchen verzögert worden sein müsste und auf eine solche Verzögerung der fortgesetzten Wirkung der Schwerkraft entgegen keine Kräfte als wirksam gedacht werden können. Man findet vielmehr in jedem solchen Falle bei scharfer Beobachtung, dass sich der Strahl im Innern gespalten hat und einen mit Luft angefüllten Raum in sich einschliesst, während der mit Wasser angefüllte Querschnitt der Beschleunigung des freien Falles entsprechend sich stetig verkleinert. Bei Strahlen aus rektangulären Oeffnungen, deren Länge die Breite erheblich überwiegt, wird die Seitenwirkung der Druckkräfte an den beiden Enden im Verhältnisse zur ganzen Strahlmasse zu gering, als dass sie sich auf die ganze Länge der letztern erstrecken könnte. Der mittlere Theil behält daher die oblonge Form bei, während sich an beiden Enden knotenartige Aufstauchungen und Verdickungen zeigen.

§ 60.

Der Luft-Widerstand und der Ausfluss unter Wasser.

Dass zwischen Luft und Wasser ein ähnliches Cohäsions-Verhältniss obwalte, wie bei der Berührung des Wassers mit den Flächen fester Körper, dürfte mit hoher Wahrscheinlichkeit anzunehmen sein, also auch,

dass die mit einem ausfliessenden Wasserstrahle in Berührung kommenden Lufttheilchen die Geschwindigkeit des erstern annehmen und die weiter entfernten lediglich nach Maassgabe der eignen Cohäsion und Biegsamkeit mit in die Bewegung hineingezogen werden. Aber nicht nur die Masse der in Mitleidenschaft gezogenen Lufttheilchen, sondern auch deren wahrscheinliche Cohäsion, werden der Masse und der ihr innewohnenden lebendigen Kraft des Wassers gegenüber so verschwindend klein, dass sie überall da füglich ausser Acht gelassen werden können, wo man es nur mit Flächen-Reibung und nicht mit einem Massenstosse zu thun hat. Der letztere tritt da auf, wo Luftströmungen sich in inklinanter Richtung gegen Wasserflächen bewegen, dieselben allmählich aufstauen und schliesslich zu Wellen-Bewegungen treiben, die der Einwirkung der bewegten Luft fast normale Stossflächen bieten und ihr die Erzeugung einer so gewaltigen Arbeit möglich machen, wie sie uns in der Wellen-Bewegung des Meeres und auch der Ströme vor Augen tritt. Bei dem Ausflusse von Wasserstrahlen haben wir es dagegen wohl in allen Fällen nur mit dem verschwindend kleinen Reibungs-Widerstande zu thun, sobald der Ausfluss ein continuirlicher geworden ist. Dieser Widerstand wird überdies bei allen abwärts sich bewegenden Strahlen durch die von letztern beim Ausflusse bereits erlangte lebendige Kraft überwunden, ohne durch Rückwirkung denselben zu beeinträchtigen. Selbst bei aufwärts gerichteten Springbrunnen-Strahlen beruht die Annahme eines Luft-Widerstandes von messbarem Einfluss auf die Sprunghöhe wohl auf einer Täuschung. Alle Versuche, welche darüber von Mariotte, Bossut, Baumgarten und Andern angestellt sind, weisen uns, wenn wir die Rechnung darauf anwenden, nur genau die bekannten Widerstände der Leitungen und Ausflussöffnungen als allein massgebend für die Verminderung der theoretischen Sprunghöhe der Strahlen nach. Man könnte vielleicht versucht werden, die Auflösung springender Strahlen am Ende der Sprunghöhe in Ballen und Tropfen dem Luft-Widerstande zuzuschreiben, wenn man eben ausser Acht lässt, dass in jedem continuirlichen Ausflusse, sobald die Geschwindigkeit durch Verzögerung 0 wird, der Querschnitt unendlich werden muss, und dass, weil zu einer unendlichen Ausbreitung die Seitenkräfte fehlen, dieser Bedingung nicht anders als durch Zerfallen in sich selbst genügt werden kann.

Auch bei dem Ausflusse unter Wasser können wir keine erhebliche Beeinträchtigung der in § 48 und 59 hergeleiteten Gesetze erwarten, weil einmal der hydrostatische Druck auf die Oeffnung, der hier durch die Differenz der Wasserstände innerhalb und ausserhalb des Gefässes gemessen wird, uns eben so genau das Maass für die bewegende Kraft giebt, wie beim Ausflusse in die freie Luft der Wasserstand über der

Oeffnung und zum andern der Widerstand, welchen das ausfliessende Wasser durch den Stoss gegen das in Ruhe befindliche erleidet, von der lebendigen Kraft des ersteren nach stattgehabtem Ausflusse überwunden wird, ohne auf letzteren erheblich zurückwirken zu können.

Das Ergebniss der Versuche von Weisbach, wonach die Ausfluss-Coefficienten beim Austritte unter Wasser um $1\frac{1}{3}\%$ kleiner ausfallen sollen, würde daher wohl annehmbar und für die praktische Anwendung hinreichend erscheinen, wenn die Erfahrung in Uebereinstimmung mit der Rational-Theorie nicht lehrte, dass jene Versuche eben nur für die besondern Umstände als Maassstab dienen können, unter welchen sie angestellt sind. Es giebt nämlich nicht nur sehr viele Fälle, in denen die Ausmündung unter Wasser keine Verminderung der Ausfluss-Coefficienten zur Folge hat, sondern auch solche, in denen sie dieselben um 30 ja 40% vergrössert. Einer der letzteren wird als Ausnahme-Fall im nächsten Abschnitt § 73 bei Gelegenheit des Ausflusses aus divergenten Ansatzrohren zur Erörterung gelangen. Die Versuche des Verfassers haben zunächst ergeben, dass eine bemerkenswerthe Verringerung des Ausflusses überhaupt nur dann eintritt, wenn die Ausmündung von unten nach oben gerichtet ist und die Wassermasse, gegen welche der austretende Strahl stösst, eine verhältnissmässig sehr grosse und relativ unbewegliche ist. Unter solchen Verhältnissen sind auch die Weisbach'schen Versuche angestellt und gelten daher beispielsweise für die Füllung von grösseren Gefässen durch Oeffnungen am Boden derselben und zwar bei Druckdifferenzen von mindestens 0,13 M. Jedenfalls tritt dabei auch im ungünstigsten Falle kein grösserer Verlust, wie der von Weisbach gefundene ein. Bei sehr kleinen Druckhöhen darf auch nicht übersehen werden, dass bei aufwärts gerichteter Ausmündung auch in freier Luft zunächst die Constante $\frac{s}{\gamma}$ wegfällt, weil solche durch die Schwerkraft aufgehoben wird. Dagegen bleibt sie eigenthümlicher Weise überall da, auch beim Ausflusse unter Wasser, wirksam, wo sie beim freien Ausflusse in Rechnung zu bringen ist. Das austretende Wasser giebt ausserhalb der Austritts-Oeffnung durch Geschwindigkeits-Verminderung einen erheblichen Theil seiner durch den Ausfluss aufgesammelten Arbeit wieder ab. Es kann nicht daran gezweifelt werden, dass auch beim horizontalen Austritte, wenn die Masse und Trägheit des entgegenstehenden Wassers nicht zu überwältigend gegenüber der Masse und Geschwindigkeit des stossenden Strahles wird, diese Arbeit nicht nur der ganzen entgegenstehenden Masse nach allen Richtungen hin, sondern auch der Ausfluss-Bewegung mit der Saughöhe $\frac{s}{\gamma}$ in der Art zu gut kommt, wie dies bei luftdichten divergenten Ansatzrohren

mit der ganzen Kraft der Fall ist, welche der negativen Beschleunigung beim Durchgange durch das Rohr entspricht (vergl. § 72).

Ganz sicher ist dieses der Fall, wenn offene oder geschlossene Leitungen an der Oberfläche grösserer Reservoirs münden. Die wellenartige Einsenkung, welche der Wasserspiegel des letztern an der Ausmündung erleidet und von der ein Theil auch dem Gefälle der Leitung zu gut kommt, entspricht eben der Arbeits-Verrichtung des eintretenden Wassers gegen das im Reservoir befindliche. So finden wir denn auch bei dem § 46 angestellten Vergleiche der Du Buat'schen Versuchs-Resultate an einem künstlichen Kanale, der in ein kleines Bassin mündete, mit den Ergebnissen der Rationaltheorie nur dann eine befriedigende, ja mitunter, wie bei den beiden letzten Versuchen, auffallende Uebereinstimmung, wenn wir den gemessenen Druckhöhen die Constante $\frac{s}{\gamma}$, welche also offenbar an der Mündung den Ausfluss beförderte, zusetzen. Behufs Bestätigung dieser jedenfalls eigenthümlichen Erscheinung wurden vom Verfasser nachstehende Versuche angestellt.

In dem Boden eines 12 Zoll weiten, 12 Zoll hohen Gefässes wurde ein vertikales, etwas divergent gebohrtes Ansatzrohr von 61 mm. Länge eingefügt. Ein- und Ausmündung waren nicht abgerundet, sondern scharfkantig, erstere von 5,03, letztere von 5,85 mm. Durchmesser. Der Ausfluss in die freie Luft gab bei 12 Zoll bis 1 Zoll Druckhöhe ($q\beta$) = 0,745. Darauf wurde unter die Mündung ein 15 mm. tiefes, 140 mm. weites rundes Schälchen mit flachem Boden so aufgestellt und mit Wasser gefüllt, dass die Rohrmündung beim Ausflusse 1 mm. tief eintauchte. Es ergab sich hierauf, wenn man die den Höhen des ersten Versuches zugesetzte Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,012'$ fortliess, bei denselben Druckhöhen ($q\beta$) = 0,751 und nachdem das Schälchen so viel höher gestellt war, dass das Ansatzrohr 6 mm. tief eintauchte ($q\beta$) = 0,752. Rechnet man dagegen auch bei den letzten beiden Versuchen $\frac{s}{\gamma}$ hinzu, so ergibt sich ($q\beta$) auf 0,742 resp. 0,743, also nicht wie hier ganz naturwidrig, unter Wasser grösser, sondern um 0,001 resp. 0,002 kleiner als beim Ausflusse in die Luft.

Würde man dagegen bei sehr kleinen Druckhöhen von 0,02 bis 0,13 M. einen horizontalen Ausfluss so tief unter Wasser stattfinden lassen, dass die Wirksamkeit der Constante $\frac{s}{\gamma}$ von der Massenträgheit vollständig überwältigt wird, so muss der von Weisbach angegebene Verlust für solchen Fall wieder viel zu gering werden. Die Fortlassung

des Werthes von $\frac{s}{\gamma}$ allein giebt nämlich bei 0,026 M. Druckhöhe eine Differenz von 6%, bei 0,052 M. von 3%, bei 0,078 M. von 2% und bei 0,13 M. erst von $1\frac{1}{3}$ %.

In jedem besondern Falle wird sich hiernach beurtheilen lassen, in wie weit es behufs Erlangung der erforderlichen Genauigkeit von Rechnungs-Resultaten, lohnend erscheint, einen Unterschied zwischen dem Ausflusse in die Luft oder unter Wasser zu machen.

§ 61.

Ausfluss aus bewegten Gefässen.

Ein Körper von der Masse M befinde sich unterstützt in Ruhe. Er diene gleichzeitig einem andern Körper von der Masse m als Unterlage. Wird die Unterstützung von M beseitigt, so fallen also beide Körper mit der gleichen Beschleunigung g, mithin auch mit stets gleicher Geschwindigkeit, und keiner vermag auf den andern einen Druck auszuüben. Es werde nun aber angenommen, dass beide mit der Beschleunigung $p < g$ fallen, während die Masse m auf der M frei aufruhet. Fällt die Masse m aber nur mit der Beschleunigung $p < g$, anstatt mit der g, so muss ihrer Schwerkraft oder ihrem eigenen Gewichte G eine gewisse Kraft P entgegenwirken und $\frac{G-P}{m}$ muss = p sein, woraus sich $P = G - mp$ ergibt. P kann aber auf keine andere Weise, als durch Gegendruck der Masse M, auf der m als frei aufruhend gedacht worden, erzeugt sein und muss daher die Grösse desselben ausdrücken. Wir haben hierbei p nur der klareren Vorstellung wegen $<$ als g angenommen. Es ist indessen leicht zu übersehen, dass die Beziehung

$$1) P = G \pm mp = Q\gamma \left(1 \pm \frac{p}{g}\right)$$

ganz allgemein für jeden Werth und jedes Vorzeichen von p gelten muss, wenn Q den Cubikinhalt und γ das Gewicht der Einheit von m bezeichnet.

Dieser Lehrsatz findet auch auf den Ausfluss aus Gefässen Anwendung, die mit beschleunigter Geschwindigkeit auf oder abwärts bewegt werden. Der Druckkraft P, welche das Wasser auf die Gefässwandungen ausübt, entspricht die Beschleunigung $\frac{P}{m} = \frac{Pg}{Q\gamma}$, wofür sich aus Gleichung 1) findet $g \pm p$.

Die theoretische Arbeits-Geschwindigkeit C, mit welcher das Wasser aus Seiten- oder Boden-Oeffnungen solcher mit der Beschleunigung p

auf oder nieder bewegter Gefässe ausfliessen muss, drückt sich also anstatt mit $\sqrt{2gh}$ aus durch

$$2) C = \sqrt{2h(g \pm p)}.$$

Wird $p = 0$, so wird $C = \sqrt{2gh}$, d. h. bewegen sich Gefässe ohne Beschleunigung mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so übt solche keine Einwirkung auf die Ausfluss-Bewegung aus.

§ 62.

Aus § 61 folgt, dass auch bei Oeffnungen in Seitenwänden, eine gleichförmige Bewegung des Gefässes während des Ausflusses in horizontaler oder sonst beliebiger Richtung keine Einwirkung auf letztern auszuüben vermag. Dagegen wird eine beschleunigte Bewegung in horizontaler Richtung gewisse Aenderungen nicht nur in der Ausfluss-Geschwindigkeit, sondern auch an dem ursprünglich horizontalen Wasserspiegel eines Gefässes erzeugen müssen, die zu untersuchen von Interesse ist.

Die Beschleunigung des Gefässes erfolge nach einer Richtung, welche mit der des Ausflusses in horizontaler Projektion den Winkel α , in vertikaler den δ bildet und sei in ihrer absoluten Richtung p . Dann berechnet sich die Beschleunigung in der Richtung des ausfliessenden Strahles $p_1 = p \cos \alpha \cdot \cos \delta$. Stellt nun Figur 79 einen Vertikalschnitt

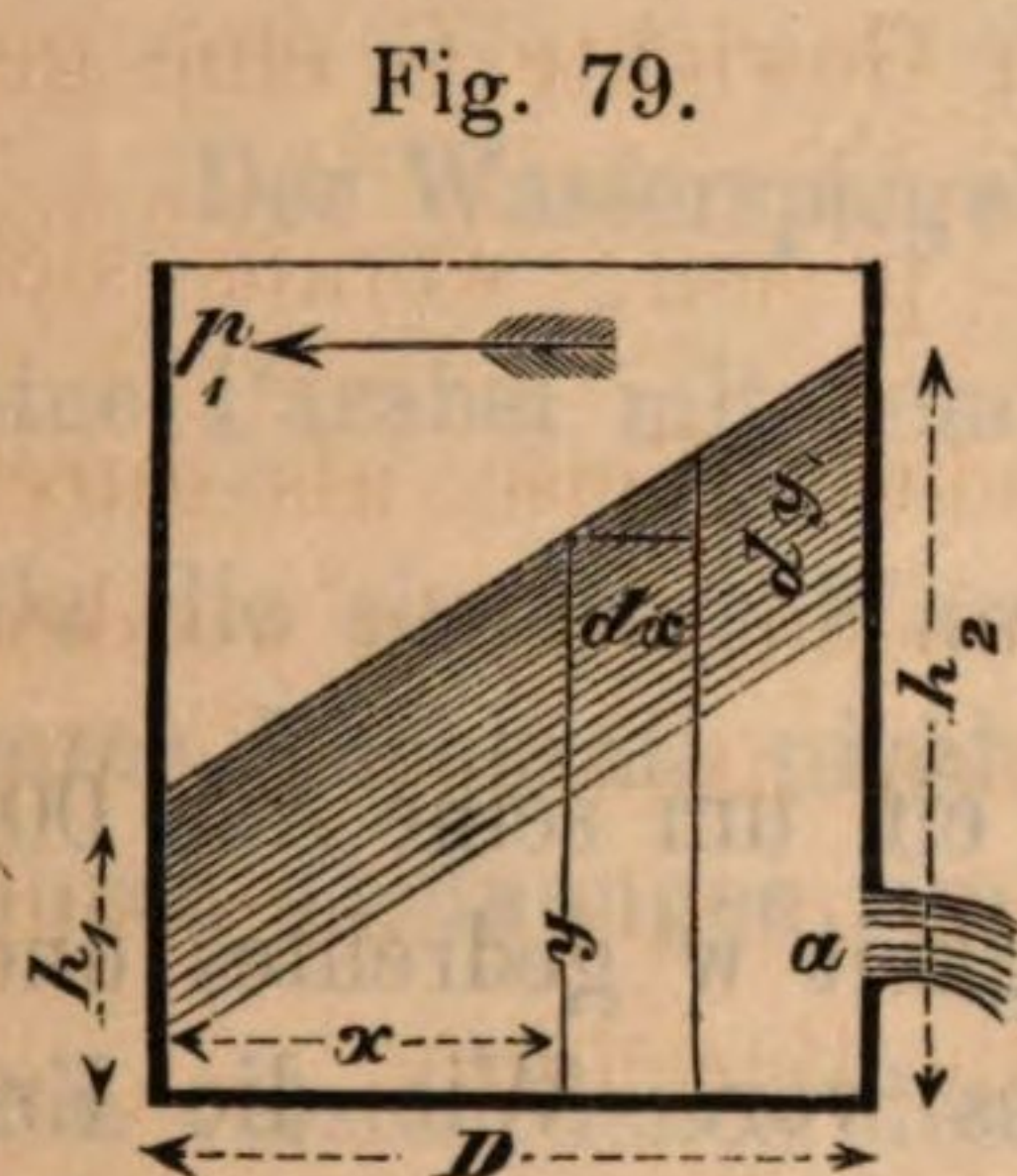


Fig. 79.

in der Ebene des letztern durch die Oeffnung a in der Seitenwand eines Gefässes dar und letzteres wird in einer durch den Pfeil angezeigten Richtung mit der relativen Beschleunigung p_1 vorwärts bewegt, so muss auch jedes im Gefässe befindliche Massen-Element derselben Beschleunigung wie die ganze Masse unterworfen sein, also auch das Element von der Dicke dx , der Höhe y und der Breite $= 1$ von

der Masse $\frac{y dx \gamma}{g}$, wenn γ wiederum das Gewicht der Einheit bezeichnet.

Dies Massen-Element muss folglich mit der Kraft $P_1 = m p_1 = \frac{y dx \gamma}{g} \cdot p_1$ gegen die Wand in der Richtung nach a gepresst werden. Da es sich aber während der Bewegung trotzdem im Gleichgewichte gegen die benachbarten Massentheilchen befindet, so muss der Wasserspiegel rechts von ihm sich um so viel erhoben haben, dass der Ueberdruck $y dy \gamma = P_2$ der Pressung P_1 das Gleichgewicht hält. Desshalb muss sein

$$P_1 = P_2 = \frac{y dx \gamma}{g} p_1 = y dy \gamma \text{ und } \frac{p_1}{g} dx = dy.$$

Dies ist aber die Differenzial-Gleichung einer geraden Linie. Bezeichnet

man als Constanten die Minimal-Höhe für $x = 0$ mit h_1 und die Maximal-Höhe für $x = D$ mit h_2 , so wird das denselben entsprechende Integral

$$1) \quad y = h_1 + \frac{p_1}{g}x = h_1 + \frac{p}{g}x \cos \alpha \cdot \cos \delta.$$

$$2) \quad h_2 = h_1 + \frac{p}{g}D \cdot \cos \alpha \cdot \cos \delta.$$

Für $\cos \alpha$ und $\cos \delta = 1$ wird $h_2 = h_1 + \frac{p}{g}D$ und für $p = g$ wird $h_2 = h_1 + D$, d. h. „wenn ein Gefäss mit Wasser in horizontaler Richtung mit einer der des freien Falles gleichen Beschleunigung fortbewegt wird, so bildet der Wasserspiegel darin eine Ebene, welche gegen die Horizontale um 45° geneigt ist“. Für $\alpha = 90^\circ$, also $\cos \alpha = 0$, wird der Vertikal-Durchschnitt durch den Wasserspiegel horizontal, weil $h_2 = h_1$. Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen gelten für jeden vertikalen Durchschnitt und für jede beliebige Gefässform. Will man nun für eine beliebige Oeffnung a die theoretische Arbeits-Geschwindigkeit C des ausfliessenden Strahles berechnen, so muss man danach erst die Höhe h des Schwerpunktes der Oeffnung unter dem erhobenen Wasserspiegel über derselben berechnen und in Gleichung 2) § 61 h_x anstatt h auch $p \cos \delta$ anstatt p einsetzen. Dann ergibt sich

$$3) \quad C = \sqrt{2h_x(g \pm p \cos \delta)}.$$

§ 63.

Figur 80 stelle den vertikalen Schnitt durch ein um seine Axe 00_1 mit der Winkel-Geschwindigkeit w gedrehtes und mit Wasser gefülltes Gefäss vor. Wie die Erfahrung lehrt wird das Wasser alsdann in der Mitte die Höhe h_1 an den Wandungen die h_2 haben und in unserm Schnitt der Wasserspiegel daher eine Curve bilden. Der aus der Geomechanik bekannte allgemeine Ausdruck für die Fliehkraft P einer mit der Geschwindigkeit $C = rw$ in der Entfernung r von einem Mittelpunkt um denselben bewegten Masse m ist

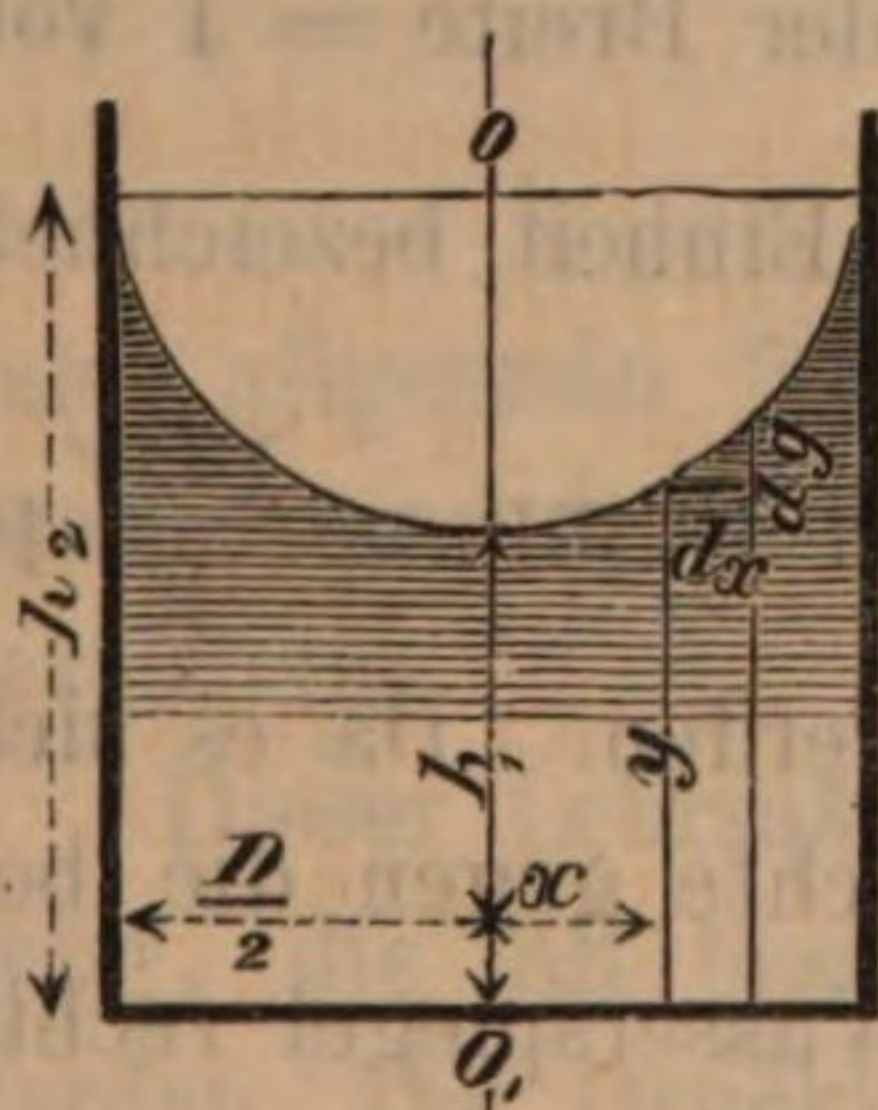


Fig. 80.

$$P = \frac{mC^2}{r} = mw^2r.$$

Für ein aufrechtstehendes Wasser-Parallelepipedon von der Höhe y , der Dicke dx und der Breite $= 1$ also der Masse $\frac{ydx\gamma}{g}$ berechnet sich also

$$1) P_1 = \frac{y dx \gamma}{g} \cdot w^2 x.$$

Wenn Gleichgewicht stattfinden soll, so muss diese Fliehkraft, welche den in Betracht gezogenen Wassertheil gegen die Wandung des Gefässes treibt, durch den ihr entgegenstehenden der Druckhöhe dy entsprechenden und auf jede Einheit der Fläche y also mit γdy wirksamen Gegen-
druck

$$2) P_2 = \gamma y dy$$

aufgehoben werden, also sein

$$P_1 = P_2 = \frac{y dx \gamma}{g} \cdot w^2 x = \gamma y dy.$$

Hieraus folgt die Differenzial-Gleichung

$$3) dy = \frac{w^2}{g} x dx.$$

Das Integral in den Grenzen von $x = x$ bis $x = 0$ und $y = y$ bis $y = h_1$ ergibt

$$4) y = h_1 + \frac{w^2}{2g} x^2.$$

Für $y = h_2$ und $x = \frac{D}{2}$ folgt

$$5) h_2 - h_1 = \frac{w^2}{8g} D^2.$$

Der Wasserspiegel im Gefässe bildet also im vertikalen Durchschnitte eine Parabel mit dem Scheitel in der Axe 00_1 und dem Parameter $\frac{2g}{w^2}$.

Da die einzelnen Wassersäulen durch die in horizontaler Richtung wirk-
same Fliehkraft nicht an Gewicht verlieren können, wird das Wasser
durch Oeffnungen im Boden des Gefässes während der Drehung mit
den verschiedenen den Druckhöhen $y = h_1 + \frac{h^2}{2g} x^2$ über der Oeffnung
entsprechenden Geschwindigkeiten ausfliessen, die sich hiernach unter
gegebenen Verhältnissen leicht berechnen lassen. Auf die Form des
Gefässes kommt es auch hierbei gar nicht an. Aus einer in der Höhe
 e über dem Boden angebrachten Oeffnung in der Seitenwand kann das
Wasser natürlich mit keiner grössern oder kleinern als der Druckhöhe
 $h_2 - e$ entsprechenden Geschwindigkeit zum Ausflusse gelangen.

§ 64.

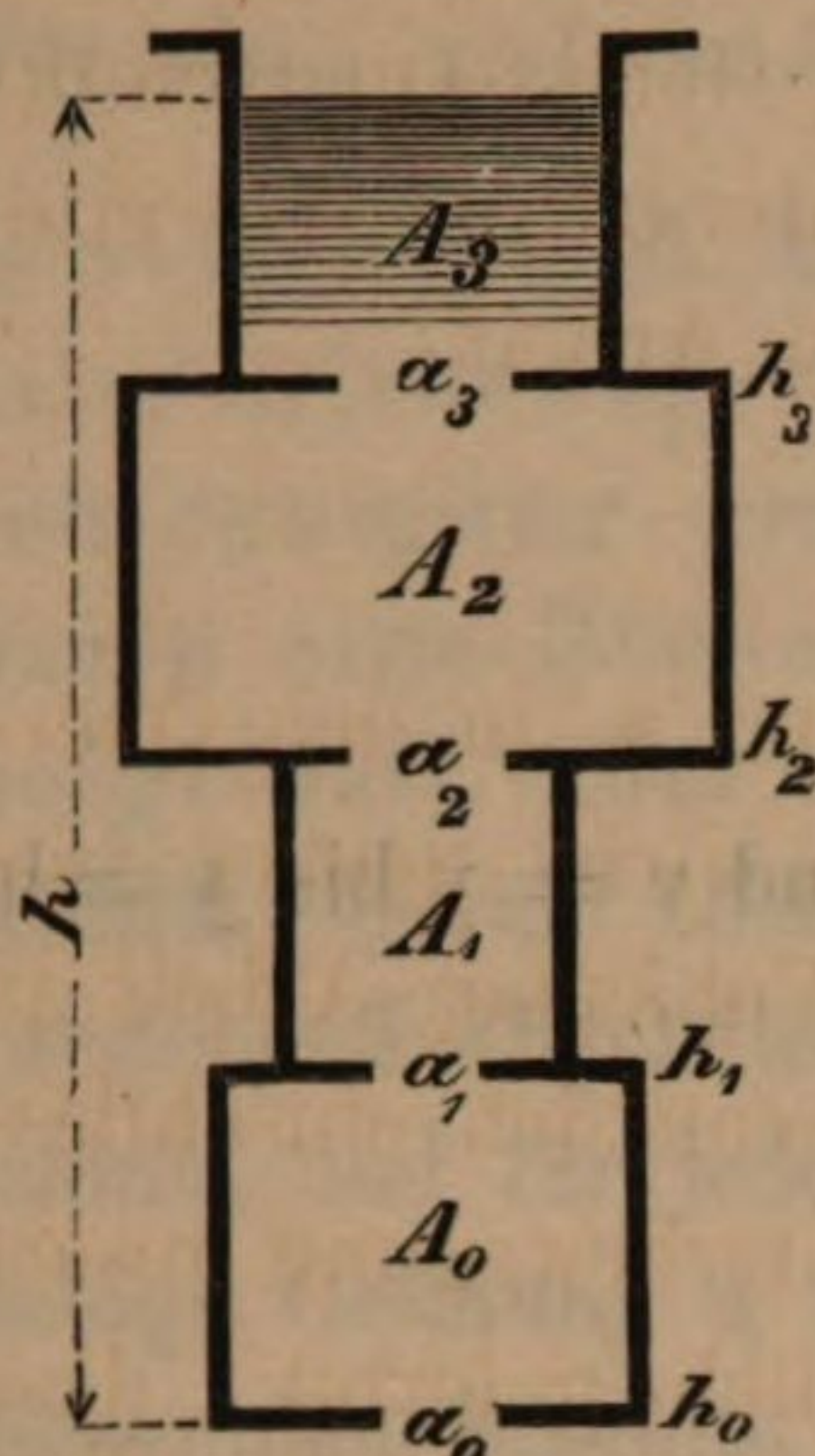
Ausfluss aus zusammengesetzten Gefässen.

Nach § 48 ergibt sich für die effektive Ausfluss-Geschwindigkeit v
aus irgend einer Gefäss-Oeffnung der allgemeine Ausdruck $v = (\rho\beta)\sqrt{2gh}$

woraus sich die Wasserhöhe h , welche über derselben zur Erzeugung von v vorhanden sein muss, berechnet mit

$$1) \quad h = \frac{v^2}{2g(\rho^2\beta^2)}.$$

Muss nun Wasser unter constant gehaltener Druckhöhe h , wie in dem Vertikalschnitte Figur 81 dargestellt, bevor es mit der Geschwindigkeit v durch die Oeffnung a_0 gelangt, durch verschiedene Gefäss-Querschnitte $A_0A_1A_2A_3$ und verschiedene Oeffnungen in Scheidewänden $a_1a_2a_3$ fließen, so wird jeder Durchgang einen Widerstand und Kraft-Verlust erzeugen, zu dessen Ueberwindung ausser der zur Erzeugung der Ausfluss-Geschwindigkeit in a_0 aus dem Gefässe vom Querschnitt A_0 erforderlichen Druckhöhe h_0 noch weitere Druckhöhen $h_1h_2h_3$ u. s. w. wirksam sein müssen. Bezeichnet man ganz allgemein den dem Gefäss-Querschnitte A_n und der Oeffnung a_n zukommenden Ausfluss-Coefficienten mit $(\rho_n\beta_n)$, so ergeben sich durch Substitution in Gleichung 1), wenn man für die verschiedenen Durchfluss-Geschwindigkeiten in $a_0a_1a_2a_3$ die entsprechenden Werthe $v, \frac{a_0v}{a_1}, \frac{a_0v}{a_2}$ und $\frac{a_0v}{a_3}$ einsetzt, nachfolgende Werthe für $h_0h_1h_2h_3$



$h_0 + h_1 + h_2 + h_3$ u. s. w. muss aber zusammen den Werth der Totaldruckhöhe h ausmachen. Durch Summirung folgt also

$$2) \quad h = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{1}{\rho_0^2\beta_0^2} + \frac{a_0^2}{a_1^2\rho_1^2\beta_1^2} + \frac{a_0^2}{a_2^2\rho_2^2\beta_2^2} + \frac{a_0^2}{a_3^2\rho_3^2\beta_3^2} \text{ u. s. w.} \right)$$

und hieraus

$$3) \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\rho_0^2\beta_0^2} + \frac{a_0^2}{a_1^2\rho_1^2\beta_1^2} + \frac{a_0^2}{a_2^2\rho_2^2\beta_2^2} \text{ u. s. w.}}}$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein nicht nur für den Ausfluss durch dünne Wände, sondern auch beliebig geformte Mundstücke in Boden-

oder Seitenwänden, wenn die jeder Oeffnung zukommenden Werthe von $(\varrho\beta)$ nach Anleitung der frühern Paragraphen dieses Abschnittes und des folgenden ermittelt und in Rechnung gebracht werden. Sie findet auch auf Rohrleitungen Anwendung, jedoch überall nur so lange, als die Länge eines jeden Gefässes bedeutend genug ist, damit das durchfliessende Wasser auch wirklich die gemachte Voraussetzung erfüllt und in irgend einem Querschnitte desselben $\frac{a_0}{A_n}v$ werde, nur so lange ferner, als der Austritt aus jeder Oeffnung in den nächsten Gefäss-Querschnitt nicht allmählig etwa durch Vermittelung einer trichterartigen Erweiterung, sondern plötzlich und entschieden erfolgt. Die Arbeit

$$\frac{a_0^2 v^2}{2g} \left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{A_{(n-1)}^2} \right)$$

welche vom Wasser beim Uebergange aus der Oeffnung a_n in den Querschnitt $A_{(n-1)}$ abgegeben werden muss, kann nämlich nicht spurlos verloren gehen, sondern entweder nur durch die eigne Cohäsions-Arbeit in Folge innerer Molekular-Bewegungen verzehrt, oder von den einschliessenden Wandungen wieder gegeben und für die Weiterbewegung reservirt werden. Ist nun das Gefäss A_{n-1} so eigenthümlich geformt, dass dem Wasser keine Gelegenheit zur Verrichtung innerer Arbeit gegeben ist, so kann auch kein Verlust für die Ausfluss-Bewegung entstehen. Dieser Fall muss annähernd auch eintreten, wenn der Querschnitt A_{n-1} zwar unendlich gross ist, aber seine Länge nur unendlich kurz andauert. Es wird dann das Wasser mit ziemlich unverminderter Geschwindigkeit aus der Oeffnung a_n in die a_{n-1} überfliessen können. In beiden Fällen ist also der Druckhöhen-Verlust geringer, als ihn Gleichung 3) ergibt und kann unter Umständen verschwindend klein werden. Eine weitere Untersuchung darüber bleibt hier für den Abschnitt, welcher die Bewegung in Rohrleitungen behandeln wird, vorbehalten.

Wenn die Gefäss-Querschnitte $A_0 A_1 A_2$ u. s. w. alle gleich und sämtliche Durchfluss-Oeffnungen in dünnen Wänden angebracht sind, so vereinfacht sich Gleichung 3) sehr erheblich. Dann wird nämlich daraus

$$4) \quad v = (\varrho\beta) \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{a_0^2}{a_1^2} + \frac{a_0^2}{a_2^2} + \frac{a_0^2}{a_3^2} \text{ u. s. w.}}}$$

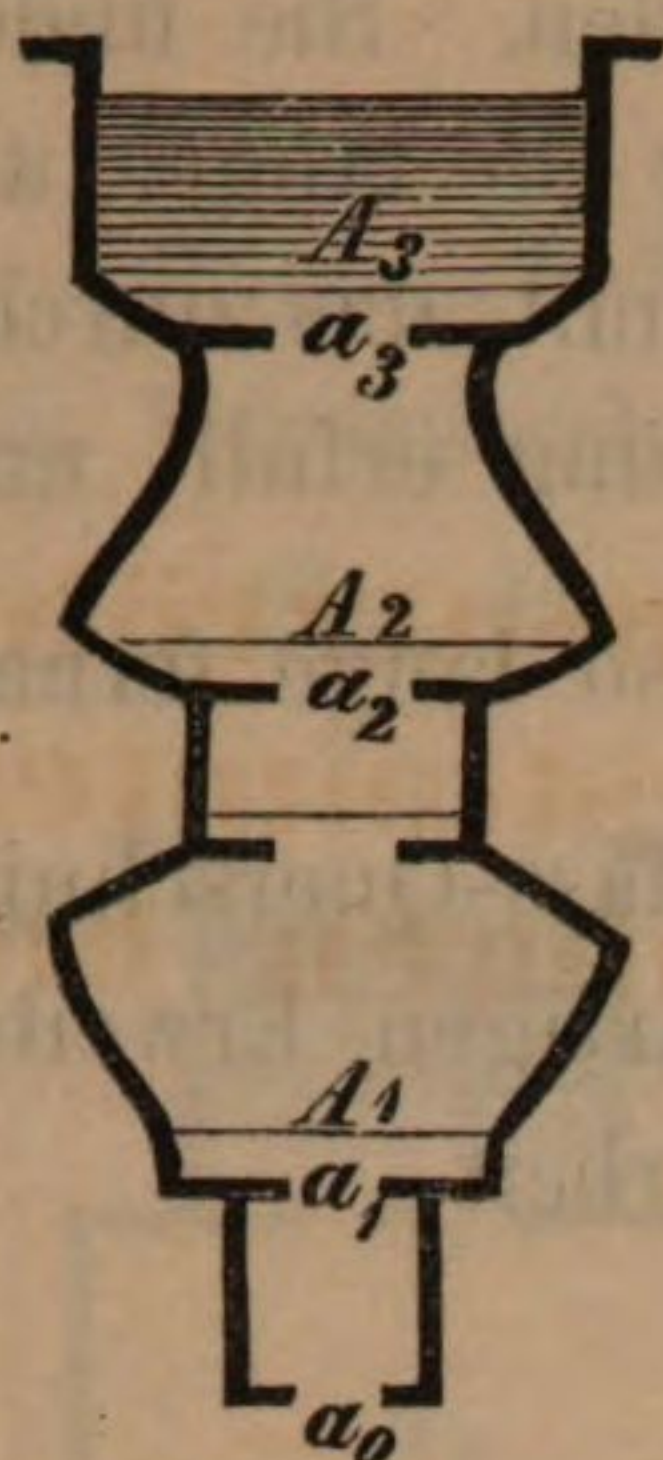
Noch mehr vereinfacht sich dieselbe, wenn ausserdem alle Oeffnungs-Querschnitte gleich werden. Sind deren n vorhanden, so wird

$$5) \quad v = (\varrho\beta) \sqrt{\frac{2gh}{n}}.$$

Für $(\varrho\beta)$ ist in Gleichung 4) und 5) nach § 50 der Werth 0,615 zu setzen.

Fig. 82.

§ 65.



Das § 64 hergeleitete Gesetz gilt, wie sich übersehen lässt, nicht allein für prismatische und cylindrische Gefässformen, sondern auch für die nebenstehend Figur 82 skizzirten, wenn man die Gefäss-Querschnitte $A_1 A_2$ und A_3 über den Oeffnungen $a_1 a_2 a_3$ und zwar in der Entfernung von 0,34 des Durchmessers derselben gemessen, in Rechnung bringt. Setzt man ferner in Gleichung 3) § 64 für $\beta_0 \beta_1 \beta_2$ die Werthe aus Gleichung 3) § 52 ein, so erhält man für lauter Oeffnungen in dünner Wand auch

$$1) \ v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\varrho_0^2 \beta_0^2} + \left(\frac{a_0}{a_1 \varrho_1 \beta}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{a_2 \varrho_2 \beta}\right)^2 \text{ u. s. w.} - \left(\frac{a_0}{A_0}\right)^2 - \left(\frac{a_0}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{a_0}{A_2}\right)^2 \text{ u. s. w.}}$$

worin β den constanten Werth $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$ hat.

Für $\frac{a_0}{A_0}, \frac{a_0}{A_1}$ u. s. w. verschwindend klein erhält man hieraus Gleichung 3) § 64 wieder, wenn man darin für $\beta = \beta_1 = \beta_2$ u. s. w. $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ setzt. Für a_0 dagegen $= a_1 = a_2 = a_3 = A_1 = A_2 = A_3$ und $\varrho_0 \beta = \varrho_1 \beta = \varrho_2 \beta = 1$ erhält man die Ausfluss-Geschwindigkeit durch ein Rohr ohne Widerstände mit $v = \sqrt{2gh}$.

Siebenter Abschnitt.

Ausfluss durch Mundstücke, Ansatzröhren, Düsen, Wandungen von bestimmter Dicke, Gerinne und Schützöffnungen bei constantem Drucke.

§ 66.

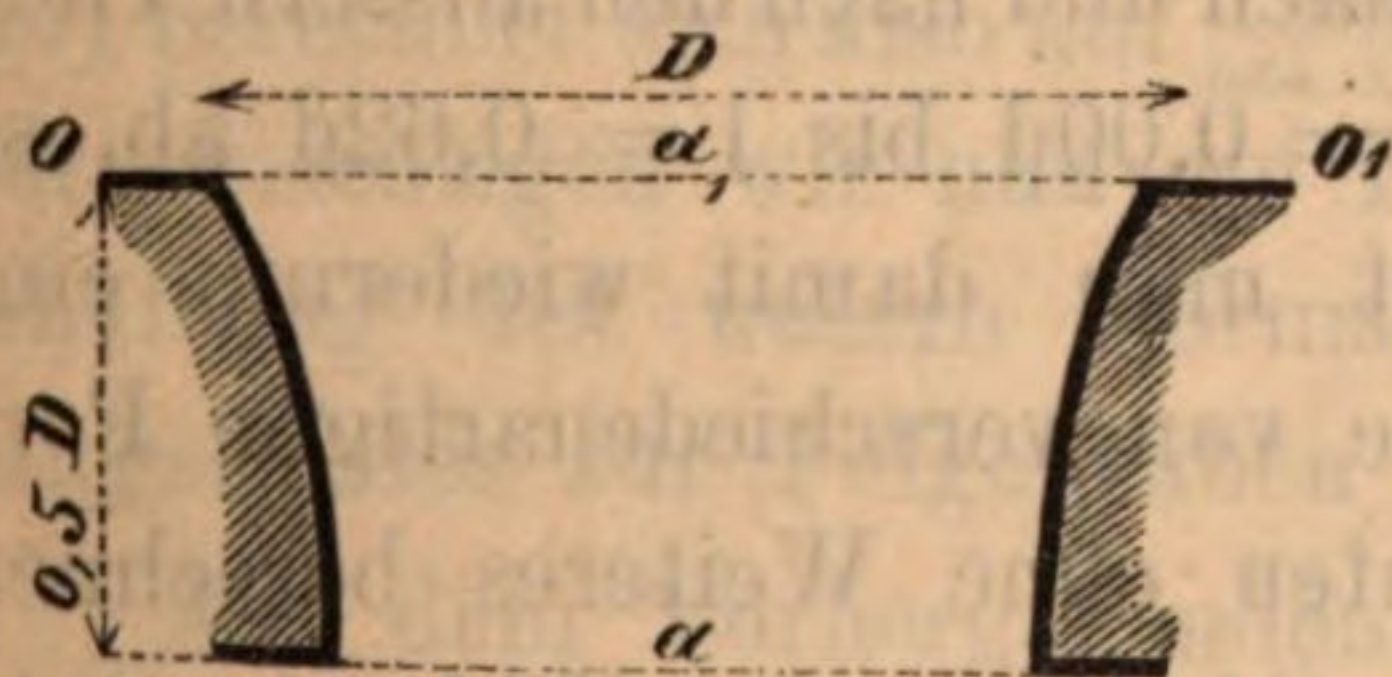
Mundstücke in Wandungen bis zur Dicke des $1\frac{1}{3}$ fachen Durchmessers der Oeffnung.

Für den Ausfluss durch Mundstücke von der Form Figur 73 § 49 wird die Ausfluss-Geschwindigkeit gleich der Arbeits-Geschwindigkeit, also $\beta = 1$ und $\varrho = \varrho_1$, mithin

$$1) v = \varrho \sqrt{2gh} = \varrho_1 \sqrt{2gh}.$$

Der Widerstands-Coefficient also auch gleich dem Geschwindigkeits-Coefficienten. Der Werth von ϱ wird, wie bereits § 50 erläutert, abhängig von der Druckhöhe, und variirt in dem dort nachgewiesenen Abhängigkeits-Verhältnisse von $\sqrt[3]{h}$ beispielsweise von 1 bis 390 Fuss, Druckhöhe zwischen 0,957 und 9,984. Nun können aber unendlich viele Abweichungen von jener durch Rechnung hergeleiteten Normalform in der Praxis vorkommen, von denen jede einen gar sehr verschiedenen Ausfluss-Coefficienten bedingt. Daher soll hier durch möglichst erschöpfende Beispiele gezeigt werden, wie sich aus jener Normalform Figur 73, welche wir bei der nachfolgenden Untersuchung benutzen wollen, auch die Ausfluss-Coefficienten für alle denkbaren Variationen herleiten lassen. Theilen wir dabei die letztern in zwei Gruppen, von welchen die eine den äussern, die andere den innern Theil der Normalform berührt. Die Grenzlinie zwischen beiden bildet 00_1 der Figur. Stellt Figur 83 ein Mundstück von

Fig. 83.



der halben Höhe der Oeffnung dar, welches genau nach der Form des aus dünner Wand austretenden Strahles geformt, dessen äusserer kleinster Querschnitts-Inhalt a also 0,64 des der Oeffnung a_1 ist, so bedarf es keines weitem Beweises, dass durch a_1 grade so

viel Wasser fließen wird, als wenn das Mundstück darunter gar nicht vorhanden wäre, also genau so viel, wie durch eine Oeffnung a_1 in dün-

ner Wand, für welche der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta) = 0,615$ gilt. Bezieht man die dem entsprechende Ausflussmenge auf die kleinere Oeffnung a , so wird für dieselbe $(\varrho\beta) = \varrho \cdot 1 = \varrho_1 = \frac{0,615}{0,64} = 0,961$, wenn das Wasser die Wandung des Mundstückes nicht derart benetzt, dass ein Abscheerungs-Widerstand eintritt, wenn sich die Form also so genau der des Strahles anschliesst, dass nur eine Berührung, aber keine Pressung gegen die Wandung, stattfindet. Tritt aber volle Abscheerung hinzu, was der Fall sein wird, wenn mindestens eine der Druckhöhe $\frac{s}{\gamma} = 0,0037$ M. gleichkommende Pressung gegen dieselbe ausgeübt wird,

und der dem entsprechende Werth von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ berechnet sich nach Anlei-

tung des sechsten Abschnittes für $h = 1$ Fuss auf 0,546, während der $\varrho = 0,961$ entsprechende sich aus der Widerstands-Tabelle auf 0,210

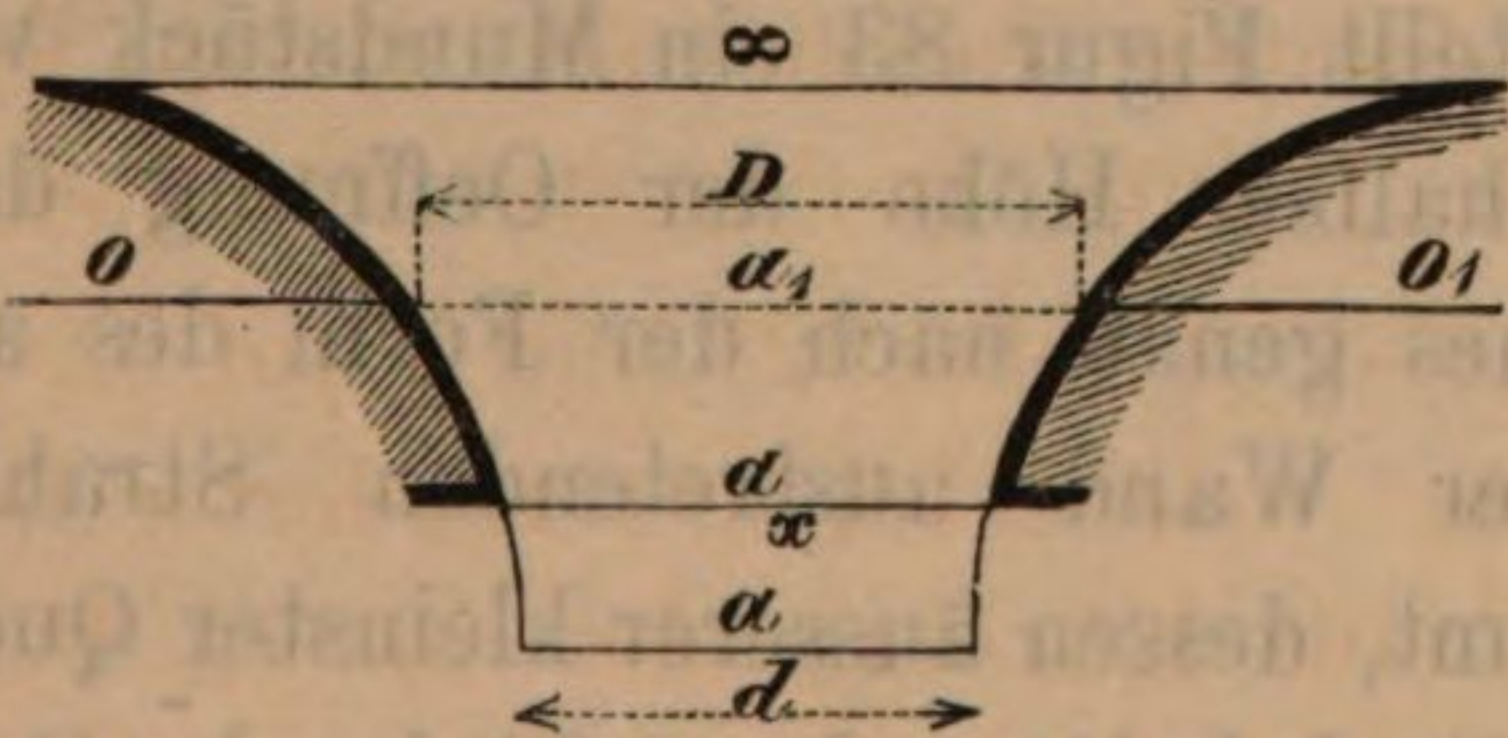
findet, so entspricht dem Gesamtwerthe von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 0,210 + 0,546 =$

0,746 nur ein Werth von $\varrho = \varrho_1 = 0,922$, bei 8 Fuss Druckhöhe dagegen 0,939 wie solche die Versuchs-Resultate von Venturi und Eitelwein mit derartigen Mundstücken ergeben.

Sobald man bei demselben Mundstücke $a > 0,64a_1$, beispielsweise $0,70a_1$ macht, ist es zweifelhaft, ob der Strahl sich an die Wandung anlegt, oder nicht. In keinem Falle kommt der Abscheerungs-Widerstand in Betracht, dagegen würde der Ausfluss-Coefficient sich auf $\frac{0,615}{0,70} = 0,879$ berechnen, und unabhängig von der Druckhöhe sein. Nach § 51 Gleichung 1), 2) und 3) berechnet sich hienach $\beta = 0,925$, $\varrho = 0,950$ und $\varrho_1 = 0,963$.

Macht man $a = a_1$ so wird kein Anschluss an die Wandung des Mundstücks mehr stattfinden, und bei ebenfalls unveränderten Geschwindigkeits- und Widerstands-Coefficienten wird der Ausfluss-Coefficient 0,615, $\beta = 0,707$, $\varrho = 0,870$, $\varrho_1 = 0,962$

Fig. 84.

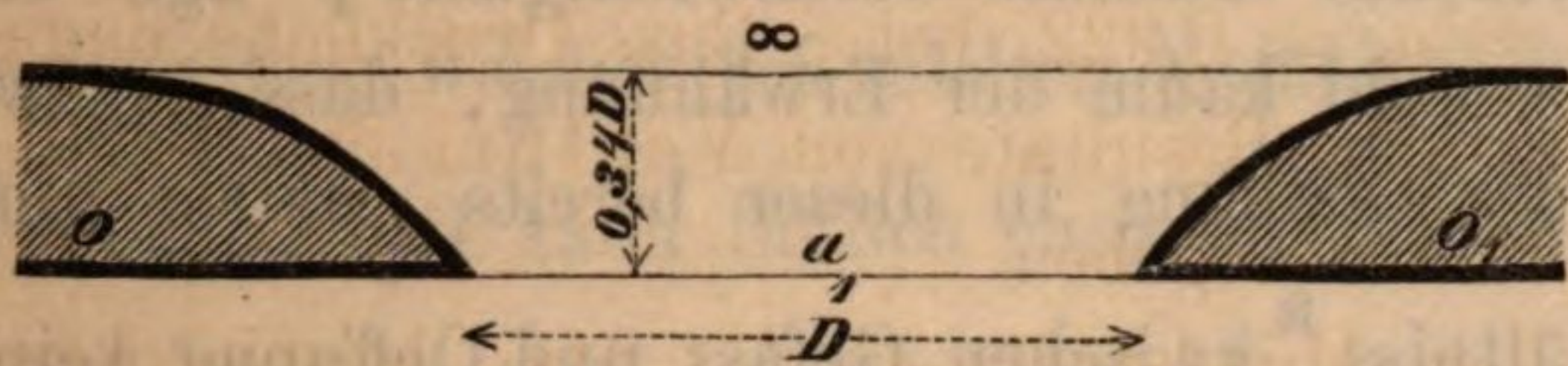


werden. Denkt man sich nun in Figur 84 den innern Theil des Normal-Mundstücks über 00_1 intakt und kürzt nach und nach den äussern Theil von $l = 0,00d$ bis $l = 0,62d$ ab, so erlangt man damit wiederum eine Gruppe von verschiedenartigen Formen, für die sich die Ausfluss-Coefficienten ohne Weiteres berechnen lassen. Aus § 50 geht hervor, dass der Abscheerungs-Widerstand in dem Theile unter 00_1 durch die Fliehkraft aufgehoben wird. Es können also auch hier alle vorgedachten Abkürzungen keinen Einfluss auf die

ausfliessende Wassermenge haben. War dieselbe nun auf die ursprüngliche Mündung a bezogen beispielsweise $0,97a\sqrt{2gh}$, also $(\varrho\beta) = 0,97$ und $\beta = 1$, so muss $(\varrho\beta)$ für irgend eine abgekürzte Form, bei welcher die untere Mündung den Werth a_x erhält $0,97\frac{a}{a_x}$ werden. Aus der

Coordinaten-Tabelle zu Figur 73 § 49, ergibt sich beispielsweise für eine Abkürzung um die Länge $l = 0,03d$, $D = 1,087d$, also auf die Querschnitte bezogen für unsere Bezeichnung in Figur 84, $a_x = (1,087)^2 \cdot a = 1,182a$. Es wird also der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta)$ für diesen Fall $\frac{0,97}{1,182} = 0,821$ und nach § 51 Gleichung 1—3) $\beta = 0,881$, $\varrho = 0,932$ und $\varrho_1 = 0,957$. Für eine vollständige Abkürzung bis zur Grenzlinie 00_1 würde schliesslich $(\varrho\beta) = 0,97 \cdot 0,64 = 0,621$ sein, während der Strahl nach seinem Austritte in allen diesen Fällen weniger oder mehr contrahirt erscheinen muss, und der Geschwindigkeits-Coefficient am Punkte der stärksten Zusammenziehung gemessen sich nur wenig ändert. Der

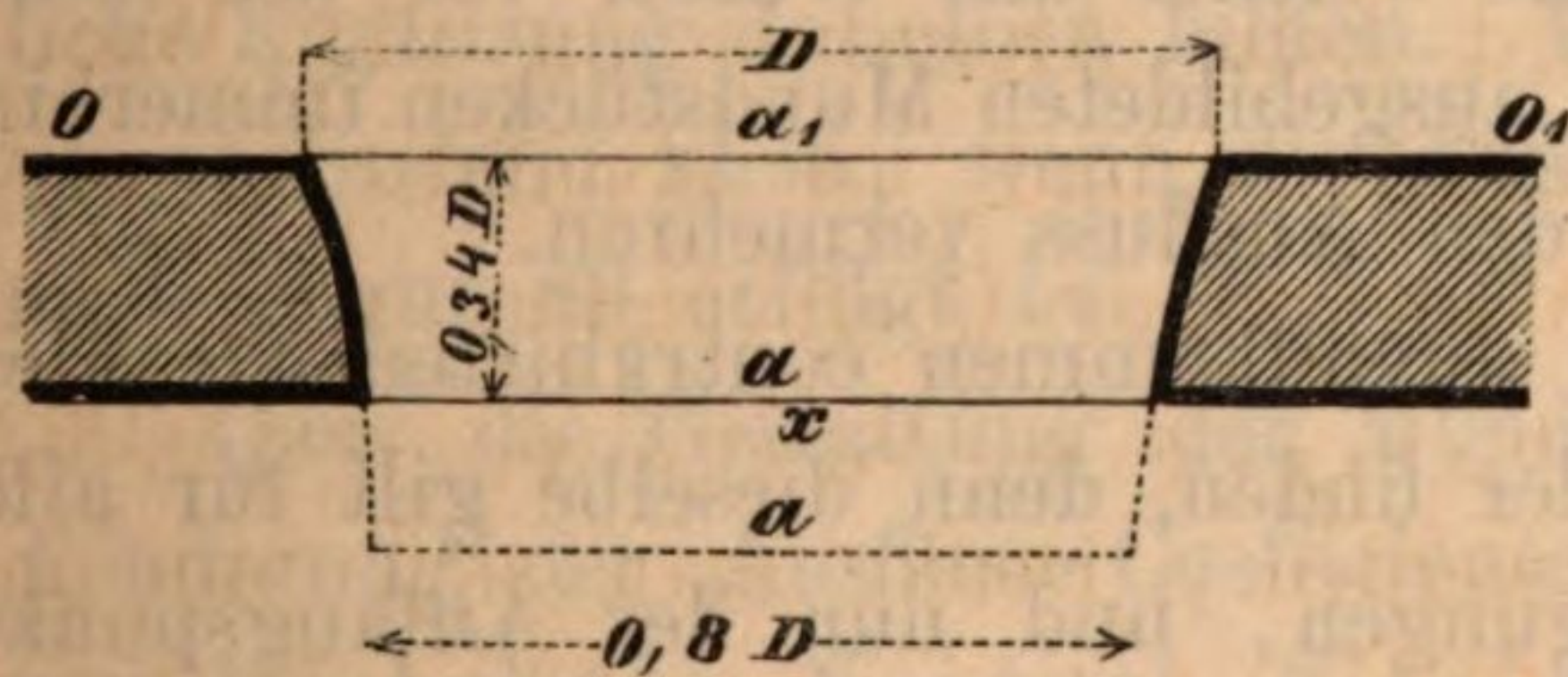
Fig. 85.



Oeffnung a_1 Figur 85 in einer Wand, deren Dicke $0,34$ des Oeffnungsdurchmessers D ausmacht, und deren innere Kanten nach der Nor-

malform der Zuströmung abgerundet sind, entspricht also ein Ausfluss-Coefficient, welcher nicht wesentlich grösser ist, wie aus dünner Wand, jedoch von der Druckhöhe abhängig wird, und den Werthen von $\frac{a}{a_1} \cdot 0,957$ bis $0,984$ entsprechend zwischen $0,612$ und $0,630$ variiren kann.

Fig. 86.



Denkt man sich dieselbe Oeffnung vom kleinern Inhalt a_x Figur 86 $= a_1$ Figur 85, aber nach Figur 79, entsprechend der Normalform unter 00_1 Figur 84 abgekantet, so findet sich aus der Coordinaten-Tabelle für diesen Fall

durch Interpolation $D = 1,049d$ also $\alpha_x = 1,100\alpha$. Der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta)$ berechnet sich also auf $\frac{0,615}{0,64 \cdot 1,100} = 0,873$, β auf $0,921$ und ϱ auf $0,948$. Berücksichtigen wir nun die Einwirkung, welche bei unveränderter Beibehaltung des untern Normalprofiles eine Kürzung des innern Mündungstheiles zur Folge haben muss.

Aus dem Vorhergehenden wird ersichtlich, dass die gänzliche Kürzung desselben nach Figur 83 den Ausfluss-Coefficienten nur bei sehr kleinen und sehr grossen Druckhöhen unter 1 Fuss und über 5 Fuss merklich zu ändern vermag. In welchem Verhältnisse diese Aenderung

bei theilweiser Kürzung erfolgt, lässt sich in jedem einzelnen Falle durch Schätzung bestimmen. Je näher der Grenze 00_1 , um so grösser wird der Werth derselben sein. Wir erhalten damit wiederum eine Reihe von Variationen, die zwar nur wenig veränderte Ausfluss-Coefficienten ergeben, mit denen sich dieselben bei zunehmender Druckhöhe aber nicht so bedeutend herstellen lassen, wie dies Weisbach mit seinen Mundstücken gelungen ist.

Hiernach lassen sich fast alle denkbaren Mundstückformen, so fern dieselben überhaupt regelmässig gebildet sind, als Bruchstücke der Normalform in die letztere hineinpassen. Hat man zunächst möglichst annähernd ihre Lage zur Grenzlinie 00_1 bestimmt, so findet sich in dem Vorstehenden genügender Anhalt zur Ermittlung der ihnen zukommenden Ausfluss-Coefficienten.

§ 67.

Da die einzelnen Wassertheilchen in der Regel keine grössere, als die der Fallhöhe h entsprechende Ausfluss-Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ erlangen können, so bedarf es wohl kaum der Erwähnung, dass da, wo letztere durch die Form der Oeffnung in dieser bereits erreicht werden, das Querschnitts-Verhältniss $\frac{a}{A}$ zwischen Gefäss und Oeffnung keine Vermehrung mehr hervorzubringen vermag. Abgesehen aber davon, dass zumal in prismatischen Gefässen von erheblicher Länge, wenn dies Verhältniss sich der Einheit nähert, auch ein erheblicher Abscheerungs-Widerstand an den Wandungen hinzutritt, der nach Anleitung des sechsten Abschnitts hinzugerechnet werden muss, kann dasselbe vermöge der merklichen Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser vor der Oeffnung ankommt, bei unvollkommen ausgebildeten Mundstücken immerhin von einiger Einwirkung sein, und den Ausfluss vermehren.

Die natürliche Form auch des unvollkommen contrahirten Strahles muss sich in der Normalform wieder finden, denn dieselbe gilt für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen, und nur der Anfangspunkt der Coordinaten ist von dem Verhältnisse $\frac{d}{D}$ abhängig. In der Coefficienten-Tabelle § 53 findet sich für $\frac{a}{A}$ beispielsweise 0,70, $\beta = 0,810$ und $\varrho = 0,963$. β entspricht nach § 48 dem theoretischen Contraktionswerth. Den effektiven findet man gemäss § 50, indem man β mit $\varrho + \frac{0,97 - \varrho}{3} = 0,963 + 0,002 = 0,965$ multiplicirt, also 0,782.

$\sqrt{\frac{a}{A} = \frac{d}{D}}$ berechnet sich hiernach auf 0,887 und $\frac{D}{d}$ auf 1,127.

Letzterem Werthe entspricht in der Coordinaten-Tabelle des Normal-Mundstückes der Werth $l = 0,40d$. Wir erhalten also die gesuchte Curve des contrahirten Strahles in Figur 73 zwischen $l = 0$ und $l = 0,4d$. Bei unvollkommen contrahirten Strahlen rückt also der Querschnitt der stärksten Zusammenziehung der Oeffnung näher, und zwar in dem vorhin beregten Falle in die Entfernung $0,4d$ oder $0,33D$ von derselben. Sind nun die Mundstücke diesem Verhältniss angepasst, so kann das Querschnitts-Verhältniss $\frac{a}{A}$ gar keine Einwirkung haben. Sind dieselben convergenter, so wird eine Pressung des Strahles gegen die Wandung und damit ein entsprechend vermehrter Abscheerungs-Widerstand eintreten müssen, sind dieselben divergenter, so wird der Ausfluss derselbe bleiben, der Ausfluss-Coefficient sich aber nach dem Verhältniss $\frac{a}{a_x}$ verkleinern, weil er auf eine grössere Oeffnung, als zu demselben Ausflusse nothwendig gewesen wäre, bezogen werden soll. Der Abscheerungs-Widerstand im erstern Falle wird indessen verschwindend klein gegen den, welcher bei solchen Verhältnissen von $\frac{a}{A}$ im Gefässe selber erwächst, und kann füglich ganz ausser Acht gelassen werden. Die Verkleinerung nach dem Verhältnisse $\frac{a}{a_x}$ lässt sich nach § 66 in jedem Falle leicht berücksichtigen.

Es bleibt noch hinzuzufügen, dass auch die absolute Grösse der Oeffnung bei dem Ausflusse durch Mundstücke ziemlich gleichgültig ist. Nur bei unvollkommen ausgebildeten Mundstücken kann die Adhäsion des Wassers an der Gefässwandung um die Mündung herum eine natürliche Ergänzung desselben bilden. Der Einfluss derselben wird indessen verschwindend klein, wenn die Ausbildung des Mundstücks mindestens nach Figur 83 erfolgt ist.

Dass die Gestaltung der Mundstücke wirklich eine so erhebliche Aenderung der Ausfluss-Coefficienten erzeugt, beweisen die Versuche von Michelotti, Venturi, Eitelwein und Weisbach, welche dieselben auf 0,918 bis 0,988 ergaben.

Verlängert man die § 66 behandelten Mundstückformen durch cylindrische oder prismatische Ansätze vom Durchmesser der stärksten Zusammenziehung, so werden dieselben so lange ohne Einwirkung bleiben, als nicht ein Widerstand darin erzeugt wird, welcher einen wahrnehmbaren Gegendruck, und somit eine Pressung gegen die Wandung zur Folge hat, die schliesslich der Druckhöhe $\frac{s}{\gamma}$ gleichkommt, welche zur vollen Abscheerung erforderlich ist. Uebersteigt die Länge solcher

Ansätze nicht den halben Durchmesser, so ergeben Rechnung und Erfahrung, dass der Ausfluss dadurch nicht beeinträchtigt wird.

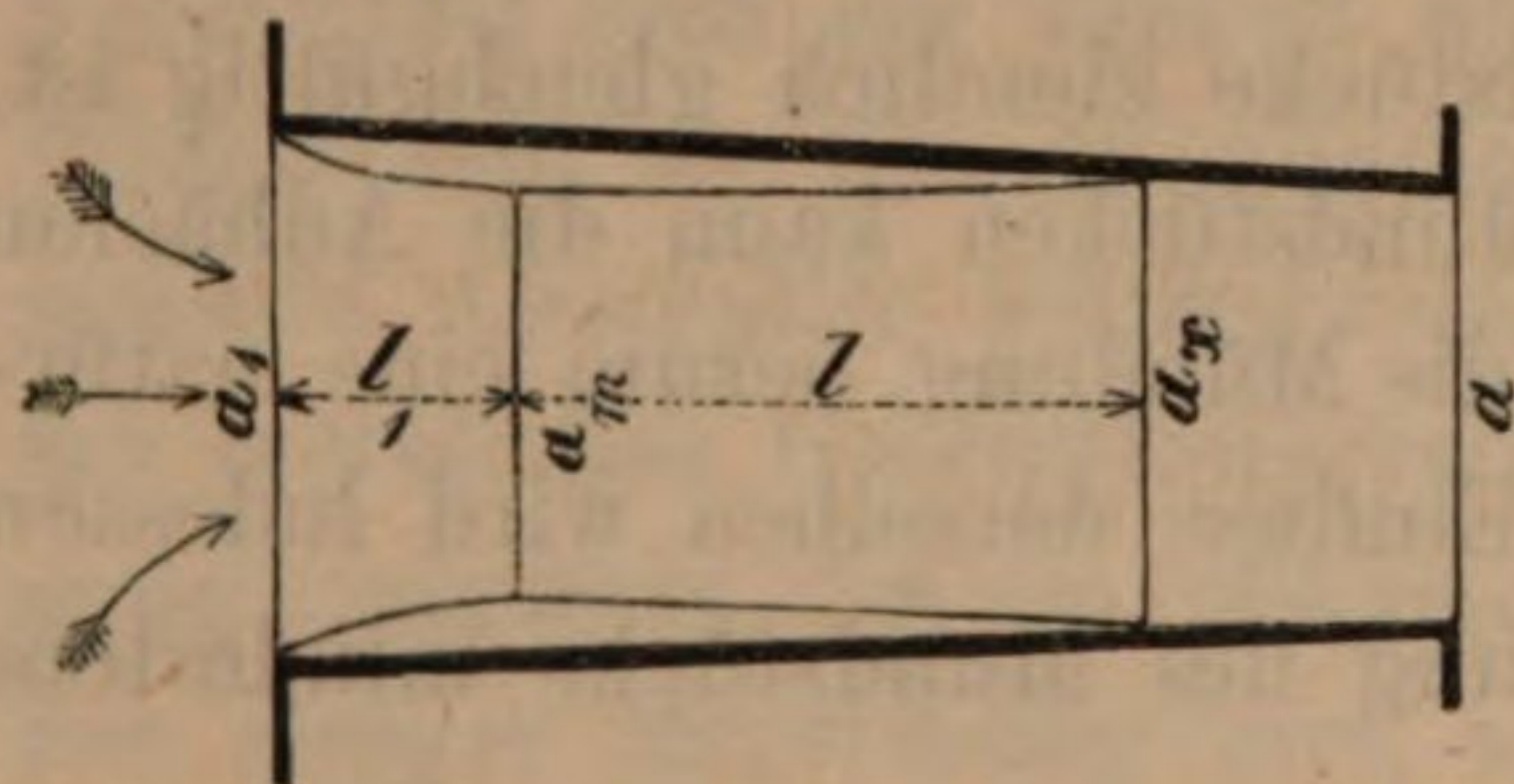
Für Mundstücke von quadratischem oder oblongem Querschnitte, bei denen nur zwei gegenüberliegende Wandungen convergiren, während die beiden andern parallel sind, gelten dieselben Gesetze, wenn man behufs Bestimmung der Normalform aus der zugehörigen Coordinatentabelle, anstatt der berechneten Werthe von D die von D^2 als Ordinaten aufträgt. Im zusammengezogenen Querschnitte muss hiernach die untere Weite nicht 0,80, sondern 0,64 der obern betragen. Die Gefässwandungen müssen sich in diesem Falle aber nicht allzu weit von den parallelen Seiten entfernt befinden.

§ 68.

Allgemeines zum Ausflusse durch kurze Ansatzröhren.

Wenn man die Ausflussverhältnisse aus kurzen Ansatzröhren von der Länge etwa des $2\frac{1}{2}$ fachen Durchmessers, in denen der Abscheerungs-Widerstand an den Wandungen verschwindend klein bleibt und ausser Acht gelassen werden kann, gesetzmässig darstellen will, so geht man am besten wiederum von der Oeffnung in dünner Wand aus und untersucht die Aenderung, welche das vorgesetzte Ansatzrohr auf den Ausfluss hervorbringen muss. Dass die Verhältnisse beim Eintritte des

Fig. 87.



Wassers nach Figur 87 in die innere Mündung im Wesentlichen dieselben bleiben, wie beim Ausflusse aus dünner Wand, liegt nicht nur in der Natur der Sache, sondern wird auch durch alle Beobachtungen in Glasröhren bestätigt. Der Strahl behält seine contrahirte Gestalt jedoch nur

theilweise bei und bleibt erst bei Röhren, welche mindestens den $2\frac{1}{2}$ fachen äussern Durchmesser zur Länge haben vor der Ausmündung an die Wandungen derselben angeschlossen, sofern man ihm durch zeitweises Zuhalten der letztern Gelegenheit gegeben hat, damit einmal in Berührung zu kommen. Ist der Querschnitt a Figur 87 grösser als der a_m des contrahirten Strahles, so muss das ausfliessende Wasser auf dem Wege von a_m bis a an Geschwindigkeit verloren, also eine gewisse Arbeit abgegeben haben, für die kein anderer Verbleib ersichtlich ist, als in einer Vermehrung der Ausflussmenge durch Ausübung eines gewissen Zuges P von Aussen auf die Oeffnung a_1 , welcher der von Innen auf dieselbe wirkenden Druckhöhe h zu Hülfe kommt. Es bedarf keines weitem Beweises dafür, dass die Luftspannung in dem Vakuum um a_m

herum dadurch negativ werden muss und dass ihre Differenz gegen die äussere Atmosphären-Spannung genau der Grösse der wirksamen Zugkraft P entsprechen muss. P könnte also bei längern abwärtsgehenden Rohrleitungen bis zur Grösse eines 26 Fuss oder 8,2 M. hohen Wassersäulendruckes wachsen, dem erfahrungsmässigen Maximum der Hubhöhe in Saugröhren durch Pumpenkolben, entsprechend einer Verdünnung der dem Wasser beigemengten Lufttheilchen bis auf $\frac{32-26}{26} = \frac{3}{13}$ Atmosphären oder 3,2 Pfund pr. □Zoll oder 0,238 Kilogrm. pr. Quadrat-Centimeter. Bei kurzen Ansatzröhren findet P jedoch eine ganz bestimmte Grenze in der Divergenz derselben. Führt man dem Vakuum a_m von Aussen Luft zu und gleicht damit die Spannungs-Differenz aus, so löst sich das Wasser wieder von den Wänden des Ansatzrohres ab und es stellt sich der Ausfluss wie aus dünner Wand durch die Oeffnung a_1 her. Die Grösse und Gestalt des Vakuums lässt sich nach Anleitung des § 49 für jeden einzelnen Fall genau berechnen. Für uns ist zunächst die genaue Bestimmung der Länge desselben von Interesse, weil nicht nur die Grösse des Abscheerungs-Widerstandes, sondern auch die Minimal-Länge für einen vollen Ausfluss davon abhängen.

Bezeichnen wir mit v die effektive und hier mit der Arbeits-Geschwindigkeit identische Ausfluss-Geschwindigkeit durch die äussere Oeffnung a , so muss die Geschwindigkeit im contrahirten Querschnitte

$a_m = \frac{av}{a_m}$ sein. Die pro Sekunde ausfliessende Wassermasse $\frac{av\gamma}{g}$ muss

also auf dem Wege von a_m bis a die Beschleunigung $v\left(\frac{a}{a_m}-1\right)$ erlitten haben und die darauf wirksame Kraft $P = (mp)$ also gewesen sein

$$1) P = \frac{av^2\gamma}{g}\left(\frac{a}{a_m}-1\right) \text{ (vergleiche Gleichung 7 § 49).}$$

Ist nun der Verhältnissbruch $\frac{a_m}{a_1}$, welchen wir mit n bezeichnen

wollen, bekannt, so lässt sich daraus nach § 49 die Länge l_1 , d. h. die Entfernung der stärksten Zusammenziehung von der Oeffnung a_1 , berechnen. Die vorläufig noch unbekannte Entfernung rechts von a_m , in welcher sich der Strahl wieder an die Wandung anschliessen wird, möge mit l bezeichnet werden. Die Verzögerung des Wassers wird auf diesem Wege eine andere gewesen sein, wie die Beschleunigung auf dem Wege l_1 . Da nun die während jeder Zeiteinheit in jedem Querschnitte durchfliessende Masse dieselbe ist, so müssen sich die verschiedenen Beschleunigungen direkt verhalten, wie die darauf wirksamen Kräfte, die Länge der Wege aber, auf denen eine gewisse Endgeschwindigkeit erreicht werden soll, muss sich umgekehrt, wie die Grösse der Beschleunigungen, also auch umgekehrt, wie die der Kräfte, verhalten. Die auf Beschleunigung

zwischen a_1 und a_m wirkende Kraft ist aber $a_1\gamma h + P$, die auf Verzögerung zwischen a_m und a wirkende dagegen nur P . Wenn wir zunächst also unter l_{a1} diejenige Entfernung von a_m verstehen, in welcher der Querschnitt des verzögerten Strahles wieder gleich dem a_1 in der Eintrittsöffnung geworden ist, so haben wir dafür die Beziehung

$$2) \quad l_{a1} = \frac{a\gamma h + P}{P} l_1.$$

Bei gleichen Anfangs-Geschwindigkeiten und gleichen Beschleunigungen verhalten sich aber die durchlaufenen Wege auch wie die Quadrate der erlangten Endgeschwindigkeiten, hier also auch umgekehrt wie die Quadrate der erlangten Querschnitte. Die Entfernung, in welcher der verzögerte Strahl also den Querschnitt a_x erlangt hat, findet sich aus Gleichung 2)

$$3) \quad l = \frac{a\gamma h + P}{P} l_1 \frac{a_x^2}{a_1^2}.$$

Setzen wir nun in vorstehende Gleichung den Werth für P aus Gleichung 1) ein, für h ferner $\frac{v^2}{2(\varrho\beta)^2g}$, worin $(\varrho\beta)$ den für das Ansatzrohr geltenden Ausfluss-Coefficienten bezeichnet, und dividiren im Nenner und Zähler durch $\frac{a\gamma v^2}{g}$, so wird

$$4) \quad l = \frac{a_x^2}{a_1^2} l_1 \left[1 + \frac{1}{2(\varrho\beta)^2 \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right)} \right].$$

Für $a = a_m$ wird hier $l = \infty$ d. h. es findet überhaupt kein Anschluss des Strahles an die Wandung mehr statt.

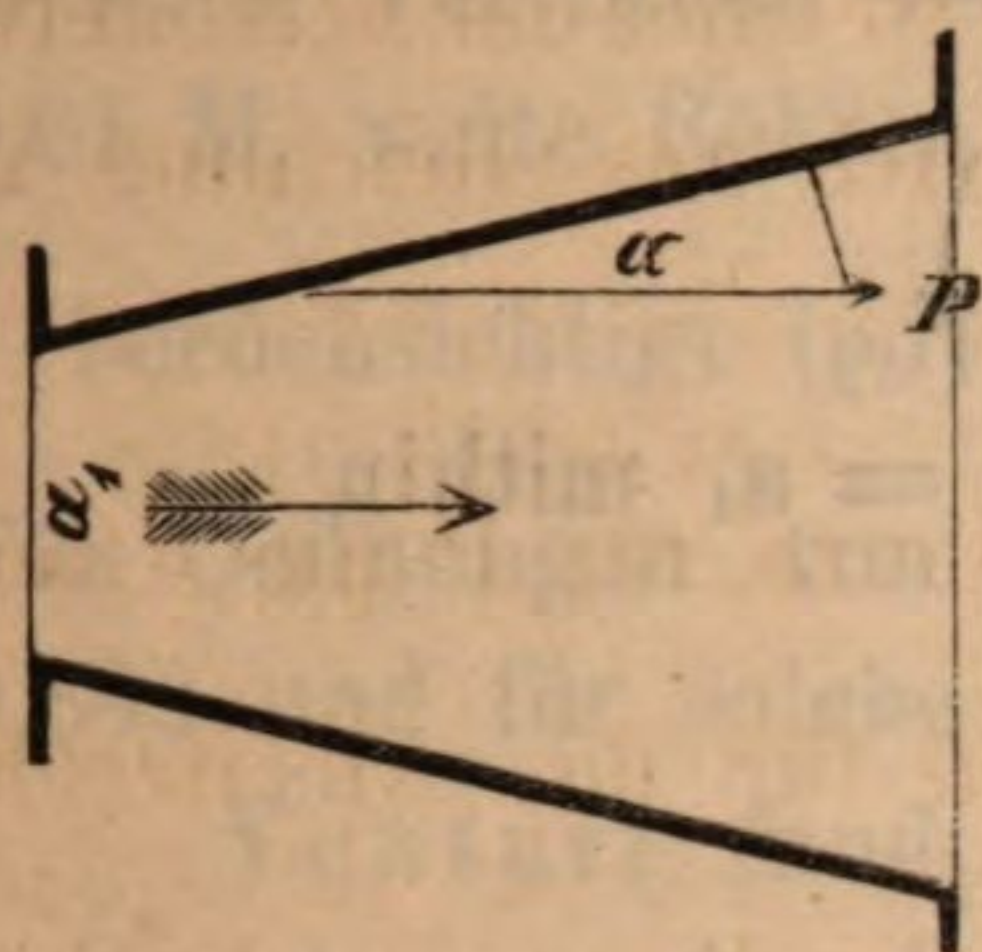
Für cylindrische oder prismatische Ansatzröhren vom Durchmesser d ist, wie sich später finden wird $\frac{a_m}{a} = 0,720$ und $(\varrho\beta) = 0,815$, also l_1 berechnet sich mit Rücksicht darauf aus der Coordinaten-Tabelle § 49 auf $0,43d$, $\frac{a_x}{a_1}$ wird $= 1$, und l findet man mit Einsetzung dieser Werthe in den sich hiernach aus Gleichung 4) vereinfachenden Ausdruck

$$5) \quad l = l_1 + \frac{l_1}{2(\varrho\beta)^2 \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right)}$$

auf $1,28d$, $l_1 + l$ also die Gesamtlänge des Vakuums auf $0,43 + 1,28 = 1,71d$. Wenn also noch eine den äussern Luftdruck genügend abhaltende Berührungsfläche verbleiben soll, darf die Länge solcher Ansatzrohre jedenfalls nicht unter dem $2\frac{1}{2}$ fachen Durchmesser genommen werden. Wird a kleiner als a_m , so kann das Wasser zwischen beiden keine Arbeit auf Vermehrung des Ausflusses abgegeben haben, sondern muss im Gegentheil einen Theil seiner Druckhöhe zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit in Anspruch genommen haben. Die Spannung in a_m

muss also positiv werden, das Vakuum schliesslich fortfallen, und ein bei a_m angebrachtes kleines Bohrloch Wasser ausspritzen, anstatt Luft einzusaugen. Die Sprunghöhe des ausspritzenden Strahles zeigt nunmehr eben so genau die Kraft an, welche zur Vermehrung der Geschwindigkeit zwischen a_m bis a und zur Ueberwindung etwaiger Widerstände erforderlich ist. Ist $a = a_m$ d. h. 0,64 bis 0,72 a_1 , so ist der Druck auf die Wandung bei $a_m = 0$, es wird ein Bohrloch daselbst weder Wasser ausspritzen noch aufsaugen, die Luft in dem Vakuum wird die Spannung der äussern Athmosphäre haben.

Fig. 88.



Findet bei stark divergenten Ansatzröhren nach Figur 88 die Beziehung statt, dass die pro Flächeneinheit auf die Wandung normale Komponente der Saugkraft P nämlich $\frac{P}{a_1} \sin \alpha >$ als $s_1 \cotang. \alpha$ die Flächen-Adhäsion wird, so tritt unter allen Umständen eine Ablösung des Strahles von der Wandung an der äussern Mündung ein, und das Ansatzrohr kann nicht

mehr als solches wirken. Für die äusserste Grenze muss also die Bedingung gelten

$$6) P = a_1 s_1 \frac{\cotang. \alpha}{\sin \alpha}$$

worin s_1 bei vollkommen luftdichten Wänden also auch metallenen Röhren nach § 5 und bekannten Versuchen von Du Buat, Achard etc. = 1,15 Pfund pro □Fuss, bei hölzernen Röhren dagegen = 0,73 Pfund zu nehmen ist.

§ 69.

Ausfluss durch cylindrische und prismatische Ansatzröhren.

Bezeichnen wir mit q den Widerstands-Coefficienten für den Ausfluss durch irgend ein Ansatzrohr, dessen Länge das $2\frac{1}{2}$ fache seines äussern Durchmessers beträgt, so berechnet sich die auf die innere Einmündung a_1 Figur 87 effektiv wirksame Druckkraft P_1 auf $a_1 h \gamma q^2$.

Rechnet man hiezu die Saugkraft P nach Gleichung 1 § 68, so findet man die Summe der im Querschnitte a_1 auf Durchfluss wirkenden Kräfte

$$1) P + P_1 = a_1 h \gamma q^2 + \frac{a v^2 \gamma}{g} \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right).$$

Dividirt man diese Summe durch die pro Zeiteinheit ausfliessende Masse $\frac{a v \gamma}{g}$, so ergibt sich die Durchfluss-Geschwindigkeit in a_1

$$2) \frac{av}{a_1} = \frac{a_1 gh \varrho^2}{av} + v \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right)$$

woraus folgt, wenn man gleichzeitig das Contraktions-Verhältniss $\frac{a_m}{a_1} = n$ also $a_m = na_1$ setzt.

$$3) v = \varrho \sqrt{\frac{a_1}{2a \left(\frac{a}{a_1} - \frac{a}{na_1} + 1 \right)}} \cdot \sqrt{2gh}$$

Für den Ausfluss aus kurzen Ansatzröhren jeder Art wird also der theoretische Coefficient

$$4) \beta = \sqrt{\frac{a_1}{2a \left(\frac{a}{a_1} - \frac{a}{na_1} + 1 \right)}}.$$

Für cylindrische oder prismatische Röhren wird $a = a_1$ mithin

$$5) \beta = \sqrt{\frac{1}{2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)}}.$$

Da wir unter β den theoretischen Coefficienten verstehen, so müssen wir in Gleichung 5) auch für n den theoretischen Werth der Contraktion

beim Ausflusse aus dünner Wand $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ einsetzen; wonach wir

$\beta = 0,924$ also $\frac{0,924}{0,707} = 1,307$ mal so gross, wie beim Ausflusse aus dünner Wand erhalten, während Weisbach dies Verhältniss zu 1,325 ermittelt hat. Es darf jedoch nicht übersehen werden, dass die Vermehrung des Ausflusses im Querschnitte a_m eben sowohl eine Geschwindigkeits-Vermehrung als eine Verdickung daselbst zur Folge haben muss, welche wiederum eine Milderung der Contraktion und Vergrösserung des Widerstands-Coefficienten bedingt. Nehmen wir den letztern um 0,013 grösser als für den Ausfluss aus dünner Wand, also 0,883 anstatt 0,87, so ergibt sich nicht nur das Weisbach'sche Verhältniss, sondern man erhält damit den mit bekannten Versuchs-Resultaten durchaus übereinstimmenden Werth des Ausfluss-Coefficienten

$$(\varrho\beta) = 0,924 \cdot 0,883 = 0,816.$$

Dem Werthe von $\varrho = 0,883$ entspricht in der Tabelle § 53 ein Contraktionswerth von 0,720, wie er auch in Wirklichkeit sehr nahezu vorhanden ist. Dass derselbe nicht über 0,736 kommen kann, findet man durch die einfache Betrachtung, dass, wenn die ausfliessende Menge, das Produkt $a_m v_m$ auf 1,325 vermehrt worden, jeder der beiden Faktoren nur auf $\sqrt{1,325} = 1,15$ vermehrt worden sein kann. Betrug also der Contraktions-Coefficient beim Ausflusse aus dünner Wand 0,64, so kann er im Ansatzrohr nicht mehr als $0,64 \cdot 1,15 = 0,736$ betragen. Es ergibt

sich daraus die eigenthümliche Erscheinung, dass die Arbeits-Geschwindigkeit im contrahirten Querschnitte mindestens $= \frac{0,816}{0,736} \sqrt{2gh} = 1,12 \sqrt{2gh}$ also erheblich grösser als die der Wasserstandshöhe im Gefässe entsprechende freie Fall-Geschwindigkeit wird. Die grössern Ausfluss-Coefficienten für cylindrische und parallelepipedische Ansatzrohre, deren Länge etwa das Dreifache des Durchmessers betrug, welche sich nach Versuchen von Castel, Bossut, Venturi, Eitelwein, Michelotti in den Grenzen von 0,787 bis 0,854 ergeben haben, entsprechen fast durchgehends sehr kleinen Druckhöhen, oder sehr kleinen Durchmessern, und finden daher nur für Oeffnungen unter 3 Centim. Anwendung. Am meisten Vertrauen verdienen die Versuche von Weisbach, welcher für 0,01 M. weite Röhren bei 0,578 M. Druckhöhe, wenn man die Constante $\frac{s}{\gamma}$ berücksichtigt $(\varrho\beta) = 0,852$ und bei 0,236 M. Druckhöhe 0,846 fand.

Für Oeffnungen von 0,02 M. Weite fand Weisbach $(\varrho\beta)$ jedoch nur 0,832 und für solche von 0,02 bis 0,03 M. $(\varrho\beta) = 0,813$ bis 0,817.

Venturi fand bei einem Versuche mit einem 18,6 pr. Linien weiten Ansatzrohre bei 33,64 Zoll Druckhöhe $(\varrho\beta) = 0,822$. Eine kleine mit dem Vakuum in Verbindung gesetzte Glasröhre, deren unteres Ende in Wasser eintauchte, erlangte während des Ausflusses eine Steighöhe $H = 24,84$ Zoll.

Aus § 68 Gleichung 1

$$P = \frac{av^2\gamma}{g} \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right)$$

erhält man für die Einheit des Querschnittes a_m , wenn man gleichzeitig den Verhältnissbruch $\frac{a}{a_m} = \frac{1}{n}$ setzt

$$6) P = \frac{v^2\gamma}{ng} \left(\frac{1}{n} - 1 \right).$$

Will man nun P durch die Höhe einer Wassersäule H , welche dadurch angesogen wird, messen, so muss $P = H\gamma$ gesetzt werden. Dann wird

$$7) H = \frac{v^2}{ng} \left(\frac{1}{n} - 1 \right).$$

Setzt man hierin für v^2 den Werth $(\varrho\beta)^2 2gh$ ein so ist auch

$$8) H = 2(\varrho\beta)^2 h \left(\frac{1-n}{n^2} \right).$$

Für die Werthe des Venturischen Versuches $h = 33,64$ und $(\varrho\beta) = 0,822$ ergiebt dieser Ausdruck, wenn man das Contraktions-Verhältniss $n = 0,718$ annimmt, $H = 24,82$ Zoll in völliger Uebereinstimmung mit der Beobachtung. Es geht daraus hervor, dass auch hier die Widerstände, wie beim Ausflusse durch dünne Wand, mehr den Strahl-Querschnitt als die Geschwindigkeit beeinträchtigen, und dass die Tabelle § 53 daher ganz passende Werthe für ϱ ergiebt.

§ 70.

Beträgt die Länge der Ansatzröhre nicht über das dreifache des Durchmessers, so wird kein Abscheerungs-Widerstand erzeugt, weil der Strahl keinen Druck auf die Wandung ausübt. Die Ausfluss-Coefficienten für längere Röhre entsprechen ziemlich annähernd den sich aus der Widerstands-Tabelle für die daraus resultirenden Werthe von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$

ergebenden Werthen von ϱ , wenn man davon die Constante 3,0 derjenigen Länge, für welche der Abscheerungs-Widerstand ausser Kraft bleibt, abzieht. Genauer, und zumal unerlässlich bei ganz kurzen Längen, bestimmen sich jedoch die Ausfluss-Coefficienten aus der Widerstands-Tabelle, wenn man den Werthen $\frac{1-3d}{d\sqrt[3]{h}}$ bei $l = 3d$ die dem Ausfluss-

Coefficienten 0,816 entsprechende Constante 5,00 und bei $l = 12d$ die dem Widerstands-Coefficienten 0,886 entsprechende 1,80 für pr. Fussmaass zusetzt.

Eitelwein hat mit Röhren von 1 Zoll Durchmesser und 3 bis 60 Zoll Länge sehr genaue Versuche angestellt. Die Druckhöhe variirte dabei jedoch zwischen 36 und 20,6 Zoll, wesshalb sich die Uebereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Rechnung nur annähernd nachweisen lässt. Legt man jedoch allen Versuchen die durchschnittliche Druckhöhe von 28,2 Zoll = 2,35 Fuss zu Grunde, wofür sich $\sqrt[3]{h}$ auf 1,33 berechnet, so ergibt sich in nachstehender Tabelle eine übersichtliche Zusammenstellung als genügender Anhalt für die praktische Anwendung.

In Columne 5 entspricht zwar das Abnahme-Verhältniss ziemlich genau den Versuchs-Resultaten, letztere ergeben sich jedoch durchschnittlich etwa 0,03 grösser, was zum Theil auch wohl in einer stattgehabten Abweichung der Temperatur von 13° R., für welche die Widerstands-Tabelle berechnet worden, seinen Grund haben mag. Ausserdem ergibt das Eitelwein'sche Experiment schon den Ausfluss-Coefficienten um 0,005 grösser, wie er von uns angenommen worden.

I	Länge der 1 Zoll weiten Röhren in Zollen	3	4	5	6	8	10	12	24	36	48	60
II	Werthe von $\frac{l-3d}{d\sqrt[3]{h}}$	0,00	0,75	1,50	2,26	3,83	5,26	6,77	15,75	24,75	33,85	42,75
III	Hinzu zu rechnende Constante für pr. Fuss- maass	5,00	4,68	4,32	3,96	3,24	2,52	1,80	—	—	—	—
IV	Den Werthen Col. II ent- spricht $\varrho =$	—	—	—	—	—	—	0,790	0,700	0,642	0,600	0,567
V	Den Werthen Col. II u. III zusammen entspricht $\varrho =$	0,816	0,810	0,804	0,797	0,786	0,779	0,767	—	—	—	—
VI	Eitelwein fand ϱ	0,821	—	—	—	—	—	0,765	0,727	0,680	0,633	0,602

§ 71.

Rundet man die Einmündung von Ansatzröhren nach der Normalform für Mundstücke aus, so wird, wie bereits § 66 erwähnt, der Ausfluss-Coefficient dem aus solchen Mundstücken gleich bleiben, wenn der cylindrisch oder prismatisch gebliebene Theil nicht länger als sein halber Durchmesser ist. Für grössere Längen ergeben sich die Ausfluss-Coefficienten durch Hinzurechnung des mehr erwachsenden Widerstandes zu dem Widerstande des Mundstückes und werden dadurch von der Druckhöhe abhängig. Bei 1 Fuss Druckhöhe entspricht dem Ausfluss-Coefficienten 0,957 ein Werth von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 0,230$. Ist der nicht ausgerundete

Theil des Mundstückes länger als $0,5d$ und zwar d , so kommt zu jenem Werthe $0,50$ hinzu, und es findet sich in der Widerstands-Tabelle $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 0,230 + 0,500 = 0,730$ entsprechend $\varrho = 0,922$. Auf gleiche Weise findet man für

$$l = 2d, \varrho = 0,892$$

$$l = 3d, \varrho = 0,860$$

$$l = 4d, \varrho = 0,838$$

$$l = 5d, \varrho = 0,820.$$

Ein Ansatzrohr mit einem vorgesetzten Mundstücke, dessen nicht ausgerundeter Theil etwa $5\frac{1}{4}$ mal so lang als sein Durchmesser ist, giebt also denselben Ausfluss-Coefficienten, welcher einem kurzen, halb so langen

Rohre mit scharfkantiger Einmündung entspricht. Die absolute Grösse des Durchmessers muss hierbei gleichgültig sein. Dagegen kommt solche, wie bereits § 70 erwähnt, bei scharfkantiger Einmündung wohl in Betracht.

Für eine Oeffnung von 0,01 M. Durchmesser ergibt sich in der Tabelle § 51 der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta) = 0,642$, während er für Oeffnungen über 0,03 M. 0,615 beträgt. Rechnet man nun auch den Coefficienten für scharfkantige, kurze Ansatzrohre in demselben Verhältnisse, also $\frac{0,642}{0,615}$ grösser, so ergibt er sich für das 0,01 weite Rohr auf $\frac{0,642}{0,615} \cdot 0,816 = 0,852$, also genau übereinstimmend mit dem bereits § 69 angeführten Versuchs-Resultate von Weisbach.

§ 72.

Divergente Ansatzröhren.

Gleichung 3) und 4) § 69 bestimmen auch die Ausfluss-Coefficienten für divergente Ansatzrohre. Auch alle übrigen dabei in Betracht kommenden Verhältnisse lassen sich durch die vorhergehenden Entwicklungen klar stellen. Es bleibt hier daher nur übrig, ihre Anwendung durch einige Beispiele zu erläutern und deren Grenzen zur Anschauung zu bringen.

Ueber den Ausfluss aus conisch divergenten Ansatzröhren liegen Versuchs-Resultate von Venturi und Eitelwein vor. Der Eintritt aus dem Gefässe in das Rohr war hier jedoch durch ein nach der Form des contrahirten Strahles gebildetes Mundstück vermittelt. Bezeichnen wir für diesen Fall den engsten Querschnitt im Rohre mit a_1 und setzen voraus, dass das letztere ganz mit Wasser angefüllt sei, so lässt sich aus dem Gange der Herleitung im § 69 übersehen, dass um Gleichung 3) und 4) den vorliegenden Versuchen anzupassen, daselbst $2h$ anstatt h und $n = 1$ gesetzt werden muss. Hierdurch erhält man für die Ausfluss-Geschwindigkeit im weitesten äussern Querschnitt a

$$1) \quad v = \varrho \sqrt{\frac{a_1}{a}} \sqrt{2gh}$$

und für die im innern engsten Querschnitte

$$2) \quad v_1 = \varrho \sqrt{\frac{a}{a_1}} \sqrt{2gh}.$$

$\sqrt{\frac{a_1}{a}}$ ist für runde und regulär poligonale Querschnitte mit dem Verhältnisse der Durchmesser $\frac{d}{D}$ identisch.

Von den Venturi'schen Versuchen muss der mit einer 49 Linien langen Röhre von 18 Linien Ein- und 18 Linien Ausmündung bei einer innern Zusammenziehung bis auf $15\frac{1}{2}$ Linien, welcher den Ausfluss-Coefficienten 0,924 ergeben haben soll, von vornherein als fehlerhaft bei Seite gelassen werden. Nach § 69 konnte nämlich der Ausfluss-Coeffi-

cient für ein 18 Linien weites cylindrisches Rohr nur 0,816 betragen haben. Durch eine darin angebrachte Verengung um $2\frac{1}{2}$ Linien konnte derselbe doch nicht um etwa 11% vergrössert, sondern im günstigsten Falle nur nicht verkleinert werden. Nach der Erfahrung mit cylindrischen Ansatzröhren werden wir den Widerstands-Coefficienten hier um einige Prozente grösser etwa 0,93 annehmen können, weil in dem Mundstücke der Vibrations-Verlust wegfällt. Nachstehende Tabelle stellt die übrigen beiden Versuchs-Resultate von Venturi und ein solches von Eitelwein mit den sich durch Berechnung aus Gleichung 1) ergebenden Werthen übersichtlich zusammen.

No. des. Ver- suchs.	Beobachter.	Innerer engster Durch- messer im Quer- schnitt a_1 Linien.	Äus- serer wei- tester Durch- messer in a Linien.	Länge des Ansatz- rohres. Linien.	Hiernach berech- net sich $\sqrt{\frac{a}{a_1}}$	Wider- stands- Coeffi- cient ϱ	Ausfluss- Coefficient.	
							$\varrho\sqrt{\frac{a}{a_1}}$ berech- net.	beob- achtet.
1	Venturi	$15\frac{1}{2}$	23	78	0,674	0,93	0,627	0,622
2	Eitelwein	$15\frac{1}{2}$	27	148	0,574	0,93	0,534	0,538
3	Derselbe	12	$21\frac{1}{2}$	105,7	0,558	0,93	0,519	0,483

Zur Bestimmung des grössten Divergenz-Winkels, bei welchem unter freiem Zutritte der Luft an der Mündung noch voller Ausfluss möglich ist, dienen Gleichung 1) und 6) § 68, indem man die daselbst gefundenen Werthe von P einander gleichsetzt, nämlich

$$P = P = \frac{av^2\gamma}{g}\left(\frac{a}{a_1}-1\right) = a_1s_1 \frac{\cotang\alpha}{\sin\alpha}.$$

Führt man hier anstatt der Querschnitte a_1 und a deren Durchmesser d und nd ein, so erhält man schliesslich

$$\sin\alpha \cdot \tang\alpha = \frac{s_1g}{\gamma n^2v^2(n^2-1)}.$$

Für die kleinen Werthe von α , welche hier in Betracht kommen, kann man ohne erheblichen Fehler $\sin\alpha = \tang\alpha$ setzen. Nimmt man ausserdem für $s_1 = 1,15$ Pfund pr. □Fuss oder 5,83 Kilogr. pro □M., auch für γ und g die entsprechenden Zahlenwerthe, so wird

$$3) \sin\alpha = \frac{0,763}{nv} \sqrt{\frac{1}{n^2-1}} \text{ für pr. Fuss oder } \frac{0,239}{nv} \sqrt{\frac{1}{n^2-1}} \text{ für M.}$$

Diese Formel gilt jedoch nur, wenn der Werth von v mindestens so gross ist, dass der Strahl an der äussern Mündung zumal bei horizontalen Röhren sich nicht schon in Folge seiner eignen Schwere von der obern Wandung ablöst. Bedingungen hierfür ergiebt die Gleichung für die Parabel, in welcher der ausspringende Strahl sich niederzusenken

bestrebt ist. Berechnet sich die Senkung an der Mündung $> \frac{s}{\gamma} = 0,037$ M., so ist überhaupt ein voller Ausfluss nicht mehr möglich. Für jede Divergenz giebt es also auch eine Minimal-Geschwindigkeit als Bedingung der Füllung des Rohres.

Für den Versuch No. 3 von Eitelwein berechnet sich nach Formel 3) $\sin \alpha = 0,044$, während er sich aus den Versuchsgrössen auf 0,045 ergibt. Die Druckhöhe betrug nämlich 3 Fuss, wonach sich v auf $0,483 \cdot 7,9 \sqrt{3} = 6,4'$ ermittelt. Der zulässige Divergenz-Winkel war hier also schon erreicht, wenn nicht überschritten und der um 0,036 geringere Ausfluss-Coefficient daher wohl erklärlich.

Bei dem Versuche No. 1 von Venturi waren ausserdem in Entfernungen von 26 Linien vom engsten Querschnitte drei kleine Quecksilber-Manometer-Röhrchen mit dem Ansatzrohre in Verbindung gebracht, um die Saughöhen zu beobachten. Dieselben wurden im engsten Querschnitte auf 54,86, im nächstfolgenden auf 21,22, und im äussersten nur auf 7,25 Linien, gemessen. Diese Quecksilbersäulen entsprechen Wassersäulen von 62 Zoll, 24 Zoll und 8,2 Zoll. Da die Druckhöhe 33,64 pr. Zoll betrug und ($\rho\beta$) sich aus der Versuchstabelle auf 0,622 ergibt, berechnen sich nach § 69 Gleichung 8) diese Höhen auf 68,9 Zoll, resp. 26,7 Zoll und 8,5 Zoll, allerdings unter der Voraussetzung, dass auf dem Wege des Wassers von dem engsten zum weitesten Querschnitte keine Kraft auf innere Arbeit verloren gehe. (Vergl. § 110 die genauere Berechnung.)

Dasselbe Ansatzrohr, für welches Eitelwein nach Versuch No. 3 den Ausfluss-Coefficienten 0,483 fand, wurde bei ihm zu weiteren Versuchen benutzt, indem er zwischen die beiden Erweiterungen der Ein- und Ausmündung cylindrische Zwischenstücke von 12 bis 432 Linien Länge einschob. Die Ausfluss-Coefficienten ergaben sich hierbei selbstverständlich erheblich geringer. Wir finden dieselben aus der Widerstands-Tabelle, wenn wir die dem Widerstande in diesen cylindrischen Zwischenstücken entsprechenden Coefficienten aufsuchen und damit den ursprünglichen Ausfluss-Coefficienten 0,483 multipliciren. Die mittlere Druckhöhe bei den Versuchen betrug 1,5 Fuss, also $\sqrt[3]{h} = 1,145$. In nebenstehender Tabelle befinden sich die Rechnungsgrössen den Versuchsgrössen gegenüber gestellt.

Bei Versuch 1 erscheint das Resultat der Rechnung mit Rücksicht auf Versuch 2 angemessener, als das der Beobachtung.

Bei einem 20 Fuss langen Zwischenstücke gelang es Eitelwein nicht mehr die äussere Mündung gefüllt zu halten. Es war also hier durch den vermehrten Widerstand in der Rohrleitung die Geschwindigkeit unter die bereits erörterte Minimalgrenze gesunken.

No. des Versuchs.	Länge des cylindrischen Zwischenstücks. Linien.	Durchmesser desselben. Linien.	Dem entsprechende Werthe von $\frac{1}{d^3 \sqrt{h}}$	Dem entsprechenden Werthe von ρ aus der Widerstandstabelle.	Ohne das Zwischenstück betrug der Ausfluss-Coefficient.	Also mit Berücksichtigung desselben berechnet.	Ausfluss-Coefficient beobachtet.
1	12	12	0,87	0,918	0,483	0,443	0,416
2	36	12	2,62	0,862	0,483	0,416	0,416
3	144	12	10,5	0,746	0,483	0,360	0,344
4	432	12	31,6	0,609	0,483	0,294	0,283

§ 73.

Aus der Theorie der divergenten Ansatzröhren lassen sich wichtige Consequenzen für die Praxis der Wasserkraft-Maschinen, insbesondere der athmosphärischen Turbinen, ziehen.

Der Versuch von Eitelwein mit dem 105,7 Linien langen divergenten Ansatzrohre ergab nämlich für das Wasser im engsten Querschnitte eine der 2,4fachen Druckhöhe entsprechende effektive Durchfluss-Geschwindigkeit von $1,55 \sqrt{2gh}$. Wenn es also möglich wäre, eine der doppelten Gefälle Höhe entsprechende Arbeits-Geschwindigkeit des Wassers zu erzeugen und solche auch nur theilweise für eine mechanische Arbeits-Verrichtung nutzbar zu machen, so läge hierin ein nicht zu unterschätzender Vorthail für die Erhöhung des Nutzeffektes. Die Henschel'sche Turbine bietet hierzu insbesondere bei Gefällen über 2 M. eine passende Gelegenheit. Der Durchfluss des Wassers erfolgt darin nach Figur 89 und zwar bei kk_1 durch die Schaufeln des horizontalen Rades. Das

Fig. 89.

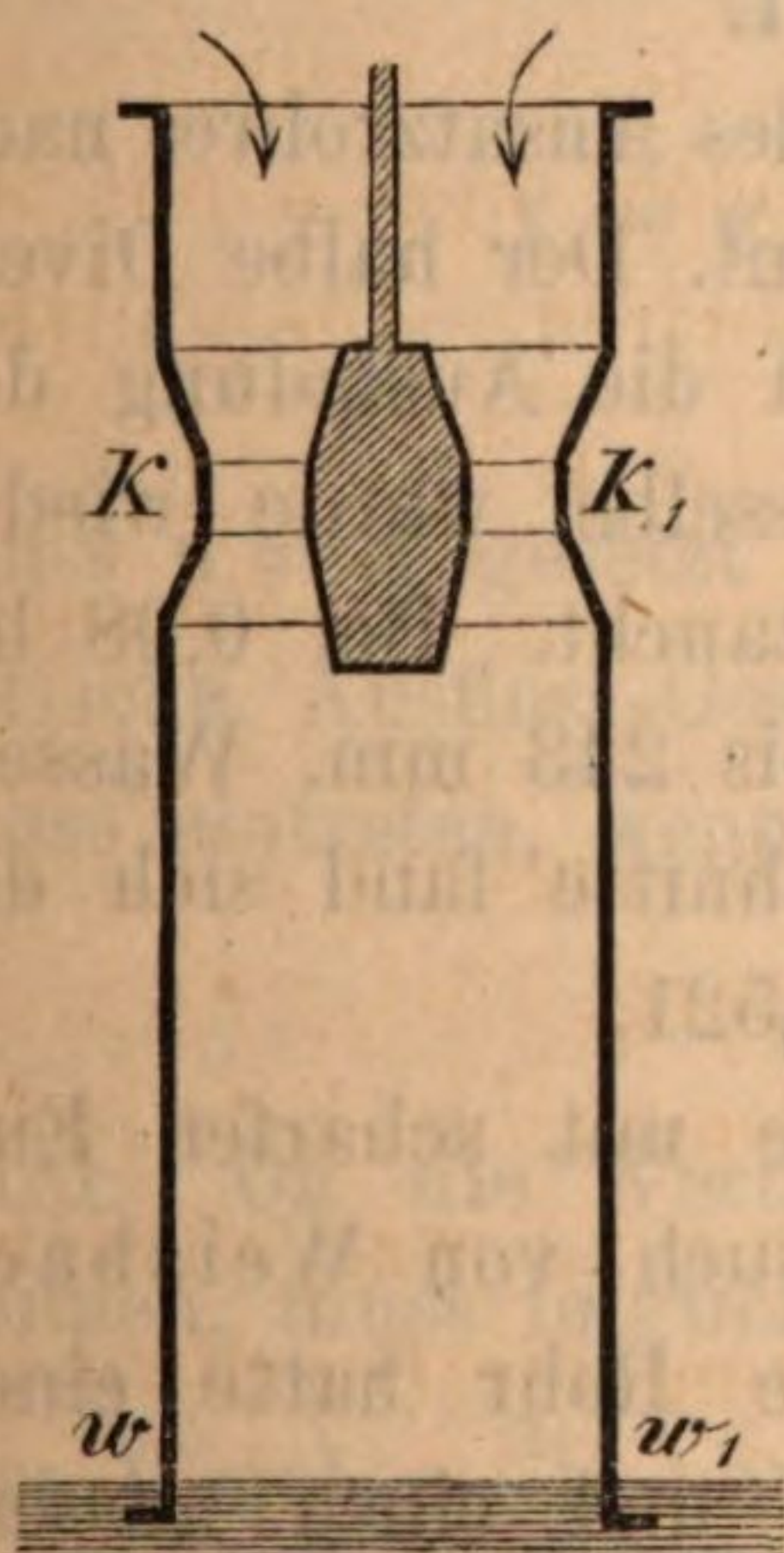
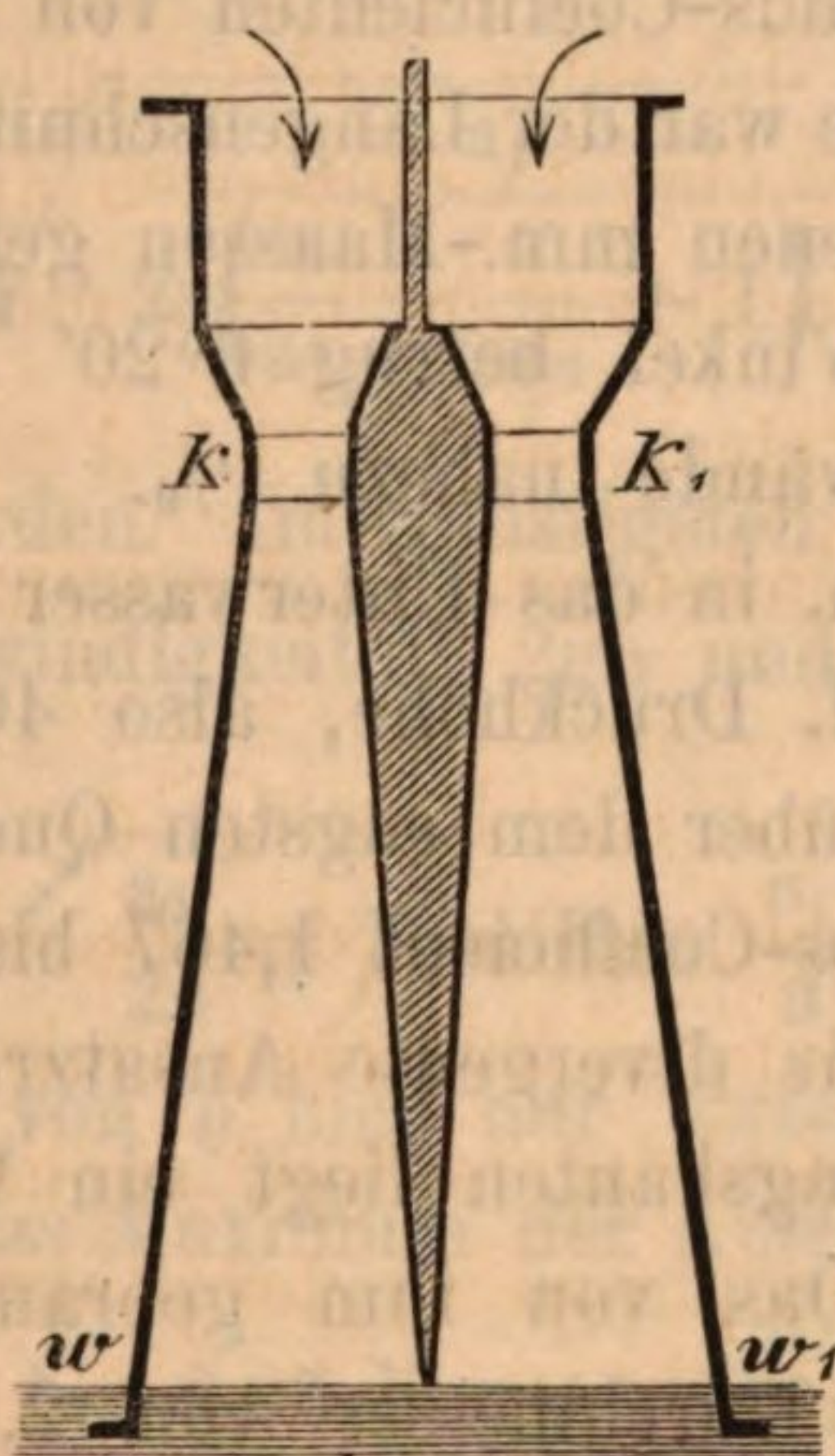


Fig. 90.



Oberwasser sinkt in einem luftdichten Rohre bis auf den Unter-Wasserspiegel ww_1 nieder, unter demselben ausmündend. Würde man das Durchfluss-Profil des unter den Schaufeln niedersinkenden Wassers nach Figur 90 abändern, so hätte man die Verhältnisse divergenter

Ansatzrohre für die Durchfluss-Geschwindigkeit in kk_1 gewonnen und dieselbe müsste ganz erheblich vermehrt werden.

Von dem Verfasser sind zur Bestätigung dieser Hypothese einige Versuche mit vertikalen, unter Wasser mündenden, Ansatzröhren im Boden eines 0,31 M. hohen Gefässes angestellt. Diese Röhren waren von Zinn gegossen und innen abgedreht, ähnlich wie die bei den Versuchen von Eitelwein und Venturi benutzten mit ausgerundeten Mundstücken versehen und hatten einen kleinen cylindrischen Zwischentheil von der Länge des kleinsten Durchmessers. Es war dabei von vorne herein zu erwarten, dass bei dem Ausflusse ohne Luftzutritt unter Wasser der den vollen Ausfluss noch zulassende Maximal-Divergenz-Winkel merklich grösser sein werde.

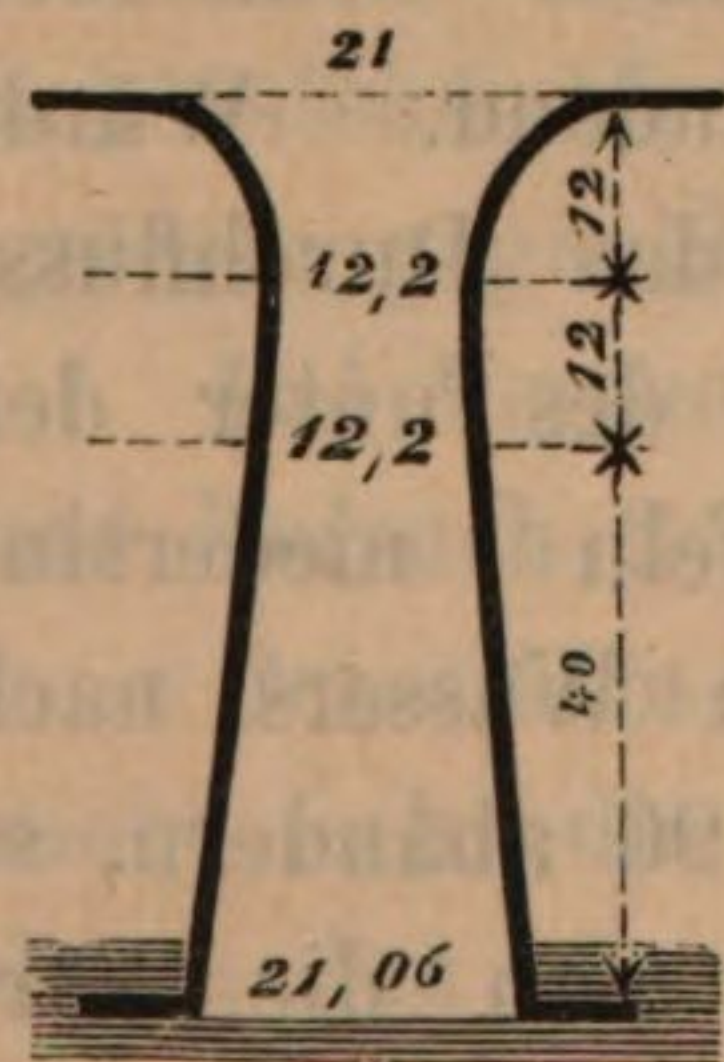
Der erste Versuch wurde mit einem Rohre gemacht, dessen divergenter Theil 40,8 mm. lang war. Der obere Durchmesser betrug 5,86, der untere 23,40 mm., der halbe Divergenz-Winkel α also $15^\circ 20'$. Die untere Mündung tauchte 12 mm. in den Wasserspiegel des darunter gestellten Gefässes. Die Druckhöhen wurden selbstredend incl. Ansatzrohr vom obern bis untern Wasserspiegel gemessen und variirten zwischen 0,13 und 0,34 M. Der Ausfluss-Coefficient ergab sich, dem aus dem Mundstücke bei 0,31 M. Druckhöhe entsprechend, 0,956 auf den engsten Querschnitt bezogen. Diese Divergenz war also zu bedeutend gewesen.

Beim zweiten Versuche betrug die divergente Rohrlänge 59 mm., der kleinste Durchmesser 10,70, der grösste 18 mm., der halbe Divergenz-Winkel also $3^\circ 31'$. Beim Ausflusse in die freie Luft wurde das Rohr sehr unregelmässig voll erhalten. In Folge dessen wurden die Ausfluss-Coefficienten nicht grösser als 0,96 bis 1,15. Unter Wasser hingegen, in das die untere Mündung 11 mm. eintauchte, fanden sich je nach zunehmender Druckhöhe von 0,1 bis 0,34 M. dieselben 1,461 bis 1,526 bei 0,34 M. Druckhöhe, also nach § 72 Gleichung 2) entsprechend einem Widerstands-Coefficienten von 0,91.

Beim dritten Versuche war der Längenschnitt des Ansatzrohres nach Figur 91 mit beigeschriebenen mm.-Maassen geformt. Der halbe Diver-

Fig. 91. genz-Winkel betrug $6^\circ 20'$ und die Ausladung der Seitenwände nahezu $\frac{1}{9}$. Dasselbe wurde wieder 11 mm. in das Unterwasser getaucht. Bei 0,08 bis 0,34 M. Druckhöhe, also 40 bis 243 mm. Wasserstand über dem engsten Querschnitte fand sich der Ausfluss-Coefficient 1,467 bis 1,521.

Für divergente Ansatzrohre mit scharfen Einmündungskanten liegt ein Versuch von Weisbach vor. Das von ihm gebrauchte Rohr hatte einen innern Durchmesser von 2,468 und einen äussern



von 3,228 Zoll. Das Verhältniss $\frac{a}{a_1}$ betrug also 1,71 und $\frac{a_1}{a} = 0,584$.

Setzt man in Gleichung 3) § 69 entsprechend der grössern Saugkraft auch n grösser wie bei cylindrischen Ansätzen gefunden, etwa 0,90, so wird für den vorliegenden Fall

$$v = \varrho \sqrt{\frac{0,584}{2(1,71-1,90+1)}} \cdot \sqrt{2gh} = 0,600\varrho \sqrt{2gh}.$$

und nimmt man auch den Widerstands-Coefficienten ϱ dem entsprechend grösser als 0,882 etwa 0,920, so ergibt sich der Ausfluss-Coefficient 0,552, während der Weisbach'sche Versuch 0,553 ergab.

Für kleine Durchmesser unter 0,02 M. gilt auch hier das bereits früher darüber Bemerkte.

§ 74.

Convergente Ansatzröhren ohne Mundstücke.

Auch beim Ausflusse aus convergenten Ansatzröhren, welche mit scharfen Kanten in die Gefässwand einmünden, findet man, dass der Abscheerungs-Widerstand an den Wandungen noch keinen merklichen Einfluss auf die Coefficienten hat, wenn die Länge nicht über das 2½fache des äussern Durchmessers beträgt. Für solche Rohre liegen Versuch-Resultate von D'Aubuisson und Castel vor. Wir werden daher auch die theoretischen Ermittlungen nur auf dieselben beschränken und dann die Einwirkungen untersuchen, welche Verlängerungen oder Verkürzungen auf den Ausfluss haben müssen.

Im § 68 ist bereits bemerkt worden, dass bei zunehmender Convergenz schliesslich die saugende Wirkung aufhören und im Gegentheil die grössere Oeffnung einen Gegendruck durch die kleinere erfahren muss, in Folge dessen sich das ganze Rohr mit Wasser füllt. Es findet dann keine Verdickung des contrahirten Strahles mehr statt, oder die nachfolgende Verdünnung paralysirt deren Wirkung und in Gleichung 3) § 69

$$v = \varrho \sqrt{\frac{a_1}{2a\left(\frac{a}{a_1} - \frac{a}{na_1} + 1\right)}} \sqrt{2gh}$$

muss $n = 1$ gesetzt werden. Im günstigsten Falle kann also die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ und $\beta = 1$ werden. Derselbe muss eintreten, wenn

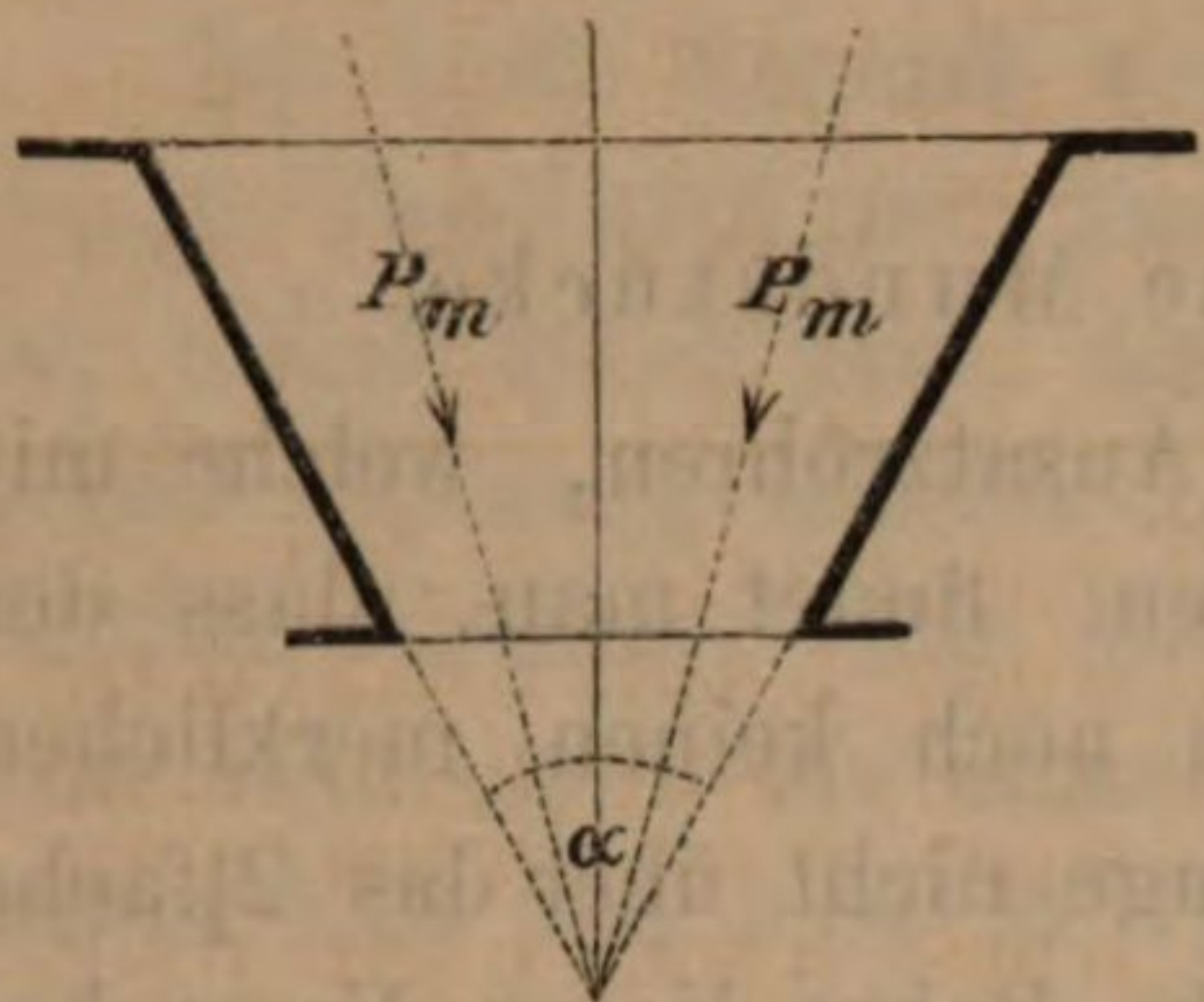
$$\varrho \sqrt{\frac{a_1}{2a}} = 1 \text{ mithin } \frac{a_1}{a} = \frac{2}{\varrho^2}$$

wird. Da die Werthe von ϱ hier nur zwischen 0,81 und 0,94 liegen können, muss folglich das Maximum der Ausfluss-Coefficienten zwischen den Werthen $\frac{a_1}{a} = 2,26$ bis 3,05 liegen. Diese Werthe entsprechen bei

Rohren von der $2\frac{1}{2}$ fachen Länge des kleinern Durchmessers den Convergenz-Winkeln 12° bis 16° . Bei den genannten Versuchen ergibt sich denn auch in der That das Maximum der Ausfluss-Coefficienten zwischen 13 und 14° Convergenz mit $0,946$. Ueber diese Grenze hinaus muss Gleichung 3) § 69 imaginäre Werthe geben, weil die Bedingungen, unter welchen sie gebildet worden, nicht mehr erfüllt werden können. Für grössere Convergenz-Winkel von 16° bis 180° müssen wir also zur Bestimmung der theoretischen Coefficienten, deren Werthe nur zwischen $1,00$ und $0,707$ liegen können, einen andern Weg einschlagen.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke in Figur 92 den Convergenz-

Fig. 92.



Winkel, unter dem sich die verlängerten Wandungen des Ansatzes schneiden, mit α . War nun bei 180° Convergenz, also bei einer Oeffnung in dünner Wand, die mittlere Richtung der ausfliessenden Wasserfäden unmittelbar über der Oeffnung nach

§ 24 = 45° , also $\frac{\alpha}{4}$ und es ergab sich daraus

$\beta = \cos \frac{\alpha}{4}$, so wird sich auch für jeden

andern beliebigen Convergenz-Winkel die mittlere Richtung der ausfliessenden Wasserfäden oder der auf Ausfluss wirkenden Druckkräfte gegen die Axe der Ausfluss-Bewegung auf $\cos \frac{\alpha}{4} = \beta$ dem gesuchten theoretischen Contraktions-Coefficienten ergeben, und für $\alpha = 0$ auch $\beta = 1$ werden.

Da nun die Grenzwerte von q und q_1 für $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ aus dem Frühern bekannt sind, so folgt daraus, wenn jeder Coefficient gesetzmässig ab- und zunehmen soll, ganz von selber das Ergebniss der nebenstehenden Tabelle durch Rechnung und Interpolation. Der bessern Controlle halber sind in den Rubr. V u. VI auch noch die Werthe von

$\frac{1}{d^3 h}$ sowohl für $h = 1$ als $h = 9,5$ pr. Fuss, bei welcher letzteren Druckhöhe D'Aubuisson und Castel operirten, nach Gleichung 5) § 36 berechnet. Dieselben gelten für den allerdings nur theilweise zutreffenden Fall, dass am ganzen Rohrumfange der ungeschwächte Abscheerungs-Widerstand wirksam sei.

Die Ergebnisse dieser Tabelle befinden sich in völliger Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von D'Aubuisson und Castel bei Convergenz-Winkeln von 0 bis $48\frac{1}{2}^\circ$, Oeffnungen von $0,016$ bis $0,02$ M. Weite und 3 M. Druckhöhe. Zur Prüfung der Coefficienten für grössere Convergenzwinkel sind von dem Verfasser 3 Versuche mit Ansätzen von

60°, 90° und 120° Convergenz bei 0,1 bis 0,3 M. Druckhöhe angestellt. Dieselben ergaben $(\varrho\beta) = 0,838$ resp. 0,807 und 0,749, also durchaus hinlängliche Uebereinstimmung. Eine Abhängigkeit von der Druckhöhe konnte dabei nicht beobachtet werden, wie denn auch D'Aubuisson und Castel eine solche nicht gefunden haben.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
Con- ver- genz- Win- kel α Grad.	$\cos \frac{\alpha}{4}$ = β	$1 + 5 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ = $\frac{D}{d}$ = n	$\frac{2,3 \log n}{n-1}$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ für h = 1 Fuss. (Für Me- ter das 1,48fache)	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ für h = 9,5 Fuss. (Für Me- ter das 1,48fache)	Rubr. VI ent- spre- chen- der Werth von ϱ	Wirk- licher Werth von ϱ	Geschwindigkeits-Coeffi- cient ϱ_1	Aus- fluss- Coeffi- cient ($\varrho\beta$)
0	1,00	1,00	1,00	2,50	1,18	0,905	0,816	0,816	0,816
1	1,000	1,04	0,98	2,45	1,16	0,905	0,846	0,846	0,846
2	1,000	1,09	0,96	2,40	1,13	0,906	0,870	0,870	0,870
3	1,000	1,13	0,94	2,35	1,11	0,907	0,889	0,890	0,889
4	1,000	1,17	0,92	2,30	1,09	0,908	0,905	0,907	0,905
5	1,000	1,22	0,90	2,25	1,06	0,910	0,916	0,918	0,916
6	1,000	1,26	0,88	2,20	1,04	0,910	0,924	0,926	0,924
7	0,999	1,30	0,87	2,16	1,02	0,911	0,930	0,932	0,929
8	0,999	1,35	0,85	2,12	1,00	0,912	0,935	0,938	0,934
9	0,999	1,39	0,83	2,08	0,98	0,912	0,939	0,944	0,938
10	0,999	1,44	0,82	2,05	0,96	0,913	0,943	0,950	0,942
11	0,999	1,48	0,81	2,03	0,95	0,913	0,945	0,955	0,944
12	0,999	1,52	0,80	2,00	0,94	0,914	0,946	0,958	0,945
13	0,999	1,57	0,79	1,97	0,93	0,914	0,947	0,961	0,946
14	0,999	1,61	0,78	1,95	0,92	0,915	0,945	0,964	0,944
16	0,998	1,70	0,76	1,90	0,89	0,916	0,944	0,968	0,942
20	0,996	1,88	0,72	1,80	0,85	0,919	0,932	0,971	0,928
24	0,994	2,06	0,68	1,70	0,80	0,921	0,921	0,974	0,915
28	0,992	2,25	0,65	1,62	0,76	0,923	0,910	0,976	0,903
32	0,990	2,43	0,62	1,54	0,72	0,925	0,901	0,978	0,892
36	0,988	2,62	0,59	1,48	0,69	0,927	0,893	0,979	0,882
40	0,985	2,82	0,56	1,40	0,66	0,929	0,886	0,980	0,873
44	0,982	3,02	0,54	1,35	0,63	0,930	0,881	0,980	0,865
48	0,978	3,23	0,52	1,30	0,61	0,931	0,877	0,980	0,858
52	0,974	3,44	0,50	1,25	0,59	0,932	0,873	0,980	0,851
56	0,970	3,66	0,49	1,22	0,57	0,934	0,871	0,980	0,845
60	0,966	3,89	0,47	1,18	0,55	0,935	0,870	0,980	0,840
70	0,954	4,50	0,43	1,08	0,51	0,937	0,870	0,977	0,830
80	0,940	5,20	0,39	0,98	0,47	0,940	0,870	0,974	0,818
90	0,924	6,00	0,35	0,88	0,43	0,942	0,870	0,971	0,804
100	0,906	6,95	0,32	0,80	0,39	0,945	0,870	0,968	0,788
110	0,887	8,14	0,29	0,72	0,35	0,947	0,870	0,965	0,772
120	0,866	9,65	0,26	0,65	0,31	0,950	0,870	0,962	0,753
130	0,843	10,72	0,23	0,57	0,27	0,953	0,870	0,959	0,733
140	0,819	14,75	0,20	0,50	0,23	0,958	0,870	0,956	0,713
150	0,793	18,66	0,17	0,42	0,19	0,961	0,870	0,953	0,690
160	0,766	29,35	0,12	0,30	0,14	0,967	0,870	0,950	0,666
170	0,737	58,15	0,07	0,17	0,08	0,974	0,870	0,947	0,641
180	0,707	∞	0,00	0,00	0,00	1,00	0,870	0,943	0,615

Bei 24° Convergenz finden wir erst, dass der wirkliche Widerstands-Coefficient dem vollen Abscheerungs-Widerstande entspricht, während er für kleinere Winkel grösser wird, woraus der Schluss gezogen werden kann, dass bei dieser Convergenz der völlige Anschluss des Strahles an die Wandung eintritt. Da sich dasselbe Verhältniss bei 1 Fuss Druckhöhe erst bei 36° ergibt, so scheint die letztere einen ausgleichenden Einfluss auf den frühern oder spätern Anschluss an die Wandung zu üben. Bei 60° wird der wirkliche Widerstand schon erheblich grösser, als die Abscheerung an der Rohrwandung und ϱ nimmt den Werth 0,87 für Oeffnungen in dünner Wand an. Während bei weiterer Zunahme der Convergenz der Abscheerungs-Widerstand abnimmt, und der Contraktions-Verlust mit dem Winkel α wächst, bis er bei 180° das Maximum erreicht, bleibt die Summe beider zwischen 60° und 180° constant, dem Werthe $\varrho = 0,87$ entsprechend.

Es ist nunmehr noch das Aenderungs-Verhältniss der Ausfluss-Coefficienten bei ab- oder zunehmender Rohrlänge zu untersuchen, was am besten durch einige beispielsweise Berechnungen mit Benutzung der vorstehenden Tabelle geschehen wird.

Aufgabe 1. Es soll der Ausfluss-Coefficient für ein Ansatzrohr von 28° Convergenz ermittelt werden, dessen Länge das Fünffache des Ausmündungs-Durchmessers von 3 Zoll, also 15 Zoll beträgt. Die Druckhöhe sei 8 Fuss.

Auflösung. Der Durchmesser der innern Mündung berechnet sich auf 10,5 Zoll. Dividirt man letzteres Maass durch den sich für 28° Divergenz aus der Tabelle ergebenden Werth von $\frac{D}{d} = 2,25$, so ergibt sich derjenige Durchmesser d_1 mit 4,7 Zoll, welchen das Rohr in einer Entfernung von $2\frac{1}{2} \cdot 4,7 = 11,7$ Zoll von der innern Einmündung hat. Diesem obern Stücke entspricht nach der Tabelle ein Widerstands-Coefficient $\varrho = 0,910$ und dem letztern ein Werth $\frac{1}{\frac{3}{d}\sqrt{h}} = 1,05$.

Will man diesen auf die Ausfluss-Geschwindigkeit in der kleineren Oeffnung beziehen, so muss man ihn nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten in dem 4,7 Zoll weiten und 3 Zoll weiten Querschnitte reduciren, also mit dem Bruch $\left(\frac{3}{4,7}\right)^2 = 0,4$ multipliciren, wodurch man den für den obern Rohrtheil in Rechnung zu bringenden Widerstandswerth $\frac{1}{\frac{3}{d}\sqrt{h}}$ mit $1,05 \cdot 0,4 = 0,42$ erhält. Es bleibt nun noch der Widerstandswerth für das äussere 3,3 Zoll lange Rohrstück zu bestimmen, in welchem die volle Abscheerung thätig wird. Wäre dies Rohr cylindrisch

vom Durchmesser 3 Zoll, so würde sich derselbe auf $\frac{3,3}{3\sqrt[3]{8}} = 0,55$ be-

rechnen. Wegen der Divergenz reducirt er sich dem Werthe von $\frac{D}{d} = n = \frac{4,7}{3} = 1,57$ entsprechend, nach der Tabelle auf $0,79 \cdot 0,55 = 0,43$.

Der Gesamtwertb von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ beträgt mithin $0,42 + 0,43 = 0,85$ und

für diesen findet sich $q = 0,919$, also der Ausfluss-Coefficient ($q\beta$) $= 0,919 \cdot 0,992 = 0,912$, während er sich für ein Ansatzrohr von derselben Convergenz, welches jedoch nur den $2\frac{1}{2}$ fachen kleinern Durchmesser zur Länge hat 0,903 also 0,009 kleiner aus der Tabelle ergibt.

Hiernach wird es wohl erklärlich, dass D'Aubuisson und Castel die vortheilhafteste Länge solcher Ansatzröhren durch Versuche auf das 5fache und nicht $2\frac{1}{2}$ fache des kleinern Durchmessers gefunden haben wollen, wenn dies auch von andern Hydraulikern bisher bestritten worden.

Aufgabe 2. Lespinasse beobachtete den Ausfluss-Coefficienten durch eine grössere Düse von 9,3 Fuss Länge und rektangulärem Querschnitte auf 0,976 bis 0,987. Die kleinere Endfläche hatte 0,43 und 0,61 Fuss, die grössere 2,33 Fuss und 3,11 Fuss Seite, der mittlere Convergenzwinkel betrug $13^\circ 48'$ die Druckhöhe 9,3 Fuss. Wie gross ergibt derselbe sich durch Rechnung?

Auflösung. Das Verhältniss $\frac{D}{d}$ lässt sich hier annähernd durch das der Umfänge $\frac{2 \cdot (2,33 + 3,11)}{2 \cdot (0,43 + 0,61)} = 5,23$ ausdrücken, der mittlere Werth von D durch 2,72 und der von d durch 0,52'. Dividirt man D durch den dem Winkel $13^\circ 28'$ entsprechenden Werth von $\frac{D}{d} = 1,59$, so er-

giebt sich der mittlere Durchmesser d_1 in dem Abstände $2,5d$, von der Einmündung auf 1,71' und dessen Abstand auf $2,5 \cdot 1,71 = 4,28'$. Das äussere Ende der Düse, für welches der volle Abscheerungs-Widerstand in Rechnung zu bringen ist, wird also $9,3 - 4,28 = 5,02'$ lang. Dafür

berechnet sich $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = \frac{5,02}{0,52\sqrt[3]{9,3}} \cdot \frac{2,3 \log n}{n-1}$ also für $n = \frac{1,71}{0,52} = 3,29$,

$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 2,39$. Für den obern Theil findet sich bei $13^\circ 28'$ Convergenz

$q = 0,946$, dem entspricht $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 0,366$, wovon hier der Antheil

$\left(\frac{0,52}{1,71}\right)^2 \cdot 0,366$ mit 0,08 zur Wirkung gelangt. Der Gesamtwert von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ wird also für den vorliegenden Fall $2,39 + 0,08 = 2,47$, $e = 0,866$ und $(e\beta) = 0,999 \cdot 0,866 = 0,865$, während Lespinasse 0,976 bis 0,987 gefunden haben will.

Daraus muss geschlossen werden, dass bei diesem Versuche dessen Resultat übrigens auch im Widerspruch mit der praktischen Erfahrung steht, Umstände eingewirkt haben, die der Beobachtung und Rechnung entgangen sind. Da die Düse einem vertikalen Rade das Betriebswasser zuführte, so kann als möglich angenommen werden, dass die Arbeit des ausströmenden Wassers unter Umständen verrichtet wurde, die, wie bei divergenten Ansatzröhren, auf Vermehrung des Ausflusses wirkten. Oder es muss ausser der Druckhöhe von 9,3 Fuss noch eine andere vorhanden gewesen sein, welche den Eintritt des Wassers in die obere Mündung bewirkte und nicht mit gemessen wurde, wofür allerdings der auffallende Umstand spricht, dass Druckhöhe und Düsenhöhe beide gleich gross auf 9,3 Fuss angegeben sind.

§ 75.

Convergente Ansatzröhren mit ausgerundeten Mundstücken.

Sobald durch Ausrundung der Einmündung des convergenten Ansatzrohres das Contraktionsbestreben völlig aufgehoben ist, muss der vollständige Abscheerungs-Widerstand mindestens in einem Theile desselben wirksam werden. Zwischen 0 und 24° Convergenz müssen demnach solche Ausrundungen wesentliche Aenderungen der Ausfluss-Coefficienten zur Folge haben, bei grösserer Convergenz dagegen nur verschwindend kleine. Die Coefficienten bestimmen sich innerhalb dieser Grenzen mithin nach der Widerstands-Tabelle und werden damit von der Druckhöhe abhängig. Nimmt man die Höhe des ausgerundeten Theiles auf etwa 0,5 des kleinern Durchmessers, so zeigt die Beobachtung, dass ausserdem noch in einem Theile des gradlinig gebildeten Ansatzes, dessen Länge auf etwa $\frac{3}{4}$ des kleinern Durchmessers anzunehmen ist, der Abscheerungs-Widerstand, in Folge der noch nicht überwundenen Fliehkraft der eintretenden Wassertheilchen ausser Wirksamkeit bleibt. Wenn also die Gesamtlänge solcher Ansätze auf das $2\frac{1}{2}$ fache des Durchmessers genommen wird, so ist der Werth für $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ nur

für die Hälfte dieser Länge also $\frac{5}{4}$, zu berechnen, für den obern Theil dagegen dem constanten Widerstands-Coefficienten von etwa 0,965 ent-

Convergenz- Winkel α Grad.	Ent- spre- chende Werthe von β .	Werthe von																									
		für $h = \frac{1}{8}$ Fuss.						$h = 1$ Fuss.						$h = 8$ Fuss.						$h = 27$ Fuss.						$h = 64$ Fuss.	
		$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$	$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$	ϱ	$(\varrho\beta)$					
0	1,000	2,65	0,861	0,861	1,40	0,898	0,898	0,77	0,922	0,922	0,57	0,934	0,934	0,46	0,941	0,941	0,46	0,941	0,941	0,46	0,941	0,941					
1	1,000	2,59	0,862	0,862	1,37	0,898	0,898	0,76	0,923	0,923	0,56	0,935	0,935	0,46	0,941	0,941	0,46	0,941	0,941	0,46	0,941	0,941					
2	1,000	2,52	0,864	0,864	1,34	0,899	0,899	0,74	0,924	0,924	0,54	0,936	0,936	0,45	0,941	0,941	0,45	0,941	0,941	0,45	0,941	0,941					
4	1,000	2,45	0,866	0,866	1,30	0,900	0,900	0,73	0,925	0,925	0,53	0,936	0,936	0,44	0,942	0,941	0,44	0,942	0,941	0,44	0,942	0,941					
6	1,000	2,39	0,867	0,867	1,27	0,902	0,902	0,71	0,926	0,926	0,52	0,937	0,937	0,43	0,942	0,941	0,43	0,942	0,941	0,43	0,942	0,941					
8	0,999	2,33	0,869	0,868	1,24	0,903	0,902	0,69	0,927	0,926	0,51	0,938	0,937	0,42	0,943	0,942	0,42	0,943	0,942	0,42	0,943	0,942					
10	0,999	2,27	0,871	0,870	1,21	0,904	0,903	0,68	0,928	0,927	0,50	0,938	0,937	0,42	0,943	0,942	0,42	0,943	0,942	0,42	0,943	0,942					
12	0,999	2,21	0,873	0,872	1,17	0,905	0,904	0,66	0,929	0,928	0,49	0,939	0,938	0,41	0,943	0,942	0,41	0,943	0,942	0,41	0,943	0,942					
16	0,998	2,13	0,875	0,873	1,13	0,906	0,904	0,64	0,930	0,928	0,47	0,940	0,938	0,40	0,944	0,941	0,40	0,944	0,941	0,40	0,944	0,941					
20	0,996	2,05	0,878	0,874	1,09	0,908	0,904	0,62	0,931	0,927	0,46	0,941	0,937	0,39	0,944	0,940	0,39	0,944	0,940	0,39	0,944	0,940					
24	0,994	1,97	0,880	0,875	1,05	0,909	0,904	0,60	0,932	0,927	0,45	0,941	0,936	0,38	0,945	0,939	0,38	0,945	0,939	0,38	0,945	0,939					
28	0,992	1,88	0,883	0,877	1,01	0,911	0,904	0,58	0,934	0,926	0,44	0,942	0,935	0,37	0,945	0,938	0,37	0,945	0,938	0,37	0,945	0,938					
32	0,990	1,81	0,886	0,877	0,98	0,912	0,902	0,56	0,935	0,926	0,43	0,942	0,933	0,36	0,946	0,937	0,36	0,946	0,937	0,36	0,946	0,937					

sprechend der constante Werth 0,15 für Fuss- oder 0,222 für Meter-Maass aus der Widerstands-Tabelle zuzusetzen. Für solche Rohre, deren gradliniger Theil also des 2fachen und deren ausgerundeter des 0,5fachen des kleinern Durchmesser beträgt, ist die umstehende Coefficienten-Tabelle und zwar der Werth von $\frac{1}{3\sqrt{h}}$ für pr. Fussmaass berechnet. Für Meter-

maass ist letzterer 1,48 mal so gross zu nehmen. Diese Tabelle kann zwar, wegen der Durchschnittswerthe, welche ihrer Berechnung zu Grunde gelegt sind, keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen, möchte indessen, zumal wenn man ihr die Tabelle in § 74 gegenüberstellt, genügenden Anhalt für die Praxis bieten. Ein Vergleich mit der letztgedachten Tabelle ergiebt das auffallende Resultat, dass bei gewissen Convergenz-Verhältnissen die Ausfluss-Coefficienten durch Ausrundung der innern Mündungskanten verkleinert, anstatt wie man hätte erwarten sollen, vergrössert werden. Zwei von dem Verfasser mit Mundstücken von 8° und 12° Convergenz bei 0,04 bis 0,3 M. Druckhöhe angestellte Versuche haben dies indessen bestätigt, ergaben jedoch gleichzeitig, dass auch bei scharfkantigen Einmündungen der Ausfluss-Coefficient nicht ganz unabhängig von der Druckhöhe war, sondern sich mehr den Werthen der letztern Tabelle anschloss. Die Entwicklungen in §§ 68 und 69 zeigen übrigens den Weg an zur genauen Bestimmung der Coefficienten für jeden Divergenz-Winkel und jedes beliebige Längenverhältniss.

§ 76.

Innere Ansatzröhren.

Innere Ansatzröhren, deren äussere Mündung in der Gefässwandung liegt und deren Länge in das Gefäss hineinragt, geben nach übereinstimmenden Versuchen von Weisbach, Bidone, auch dem Verfasser, keine andere Ausfluss-Coefficienten, wie äussere, sowohl für den Fall, dass der Strahl die Röhre füllt, als für den, dass er contrahirt hindurch geht, ohne die letztere zu berühren, wenn der innere Rand der Röhre eine Stirnbreite hat, welche mindestens $\frac{1}{5}$ der lichten Weite beträgt. Daraus folgt, dass diese Randbreite genügt, um die Bildung des natürlichen Adhäsionstrichters, wie solcher zumal bei Oeffnungen unter 0,02 M. Weite zur Wirkung gelangt, zuzulassen. Nur bei Zuschärfung des Röhrenrandes bis auf ein Minimum, tritt auch eine verschärfte Abscheerung des ausfliessenden Strahles und damit eine Vergrösserung der Widerstands-Arbeit ein, welche den Ausfluss-Coefficienten verringert. Nach Versuchen von Bidone soll bei cylindrischen Ansätzen und zugeschärf-

tem Rande der Ausfluss sich um 0,11, nach Weisbach um 0,08 verringern, nach dem Einen also 0,505 nach dem Andern 0,535 betragen, während der aus dünner Wand 0,615 ist. Es muss schon in hohem Grade auffallend erscheinen, dass eine so geringfügige Aenderung an dem Röhrenrande den Ausfluss so erheblich beeinträchtigen soll. Der Verfasser hat desshalb hierüber wiederholte Versuche angestellt, bei denen es ihm indessen auch durch grösstmögliche Zuschärfung des Randes nicht gelungen ist, den Ausfluss-Coefficienten um mehr als 0,03 zu verringern. Diese Versuche sind bei veränderlichem Wasserspiegel zwischen 0,8 und 0,3 M. Druckhöhe angestellt.

Versuch 1. Ein inneres Ansatzrohr, dessen Randdicke bis auf 0,5 mm. abgeschärft war, ergab ohne Anschluss des Strahles an die Wandung, welche, um letztern zu vermeiden mit Talg bestrichen war, den Ausfluss-Coefficienten 0,596. Die Länge betrug 13,5 mm., die innere Oeffnung 15,42, die äussere 15,89 mm. Der innern Oeffnungsweite entspricht nach § 51 ein Ausfluss-Coefficient von 0,623. Die Differenz betrug also nur 0,027.

Versuch 2. Dasselbe Rohr ergab bei vollem Anschluss an die Wandung für die äussere 15,89 mm. weite Oeffnung berechnet ($q\beta$) = 0,780 und für die innere 15,42 mm. weite 0,825.

Versuch 3. Ein inneres Ansatzrohr von 15° Divergenz und 10,1 mm. Durchmesser der kleinern Oeffnung, dessen Rand bis auf 1 mm. abgeschärft war und dessen Länge 27 mm. betrug, ergab ohne Anschluss an die Wandung ($q\beta$) = 0,643 vollkommen übereinstimmend mit einer gleich weiten Oeffnung in dünner Wand.

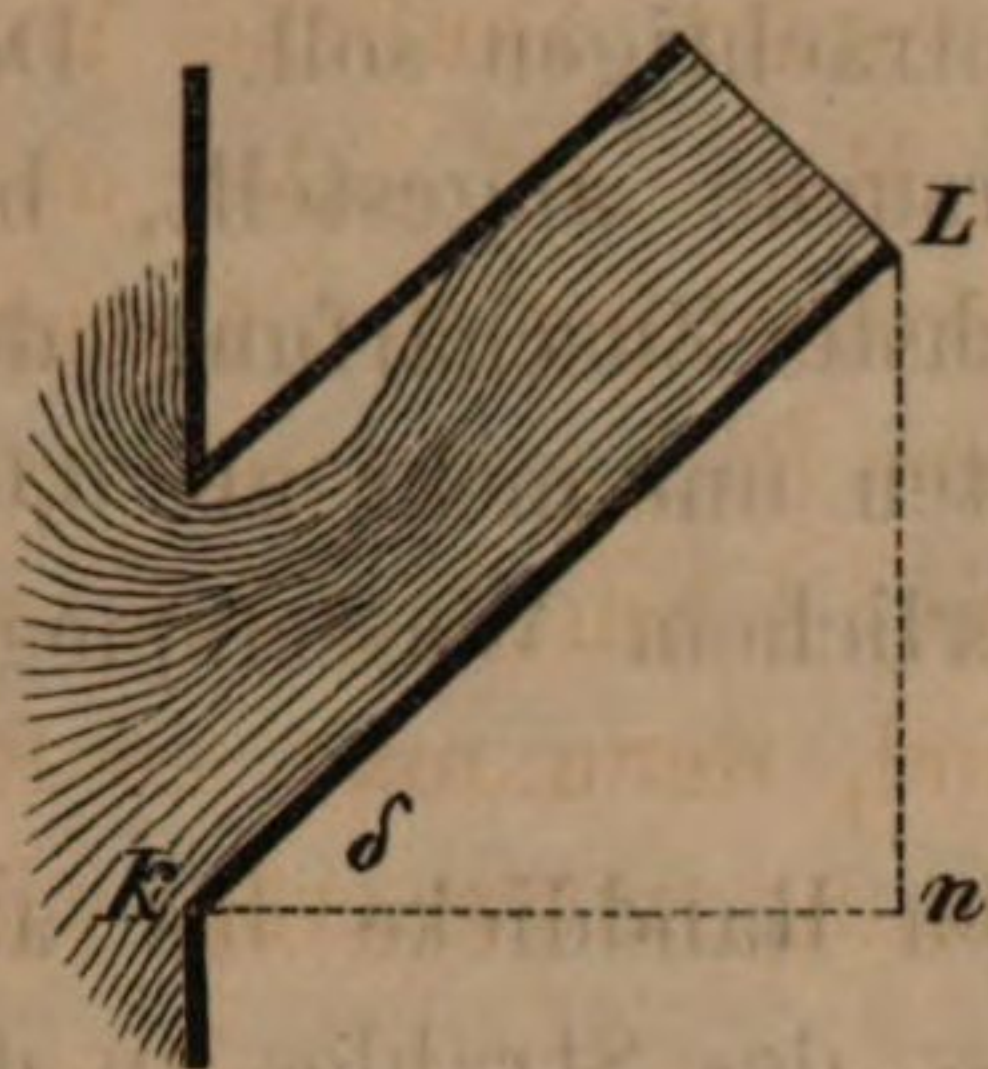
Versuch 4. Ein Ansatzrohr wie das vorige, jedoch von 50° Divergenz, 26 mm. Höhe und 3,76 mm. innerm Durchmesser, gab bei 0,5 mm. Randdicke ohne Anschluss ($q\beta$) = 0,680. Dasselbe wurde nach und nach abgefeilt, so dass die innere Oeffnung nacheinander 5, 6, 8, 10, 13 und 16 mm. weit wurde. Aus dem Vergleiche mit den für dieselben Oeffnungsweiten aus dünner Wand nach § 51 sich ergebenden Ausfluss-Coefficienten, folgte dieselbe verhältnissmässige Abnahme und zwar als geringste Differenz 0,017, als mittlere 0,20, und nur bei einem einzigen Versuche 0,029 weniger.

Somit kann man wohl mit hinreichender Genauigkeit und Zuverlässigkeit, je nach dem Divergenzwinkel und der Randdicke des innern Ansatzes, die Ausfluss-Coefficienten 0,01 bis 0,03 geringer nehmen als für dünne Wandungen, welche gegen die Strahlaxe normal geneigt sind.

§ 77.

Schiefe Ansatzröhren.

Fig. 93.



Äussere Ansatzröhren, welche nach Figur 93 schief in die Wandfläche eingesetzt, oder innere Ansatzröhren, welche an ihrer Mündung schief abgeschnitten sind, müssen geringere Ausfluss-Coefficienten ergeben, nicht nur, weil in Folge der ungleichmässigen Fliehkraft und Divergenz, mit welcher die einzelnen Wasserfäden in das Rohr treten, hier in dem grössern Theile desselben ein kräftigerer Anschluss an die Wandung und damit ein vermehrter Abscheerungs-Widerstand eintritt, sondern auch weil solche Röhren in der Regel länger, gleich dem 3 bis 4fachen Durchmesser, genommen werden müssen, wenn die äussere Mündung ganz gefüllt bleiben soll. Ausserdem wird durch die grössere Divergenz der einzelnen Wasserfäden und Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit die innere Widerstands-Arbeit etwas vermehrt. Die Summe der Widerstands-Arbeit wird indessen nicht viel grösser, als die der Abscheerung am vollen Rohrumfange entsprechende. Nach Versuchen von Weisbach mit einem cylindrischen Ansatzrohre ergab sich für verschiedene Werthe des Abneigungswinkels $Lkn = \delta$ die Abnahme der Ausfluss-Coefficienten wie folgt:

Winkel $\delta =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Ausfluss-Coefficient ($q\beta$)	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Die Länge des Versuchsrohres betrug das Dreifache seines Durchmessers. Der letztere muss dabei selbstverständlich nicht in der Ebene des schiefen Schnittes, sondern normal zur Axe, gemessen werden.

Nach § 69 fand sich β für ein kurzes grades Ansatzrohr ohne Abscheerungs-Widerstand 0,924 und $q = 0,886$. Dem letztern Werthe entspricht

$$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 1,80 \text{ für pr. Fussmaass. Rechnet man hinzu } \frac{1}{d} = 3,00,$$

so ergibt sich für 1 Fuss Druckhöhe der Gesamtwert von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 4,91$, wofür sich $q = 0,817$ findet und $(q\beta) = 0,924 \cdot 0,817 = 0,757$. Wenn nun die Weisbach'schen Versuche bei einer Druckhöhe von nicht viel mehr oder weniger wie 1 Fuss angestellt waren, so würde etwa bei einem Abneigungswinkel von 35° der Gesamt-Widerstand

um die volle Abscheerung am Rohrumfange vermehrt sein. Damit müssen aber auch die Ausfluss-Coefficienten wieder abhängig von der Druckhöhe werden und die Ergebnisse jener Versuche können daher nur für die Druckhöhe genau passen, bei welcher dieselben angestellt sind.

Bei divergenten und convergenten Röhren werden ähnliche Verminderungen des Ausflusses zu erwarten sein. Man darf dabei aber nicht übersehen, dass dieselben nur aus einer Vergrösserung der äussern und innern Widerstands-Arbeit, nicht aber aus einer Richtungsänderung der auf Ausfluss wirkenden Kraft, oder dem Carnot'schen Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft, herzuleiten sind, wenn man sie für jeden vorkommenden Fall einer annähernden Schätzung unterwerfen will.

§ 78.

Einfluss der absoluten Grösse der Oeffnungen bei Ansatzröhren.

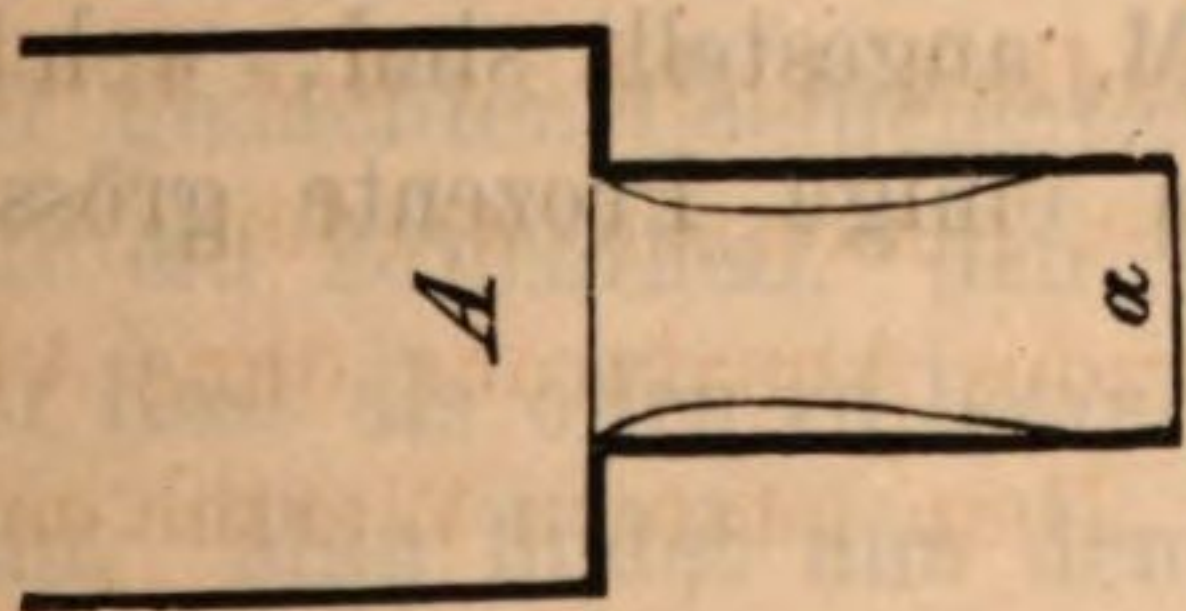
Wenn die innere Einmündung der Ansatzröhren bereits nach der Normal-Mundstücksform ausgerundet ist, kann, wie schon § 67 bemerkt worden, bei Oeffnungen unter 0,02 Durchmesser keine Vergrösserung der Ausfluss-Coefficienten mehr eintreten. Nur da, wo Ansatzröhren mit scharfen Einmündungskanten grössere oder kleinere Werthe geben, als solche mit ausgerundeten, wird sich bei ganz kleinen Oeffnungen der Ausfluss-Coefficient dem für letztere um so mehr nähern, je kleiner dieselben werden. Die Tabelle § 51 giebt auch hierfür den Maassstab.

§ 79.

Kurze prismatische Ansatzröhren an Gefässen von beschränktem Querschnitte.

Wenn kurze cylindrische oder prismatische Ansatzröhren nach

Fig. 94.



Figur 94 aus Gefässen münden, deren Querschnitt weniger als das Zehnfache des Oeffnungs-Querschnittes beträgt, so wird das theoretische Contraktions-Verhältniss β nach Tabelle § 53 ein grösseres als das § 69 mit $0,707 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ vorausgesetzte. Bezeichnen wir diesen anderweiten Verhältnissbruch

mit n , so lässt sich aus dem Herleitungsgange § 69 ohne Weiters übersehen, dass wir daselbst in Gleichung 1) anstatt $P_1 = a_1 h \gamma \varrho^2$ setzen

müssen $\left(\frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) a_1 h \gamma \varrho^2$ und dadurch schliesslich β den theoretischen Coefficienten für den vorliegenden Fall erhalten

$$1) \beta = n \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \quad \text{und} \quad 2) v = \varrho n \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \sqrt{2gh}.$$

Den Widerstands-Coefficienten ϱ müssen wir dann der gemilderten Contraktion entsprechend nach demselben Verhältnisse von 0,886:0,870 grösser setzen, wie er sich in § 69 gegen den beim Ausflusse durch Oeffnungen in dünner Wand grösser ergeben hat. Hiernach berechnet sich für die verschiedenen Querschnitts-Verhältnisse $\frac{a}{A}$ nachstehende Coefficienten-Tabelle.

Quer- schnitts- Verhält- niss $\frac{a}{A}$	β aus der Tabelle § 53 = n	$n\sqrt{\frac{n}{2n-1}}$ = β	ϱ	$(\varrho\beta)$	Quer- schnitts- Verhält- niss $\frac{a}{A}$	β aus der Tabelle § 53 = n	$n\sqrt{\frac{n}{2n-1}}$ = β	ϱ	$(\varrho\beta)$
1,00	0,981	0,991	0,980	0,971	0,74	0,822	0,930	0,980	0,911
0,99	0,972	0,986	0,980	0,966	0,72	0,814	0,927	0,980	0,908
0,98	0,963	0,982	0,980	0,962	0,71	0,810	0,926	0,980	0,907
0,97	0,954	0,978	0,980	0,958	0,68	0,796	0,923	0,973	0,900
0,96	0,946	0,974	0,980	0,954	0,64	0,781	0,920	0,962	0,885
0,95	0,938	0,970	0,980	0,951	0,59	0,767	0,919	0,951	0,874
0,94	0,931	0,967	0,980	0,948	0,54	0,756	0,919	0,940	0,864
0,93	0,924	0,964	0,980	0,945	0,49	0,746	0,919	0,930	0,855
0,92	0,917	0,961	0,980	0,942	0,44	0,737	0,920	0,920	0,846
0,91	0,910	0,958	0,980	0,939	0,39	0,730	0,920	0,912	0,839
0,90	0,903	0,956	0,980	0,937	0,34	0,724	0,920	0,905	0,833
0,87	0,885	0,949	0,980	0,930	0,28	0,719	0,921	0,899	0,829
0,84	0,868	0,943	0,980	0,924	0,23	0,714	0,922	0,894	0,824
0,82	0,857	0,939	0,980	0,920	0,17	0,711	0,923	0,890	0,821
0,80	0,848	0,936	0,980	0,917	0,11	0,709	0,923	0,888	0,820
0,77	0,834	0,933	0,980	0,914	0,08	0,708	0,924	0,887	0,820

Die Werthe von $(\varrho\beta)$ in dieser Tabelle zeigen fast genau dasselbe Abnahme-Verhältniss, welches sich aus einer durch Weisbach für diesen Fall hergeleiteten Corrections-Formel ergiebt, durchschnittlich sind sie jedoch 0,01 bis 0,02 kleiner, was wohl daher kommt, dass die Weisbach'schen Versuche, auf welche sich seine Corrections-Formel stützt, mit sehr kleinen Röhren unter 0,02 M. angestellt sind, welche natürlich auch die Ausfluss-Coefficienten um einige Prozente grösser ergeben mussten.

§ 80.

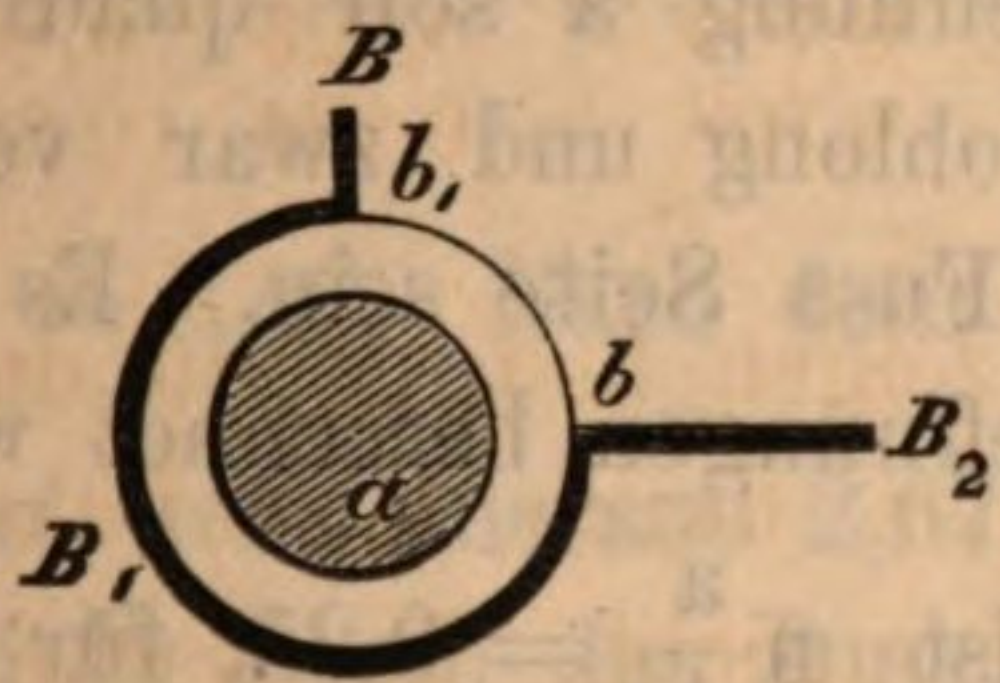
Einfluss der Lage der Oeffnung zu den einschliessenden Wandungen.

Schon Bidone fand durch Versuche, dass die Nähe einschliessender Wandungen keine Veränderung des Ausflusses bewirkt, wenn solche um mindestens das 2,7fache der Oeffnungsweite von derselben entfernt sind. Dass dies nicht unter allen Umständen richtig ist, folgt schon aus § 46 Beisp. 1. Die Tabelle § 53 ergiebt, dass die Contraktion des ausfließ-

senden Strahles nicht mehr sonderlich beeinflusst wird, wenn der Gefäss-Durchmesser mindestens $3\frac{1}{2}$ mal so gross ist, als der der Oeffnung. Die Normalform des contrahirten Strahles lässt erkennen, dass die Zuströmungs-Verhältnisse nicht wesentlich geändert werden, wenn die einschliessenden Wände vor dem Mittelpunkte der Oeffnung abgemessen, mindestens um den $1\frac{1}{2}$ fachen Durchmesser derselben entfernt sind. Alle diese Bestimmungen können jedoch nur dann gelten, wenn die Länge und Form des Gefässes nicht derart beschaffen ist, dass der Abscheerungs-Widerstand an den Wandungen mit in Betracht kommt. Die Versuche, welche bisher angestellt sind, um dies Verhältniss durch Coefficienten festzustellen, können daher nur für die besondern Gefässformen genau gelten, welche dabei benutzt wurden. Da nach dem Frühern die Gefässform und Grösse beim Ausflusse durch ausgerundete Mundstücke keine Aenderung der Ausfluss-Coefficienten herbeizuführen vermag, so haben wir es hier also nur mit Oeffnungen in der dünnen Wand zu thun.

Ohne Berücksichtigung des Abscheerungs-Widerstandes lässt sich der Einfluss der Nähe der Gefäss-Wandungen mit Hülfe der Tabelle § 53 fast in allen vorkommenden Fällen sehr leicht und hinreichend genau für die Praxis berechnen. Stellt nämlich Figur 95 im Grundrisse

Fig. 95.



einen mit der Wandfläche, in der sich die Oeffnung a befindet, parallelen Schnitt dar und BB_1B_2 also den Schnitt durch die nahe tretende Umwandung des Gefässes, so denke man sich letztern zu einem Kreise B_1b_1b um die Oeffnung ergänzt. Man wird dann jedesmal im Grund-

risse ein gewisses Querschnitts-Verhältniss $\frac{a}{A}$ in Uebereinstimmung mit der gedachten Coefficienten-Tabelle construiren können, von dem jedoch nur ein Bruchtheil, den wir mit n bezeichnen wollen, als geschlossen, der Rest als offen zu betrachten ist. In unserm Falle würde also $n = 0,75$ sein. Man findet nun den passenden Ausfluss-Coefficienten, wenn man, anstatt solchen in Columne I für den Werth $\frac{a}{A}$ zu suchen, denselben

für den Werth $n \cdot \frac{a}{A}$ daselbst aufsucht. Tritt die Gefässwand dicht an die Oeffnung heran, so wird $\frac{a}{A} = 1$ und man setzt den gefundenen

Werth von n anstatt des Querschnittsbruches $\frac{a}{A}$ ein. Für kreisrunde Oeffnungen nach Figur 96, welche nur von einer graden Wand tangirt

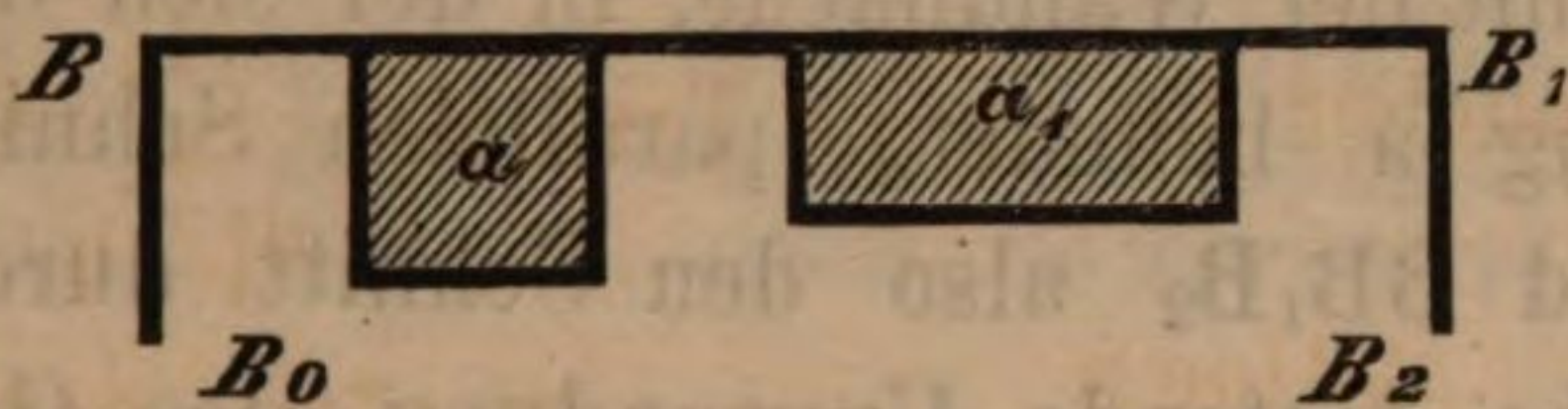
Fig. 96.



werden, wird der Bruch n mit mathematischer Strenge zwar $= 0$. Die Betrachtung der Normalform der Zuströmungs-Bewegung zeigt jedoch, dass derselbe auch in diesem Falle noch einen kleinen Werth von etwa 0,15 behält, welcher eine Einwirkung auf den Ausfluss übt. Dem vorliegenden Falle würde also, da $\frac{a}{A} = 1$ ist, in der Tabelle für $n \cdot \frac{a}{A} = 0,15$ der Ausfluss-Coefficient 0,620 entsprechen. Ist ferner das Querschnitts-Verhältniss zwischen Oeffnung und Gefäss $\frac{a}{A}$ und fällt ein Bruchtheil n des Oeffnungs-Umfanges mit dem Gefäss-Umfange zusammen, ist also die Oeffnung nicht in der Mitte der Gefässwand, sondern an einer Seite angebracht, so findet man den zugehörigen Ausfluss-Coefficienten, wenn man denselben nicht für den Werth $\frac{a}{A}$ sondern den Werth $\frac{a}{A} + \left(1 - \frac{a}{A}\right)n$ sucht. Eine Anzahl Beispiel-Rechnungen wird am besten zur weiteren Erläuterung dienen.

Aufgabe 1. In dem Boden eines Gerinnes $B_0BB_1B_2$ Figur 97

Fig. 97.



liegen an der Vorderwand BB_1 die beiden Schützöffnungen a und a_1 . Die Oeffnung a soll quadratisch, die a_1 oblong und zwar von 0,5 und 2 Fuss Seite sein. Es sollen die Ausfluss-Coefficienten für diese beiden Oeffnungen berechnet werden.

Auflösung. Für die Oeffnung a ist $n \frac{a}{A} = 0,25$, für die a_1 ist $n \frac{a}{A} = \frac{2}{2 \cdot (2 + 0,5)} = 0,33$. Diesen Werthen entsprechen in der Tabelle die Ausfluss-Coefficienten $(\varrho\beta) = 0,630$ und $(\varrho\beta) = 0,642$.

Aufgabe 2. Die Oeffnung a_1 Figur 97 liege mit ihrer Langseite nicht unmittelbar an der Wand des Gerinnes, sondern 1 Zoll davon entfernt. Wie gross berechnet sich der Ausfluss-Coefficient nunmehr?

Auflösung. Ein Gefäss-Querschnitt, welcher rund um die Oeffnung 1 Zoll weiter ist, berechnet sich auf $8 \cdot 26 = 208$ □Zoll. Der Oeffnungs-Querschnitt beträgt dagegen $6 \cdot 24 = 144$ □Zoll. Hieraus findet sich $\frac{a}{A} = \frac{144}{208} = 0,69$ und da $n = 0,33$ war, also $n \frac{a}{A} = 0,69 \cdot 0,33 = 0,23$. Dem entspricht der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta) = 0,626$.

Aufgabe 3. Die Oeffnung in Figur 95 sei 6 Zoll weit, der Ring, welchen die Gefäss-Wandung darum bildet, sei mit $4\frac{1}{2}$ Zoll Halbmesser beschrieben und zu $\frac{3}{4}$ des Umfanges geschlossen. Die Weite bb_1

betrage 0,58 Fuss. Die Druckhöhe im Gefäss sei gleich hoch mit der vertikalen Wandung BB_1B_2 und zwar 8 Fuss. Der Ausfluss-Coefficient soll ermittelt werden.

Auflösung. Es berechnet sich für den vorliegenden Fall $\frac{a}{A}$ auf $\frac{6^2}{9^2} = \frac{36}{81} = 0,44$ und n auf 0,75, also $n \frac{a}{A}$ auf $0,44 \cdot 0,75 = 0,33$. Hierfür findet man in der Tabelle $(\varrho\beta) = 0,642$, ferner $\beta = 0,723$ und $\varrho = 0,887$. Nun wird aber hier voraussichtlich noch ein merklicher Abscheerungs-Widerstand an den Gefäss-Wandungen in Betracht und daher zu annähernder Berechnung kommen müssen. Denken wir uns denselben in einem Trichter wirksam, dessen Einmündung $= bb_1 = 0,58$ weit bei 8 Fuss Höhe ist. Seine Länge wird der Entfernung des Schwerpunktes dieser Mündungsfläche von der Mitte der Oeffnung, also $= 4$ Fuss, zu nehmen sein. An der Ausmündung hat dieser Trichter als Bodenfläche einen Kreis von 9 Zoll Durchmesser und als Oeffnung darin einen solchen von 6 Zoll Durchmesser. Der Querschnitt der Bodenfläche berechnet sich demgemäss auf $64 \square\text{Zoll}$, der der grösseren Einmündungsfläche auf $7 \cdot 8 \cdot 12 = 672 \square\text{Zoll}$, also das Querschnitts-Verhältniss $\frac{A}{a}$ auf 10,5 und das Weiten-Verhältniss $\frac{D}{d} = n$ auf $\sqrt{10,5} = 3,25$.

Da $h = 8$ Fuss war, so wird also zunächst für diesen Trichter $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = \frac{4}{\frac{3}{4} \cdot 2} = 2,67$. Nach dem Verhältnisse $\frac{2,3 \log n}{n-1}$ gemäss Tabelle § 75 reducirt, wird hieraus $2,67 \cdot 0,52 = 1,36$. Eine weitere Reduktion tritt nach § 38 durch das Durchmesser-Verhältniss der Oeffnung zum Trichterboden $\frac{d^3}{D^3} = \frac{6^3}{9^3} = 0,3$ ein, welche schliesslich den hier in Betracht

kommenden Werth von $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 1,36 \cdot 0,3 = 0,41$ liefert. Nun hatte

sich $\varrho = 0,887$ ergeben, wofür man in der Widerstands-Tabelle $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} =$

1,76 findet. Mit Hinzurechnung von 0,41 findet sich für 2,17 in der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,874$ und da $\beta 0,723$ war, nunmehr $(\varrho\beta)$ der wirkliche Ausfluss-Coefficient $0,874 \cdot 0,723 = 0,632$, mithin um 0,01 kleiner, als ohne Berücksichtigung des Widerstandes an den einschliessenden Wandungen.

Nach einer Reduktions-Formel, welche Weisbach für die vorliegenden Verhältnisse aufgestellt hat, berechnet sich zwar $(\varrho\beta)$ für Aufgabe 1a auf 0,639 und 1b auf 0,646. Diese Formel giebt aber für

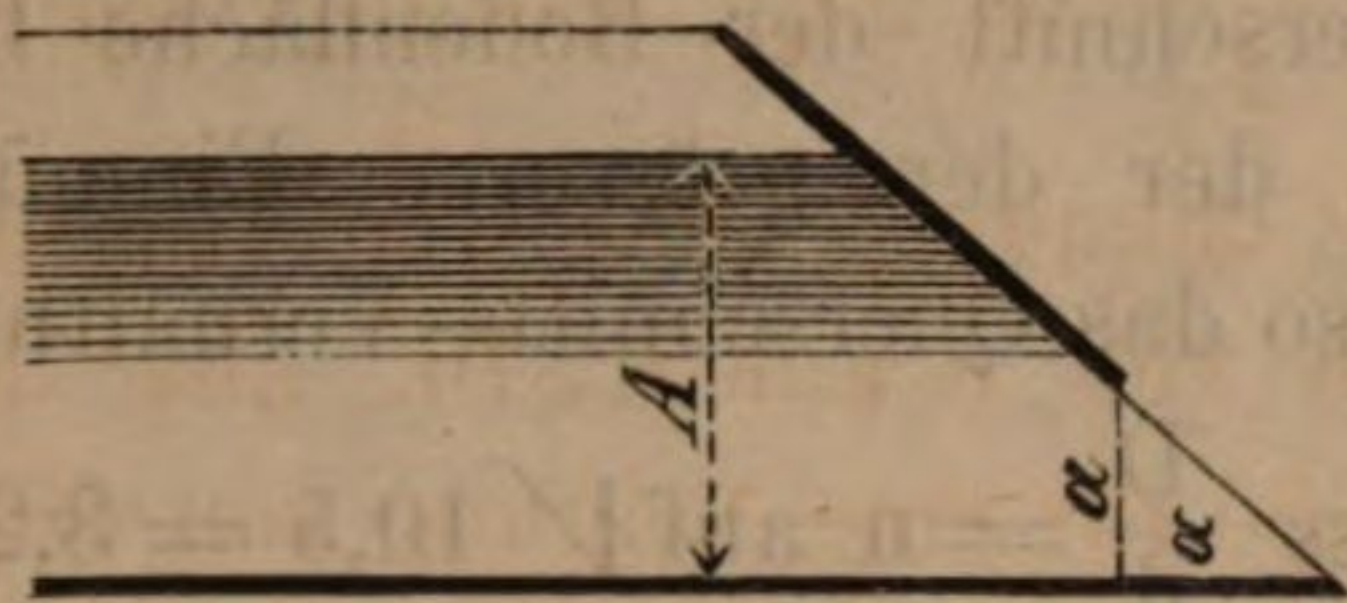
eine von allen 4 Seiten eingeschlossene Oeffnung, also ein vollständiges Rohr ($\varrho\beta$), nur 0,710, etwa 0,25 zu wenig und muss daher um so unrichtigere Resultate liefern, je grösser das Verhältniss n des eingefassten Theiles zum ganzen Umfange der Oeffnung ist.

§ 81.

Schützöffnungen in geneigten Wänden.

Bei Wassertriebwerken kommt es vor, dass am Ende von Zufluss-Gerinnen oder sogenannten Fluthkasten, welche von senkrechten und parallelen Wänden auf horizontalem Boden gebildet werden, Schützöffnungen von der ganzen Breite des Gerinnes angebracht sind, die den Wasserrädern das Aufschlagwasser zuführen. Die Kopfwand, in der solche Schützöffnungen angebracht sind, kann eben sowohl senkrecht,

Fig. 98.



als nach Figur 98 unter einem gewissen Winkel α gegen die Bodenwand geneigt sein. Die Druckhöhen werden dabei meist in solcher Nähe bei A gemessen, wo sich keine sichtbare Einsenkung des Wasserspiegels mehr zeigt, so dass diejenige Druckhöhe, welche zur Erzeugung der Zufluss-Geschwindigkeit und Ueberwindung der

Widerstände im Gerinne erforderlich ist, ausser Betracht bleibt, oder besonders berechnet wird. Auch hierfür lassen sich die Ausfluss-Coefficienten, durch eine combinirte Anwendung der Tabellen in § 75 und § 53 ziemlich genau ermitteln. Nach dem Früheren ist leicht zu übersehen, dass es nur darauf ankommen kann, für jeden speciellen Fall, den Winkel der mittlern Richtung der Druckkraft, also auch der durchfliessenden Wasserfäden zur Ebene des engsten Oeffnungs-Querschnittes, in welchem man die Oeffnungsweiten messen muss, zu bestimmen. Der Cosinus dieses Winkels macht den Werth von β dem theoretischen Contraktions-Coefficienten und für diesen ergiebt die zuletzt gedachte Tabelle die entsprechenden Werthe der Widerstands- und Ausfluss-Coefficienten. Auch hier möge die Lösung verschiedener Aufgaben zur Erläuterung dienen.

Aufgabe 1. Das Gerinne sei 4 Fuss im Lichten weit, die Schütz wand vertikal, also Winkel $\alpha = 90^\circ$, das Schütz sei 6 Zoll hoch aufgezogen und so geformt, dass das Wasser nur die innere Unterkante desselben berührt. Es soll der Ausfluss-Coefficient bestimmt werden.

Auflösung. Zu diesem Falle findet sich nach § 80 $n \frac{a}{A} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 4}{2(4 + \frac{1}{2})} = 0,55$ und dafür aus der zugehörigen Tabelle § 53 $\beta = 0,758$ und $(\varrho\beta) = 0,701$.

Aufgabe 2. Bei der vorigen Aufgabe im Uebrigen gleichen Verhältnissen, sei die Schützwand unter dem Winkel $\alpha = 63\frac{1}{2}^\circ$ oder unter $\alpha = 45^\circ$ gegen die Bodenwand geneigt. Wie gross berechnet sich der Ausfluss-Coefficient für diese Neigungs-Winkel?

Auflösung. Da die äussersten Wasserfäden längs dem Boden normal gegen die Oeffnung durchgehen, also ihr Neigungswinkel gegen die Axe des Ausflusses $= 0$ ist, der äusserste Wasserfaden längs der Schützwand aber unter dem Winkel von $63\frac{1}{2}^\circ$ dagegen anströmt, müsste der mittlere Neigungs-Winkel $\frac{1}{2} \cdot 63\frac{1}{2}^\circ = 31\frac{3}{4}^\circ$ betragen, wenn es richtig wäre, dass derselbe bei senkrechter Stellung der Schützwand 45° betrug, also $\beta = 0,707$ war. Nun ergab sich aber für den letztern Fall nach Aufgabe 1 $= \beta$ nicht $0,707$, sondern $\beta = 0,758$ und diesem Werthe entspricht nach Tabelle § 75 ein Convergenz-Winkel von 164° , also ein mittlerer Neigungs-Winkel von $\frac{164}{4} = 41^\circ$, mithin um 4° kleiner, als er vorausgesetzt war. Unser Neigungs-Winkel berechnet sich also nicht auf $\frac{63\frac{1}{2}}{2}$, sondern genau auf $\frac{63\frac{1}{2}-4}{2} = 29\frac{3}{4}^\circ$. $\cos 29\frac{3}{4}^\circ$ ergibt

die Tabelle dem Convergenz-Winkel 119° entsprechend durch Interpolation auf $0,868$, den zugehörigen Werth von q auf $0,870$, also den gesuchten Ausfluss-Coefficienten $(q\beta) = 0,755$ für eine Neigung von $63\frac{1}{2}^\circ$.

Bei 45° Neigung der Schützwand findet sich der gesuchte mittlere Neigungs-Winkel $\frac{45-4}{2} = 20\frac{1}{2}^\circ$ und dafür bei 86° Convergenz $\beta = 0,930$ und $(q\beta) = 0,810$.

Poncelet fand durch Versuche für den ersten Fall $(q\beta) = 0,750$ und den zweiten $(q\beta) = 0,800$. Hierbei hatte er jedoch die Druckhöhe nicht unmittelbar an der Schützöffnung gemessen und den Widerstand im Gerinne nicht berücksichtigt. Damit übereinstimmend fand er auch q_1 nur $0,927$, woraus sich nach § 50 Gleichung 1)

$$q_1 = 0,647 + \frac{1}{8}q$$

q auf nur $0,84$ ergibt, während der Widerstands-Coefficient ohne Berücksichtigung des Gerinnes, wie beim Ausfluss aus dünner Wand, $0,87$ beträgt. Der Differenz entspricht in der Widerstands-Tabelle ein Werth

von $\frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{h}} = 1,30$ für pr. Fussmaass, welcher also diesen Widerstand

repräsentiren würde.

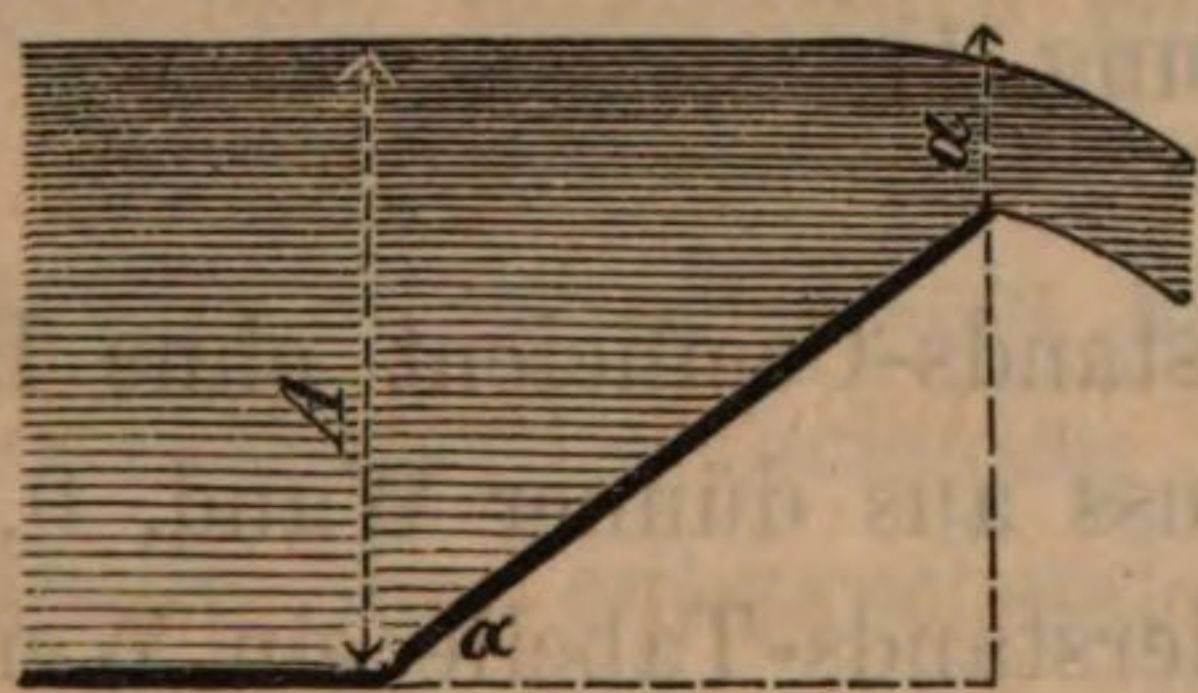
Die in Aufgabe 2 berechneten Coefficienten gelten folglich genau nur für den Fall, dass die Druckhöhe unmittelbar über der Schützöffnung gemessen ist. Im andern Falle muss nach Anleitung des Abschnitts VI für die jedesmal gegebenen Verhältnisse der Widerstands-Werth des Gerinnes von dem Punkte ab, an welchem die Druckhöhen gemessen worden, besonders berechnet und dem für den Ausfluss zuge-

setzt werden. Dann muss aber auch die der Anfangs-Geschwindigkeit des Wassers an diesem Punkte entsprechende Fallhöhe der Druckhöhe zugerechnet werden. Bei den in der Praxis vorkommenden Fällen genügt es indessen wohl, wenn man den Widerstands-Coefficienten aus der Tabelle § 75 entnimmt, indem die Widerstands-Verhältnisse hier auch ziemlich dieselben, wie beim Ausflusse durch conisch convergente Ansatzröhren sind und eine Compensation des mit dem theoretischen Coefficienten β abnehmenden innern Widerstandes mit dem in Folge grösserer Annäherung der Wandungen zunehmenden äussern Widerstande eintritt, so dass der Widerstands-Coefficient zwischen 60° und 180° Convergenz constant 0,87 bleibt. Wollte man in jedem einzelnen Falle ϱ genau berechnen, so müsste man den Abscheerungs-Widerstand des Trichters vor der Schützöffnung in Zahlen ermitteln, ihm den dem Werthe von ϱ aus Tabelle § 53 entsprechenden zusetzen, und für die Summe den Coefficienten ϱ aus der Widerstands-Tabelle entnehmen.

Beispielsweise berechnet sich auf dem letztern Wege für die Neigung der Schützwand um 45° bei 4 Fuss Wasserstand im Gerinne $\frac{1}{s} \sqrt{h}$ auf $2,27 + 0,05 = 2,32$ und für 3 Fuss Wasserstand auf $2,15 + 0,05 = 2,20$. Dafür findet man die Werthe von $\varrho = 0,870$ resp. $0,873$, also in sehr geringer Abweichung von den dafür aus Tabelle § 75 entnommenen.

Aufgabe 3. Bei denselben Maassen, wie Aufgabe 1, soll der Ausfluss-Coefficient nicht für eine Schützöffnung am Boden, sondern nach Figur 99 für einen offenen Ueberfall über eine Kopfwand, welche gegen

Fig. 99.



die Horizontale unter den Winkeln $\alpha = 63\frac{1}{2}^\circ$ resp. 45° geneigt ist, gefunden werden. Die Ueberfallhöhe soll bei $A = H$ gemessen und das Querschnitts-Verhältniss $\frac{a}{A}$ kleiner als $\frac{1}{10}$ sein, so dass die Zufluss-Geschwindigkeit im Gerinne ausser Betracht bleibt.

Auflösung. Für offene Ueberfälle in dünner Wand von der etwa 7fachen Breite der Ueberfallhöhe giebt § 57 $(\varrho\beta) = 0,551$, wenn man als wirksame Druckhöhe $\frac{H}{2}$ die halbe Entfernung des ruhigen Wasserspiegels bei A über der Ueberfallkante in Rechnung stellt. Der Widerstands-Coefficient ϱ folgt daraus $\frac{(\varrho\beta)}{\beta} = \frac{0,551}{0,707} = 0,780$. Es lässt sich übersehen, dass das Zunahme-Verhältniss des theoretischen Coefficienten hier ganz dasselbe, wie in Aufgabe 2 gefunden, sein wird. Auch hier

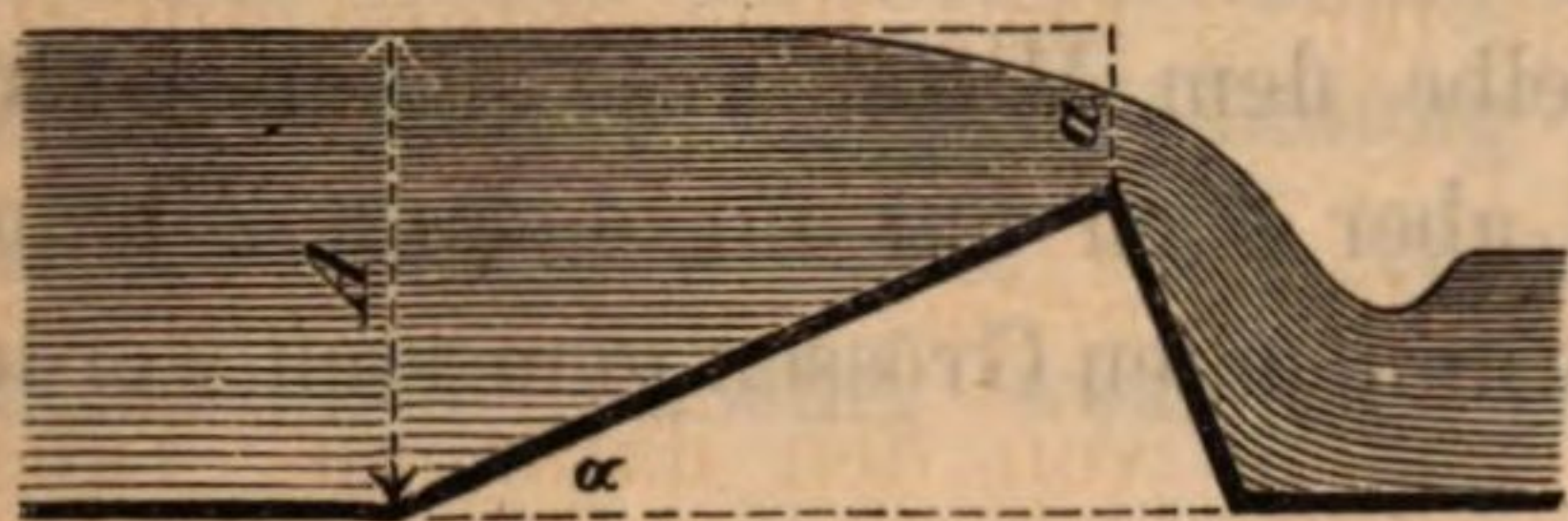
muss sich mithin für $63\frac{1}{2}^\circ$ Neigung $\beta = 0,868$ und für 45° $\beta = 0,930$ finden. Da ϱ aber hier $0,780$, so wird für $63\frac{1}{2}^\circ$ $(\varrho\beta) = 0,868 \cdot 0,780 = 0,677$ und für 45° $(\varrho\beta) = 0,930 \cdot 0,780 = 0,725$.

Weisbach fand durch Versuche, wobei die Druckhöhen indessen ebenfalls in einer etwas grösseren Entfernung von der Oeffnung gemessen waren, für den ersten Fall $0,670$, für den zweiten $0,700$.

Der in Aufgabe 1 bis 3 befolgte Lösungsgang gilt selbstredend nur so lange als der richtige, wie nicht das Verhältniss $\frac{a}{A}$ so gross ist, dass die dafür in Tabelle § 53 resultirenden Werthe von $(\varrho\beta)$ grösser als die auf ersterem Wege gefundenen werden. In solchem Falle gelten die grösseren Coefficienten dieser Tabelle. Dann muss aber auch der Widerstand im ganzen Zuflussgerinne in Rechnung gebracht und zugesetzt, die Druckhöhen aber müssen am Anfange des Gerinnes im stillstehenden Wasserspiegel des Sammel-Reservoirs gemessen werden.

Aufgabe 4. Der Ausfluss-Coefficient für ein vollkommenes Stauwehr, Figur 100, dessen Unterwasserspiegel also tiefer als die Wehrkrone liegt, in einem Kanale von einer Breite gleich der Länge des Wehres, soll ermittelt werden. Der Winkel α , unter dem der Anschussboden ansteigt, soll 30° betragen. Die Druckhöhe soll

Fig. 100.



wieder in A gemessen und das Querschnitts-Verhältniss $\frac{a}{A}$ wiederum $< \frac{1}{10}$, also die Zufluss-Geschwindigkeit in A verschwindend klein sein.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, dass auch die Ueberfallhöhe zur Breite des Kanales verschwindend klein sei, wird hier $n \cdot \frac{a}{A}$ also $0,50$ und demgemäss β aus Tabelle § 53 $= 0,748$. Dafür findet man in Tabelle § 75 $\alpha = 165^\circ$ und $\frac{\alpha}{4} = 41\frac{1}{4}^\circ$, also die mittlere Richtung bei $\alpha = 90$ um $3\frac{3}{4}^\circ$ günstiger wie 45° . Es wird also hier der mittlere Richtungswinkel $\frac{30 - 3\frac{3}{4}}{2} = 13^\circ$, dessen Cosinus β sich in derselben Tabelle $= 0,974$ findet. Nehmen wir auch hier $\varrho = 0,780$, so wird $(\varrho\beta)$ auf $\frac{H}{2}$ als Druckhöhe bezogen $= 0,760$ und auf H die Ueberfallhöhe bezogen $0,760 \cdot 0,707 = 0,537$.

Bei 24° Neigung ergibt sich nach derselben Rechnungsweise $(\varrho\beta) = 0,541$.

Weisbach fand für solche Stauwehre $(\varrho\beta) = 0,533$, Redtenbacher $0,570$, der Verfasser bei einem Ueberfallwehre von 13 Fuss

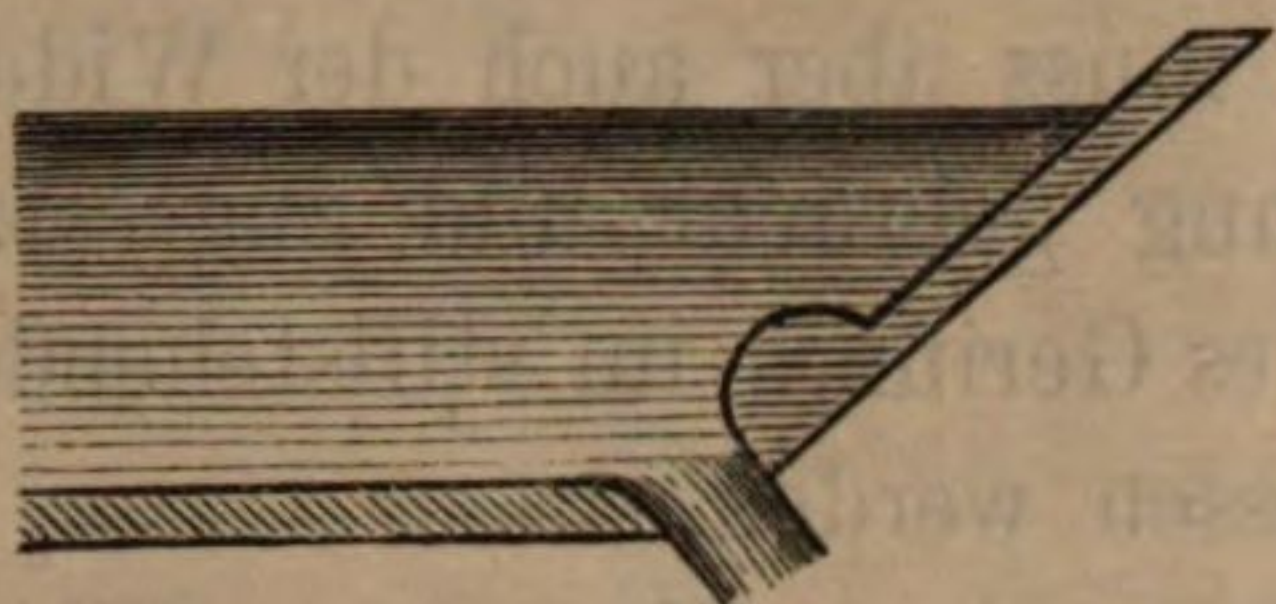
Breite und $4\frac{1}{2}$ Zoll Ueberfallhöhe 0,540. Für α verschwindend klein wird, wie leicht zu übersehen, $\beta = 1$ und $q\beta = 0,707 \cdot 0,78 = 0,551$ als Maximum, sofern ein ausserordentlicher Widerstand im Zuflussgerinne nicht einen kleinern Werth bedingt.

§ 82.

Schützöffnungen mit ausgerundeten Mündungen.

Wenn Schützöffnungen nach Figur 101 im Längenprofile des Wasser-

Fig. 101.



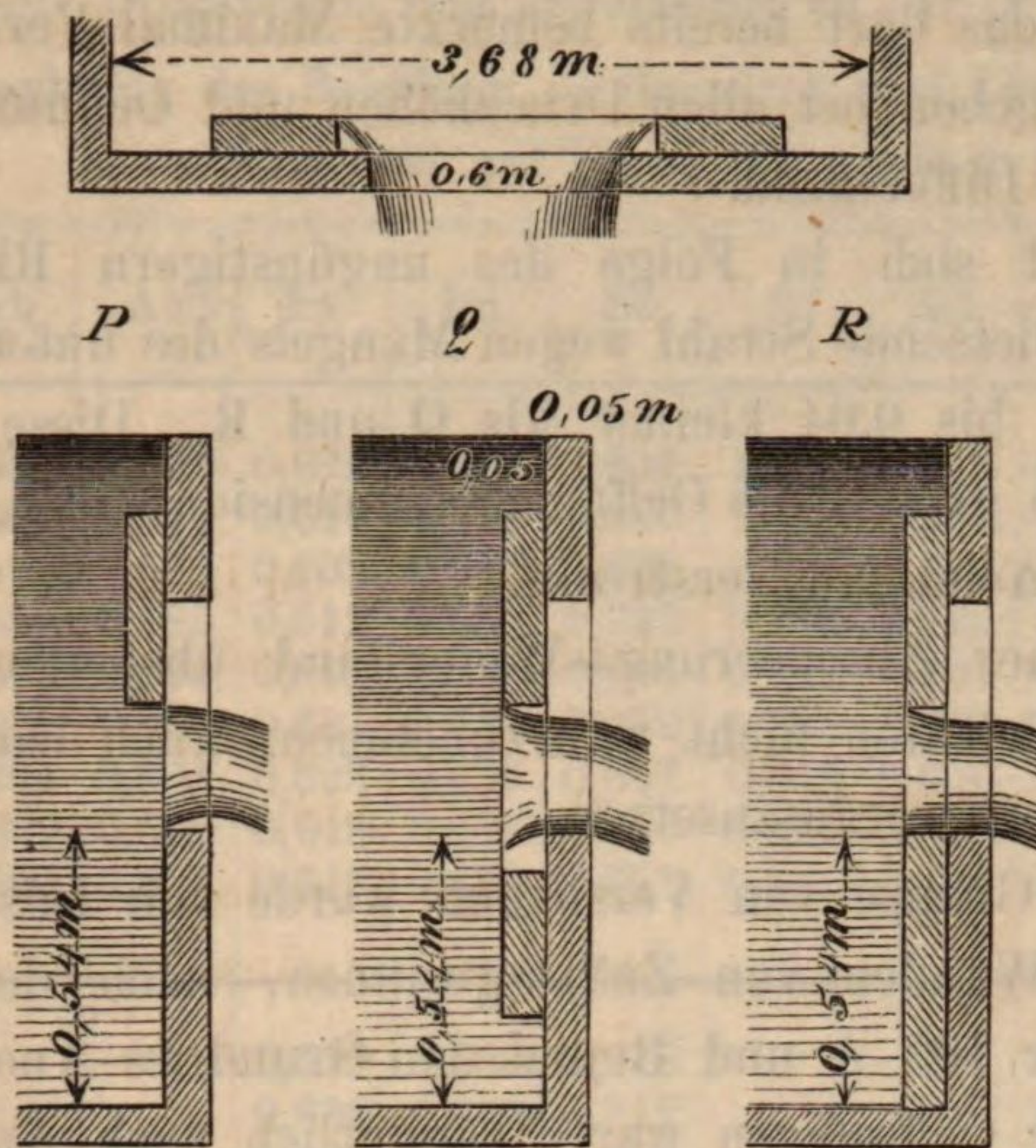
laufes mundstückartig ausgerundet sind (Freiberger Spannschütze), so bestimmen sich die Ausfluss-Coefficienten lediglich nach den § 66 dafür entwickelten Gesetzen und den Zufluss-Widerständen in dem Gerinne. Sie können daher sehr verschieden ausfallen und zwischen 0,62 und 0,96 variiren, je nachdem sich die Form mehr der Figur 85 oder 83 nähert. Wenn daher für eine solche Schützöffnung der Ausfluss-Coefficient 0,77 gefunden worden, so kommt derselbe dem Mittel aus obigen Grenzwerten zwar ziemlich nahe, kann aber eben nur für den ganz besondern Fall gelten, bei dem die ihn bestimmenden Grössen gemessen worden.

§ 83.

Oeffnungen in scharfkantigen Wänden von bestimmter Dicke.

Schützöffnungen in scharfkantig ausgeschnittenen Wänden von 0,05 M. Dicke, wie sie in der Praxis meist vorkommen, geben ziemlich dieselben Ausfluss-Coefficienten, wie solche in dünner Wand, wenn der ausströmende Strahl von den innern Kanten abspringt oder dieselben nicht derart berührt, dass nach § 66 volle Abscheerung an der Wanddicke eintritt. Im letztern Falle werden die Ausfluss-Coefficienten, wie bekannt, mit diesem Theile des Widerstandes von der Druckhöhe abhängig. Aber auch die Stellung der Schützbohle vor der Schützwand kann die Zuströmungs-Verhältnisse zumal bei kleinen Oeffnungen wesentlich modificiren und den mittlern Richtungswinkel der Kraft, somit also den theoretischen Coefficienten ändern. Für fast alle derartige in der Praxis vorkommende Fälle sind von Lesbros sehr genaue und schätzenswerthe Versuche gemacht und deren Resultate übersichtlich in Tabellen zusammengestellt. Die erste Gruppe dieser Versuche galt einer Schütz-Einrichtung, welche nach Figur 102 im Horizontal-Schnitt constant blieb und nach P, Q und R im Vertikal-Längenschnitte variirte.

Fig. 102.



Die Breite der Schützöffnung betrug 0,6 M. Die Druckhöhen wurden unmittelbar an der Mündung gemessen und verschieden von 0,10 bis 3,00 M. genommen. Die erhaltenen Ausfluss-Coefficienten ergibt nachstehende Tabelle, wenn den gemessenen Druckhöhen auch hier die Constante $\frac{s}{\gamma}$ zugesetzt wird.

Druck- höhe über der obern Kante der Mündung in Metern.	Die Höhe der Mündung betrug mit Bezug auf Figur 102 P, Q und R. Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Oeffnung gemessen.											
	0,40 M.			0,20 M.			0,05 M.			0,03 M.		
	P	Q	R	P	Q	R	P	Q	R	P	Q	R
0,10	0,594	0,640	0,644	0,627	0,658	0,662	0,681	0,654	0,656	0,699	0,683	0,685
0,20	0,605	0,649	0,653	0,635	0,667	0,670	0,678	0,680	0,681	0,689	0,697	0,699
0,30	0,613	0,653	0,657	0,638	0,672	0,676	0,679	0,689	0,691	0,688	0,705	0,707
0,60	0,616	0,647	0,651	0,638	0,674	0,677	0,676	0,693	0,695	0,686	0,708	0,710
1,00	0,607	0,631	0,633	0,637	0,673	0,675	0,672	0,693	0,694	0,689	0,703	0,704
1,30	0,602	0,624	0,626	0,637	0,673	0,675	0,672	0,693	0,694	0,678	0,701	0,702
1,70	0,596	0,618	0,620	0,637	0,672	0,673	0,672	0,692	0,693	0,676	0,698	0,698
3,00	0,592	0,611	0,612	0,634	0,669	0,670	0,669	0,689	0,690	0,672	0,693	0,693

Im Allgemeinen giebt diese Tabelle zu nachfolgenden Bemerkungen Veranlassung.

Sämmtliche Coefficienten sind zwischen 0,03 und 0,08 grösser, wie sie sich nach § 56 für Oeffnungen derselben Höhe in dünner Wand ergeben haben, weil dort die Druckhöhen in gehöriger Entfernung von

der Oeffnung gemessen, also auch grösser in Rechnung gebracht werden, und zeigen das dort bereits bemerkte Maximal-Verhältniss.

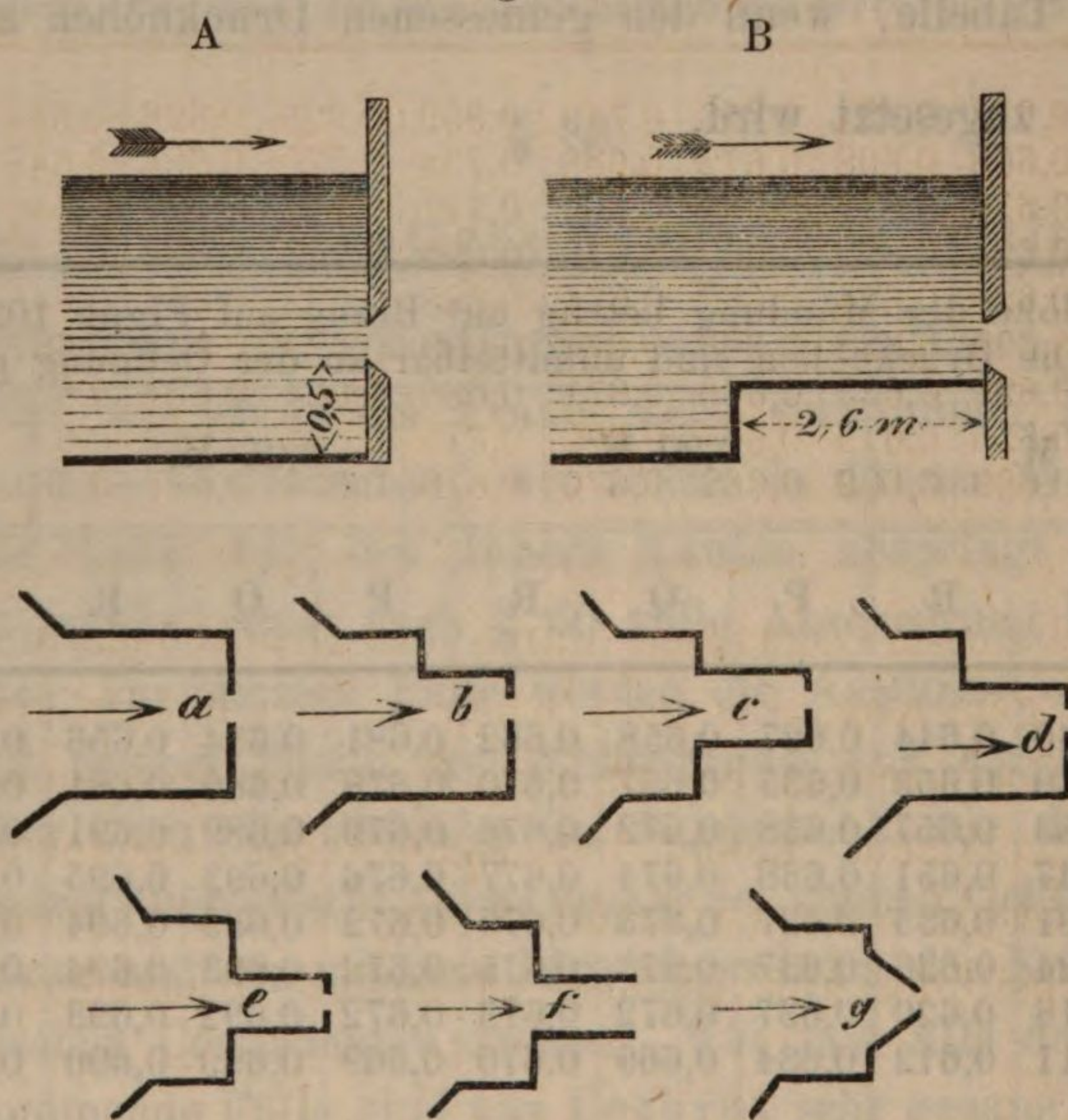
R und Q ergeben bei allen Druckhöhen und Oeffnungsweiten kaum bemerkenswerthe Differenzen.

Nur P zeigt sich in Folge des ungünstigern Richtungswinkels, welchen der ausfliessende Strahl wegen Mangels des untern Schutzbrettes erhält, um 0,01 bis 0,04 kleiner als Q und R. Diese Differenz wird um so grösser, je grösser die Oeffnungs-Dimension wird, auf welche sich diese Richtungs-Aenderung erstreckt.

Ein wirklicher Abscheerungs-Widerstand über den Bohlenkanten ist aus den Coefficienten nicht wahrzunehmen, auch nach den Längenprofilen PQR kaum vorauszusetzen.

Eine zweite Gruppe von Versuchen wurde von Lesbros mit Oeffnungen in den Wänden von Zuflussgerinnen, nach der Längenprofil-Anordnung Figur 103 A und B und den Grundriss-Anordnungen a bis g angestellt. Die Oeffnungen waren sämmtlich nach Aussen scharf gekantet, so dass der Ausfluss wie durch dünne Wand erfolgte. Auch lagen keine Schutzbretter von Innen vor. Die Breite dieser Oeffnungen betrug constant 0,20 M., deren Höhe variirte zwischen 0,05 und 0,20 M.

Fig. 103.



Die gefundenen Ausfluss-Coefficienten enthält die nachstehende Tabelle, ebenfalls mit Berücksichtigung der Constante $\frac{s}{\gamma} = 0,0037$ M.

Druck- höhe über der obern Kante der Mün- dung in Metern.	Höhe der Mün- dung in Me- tern.	Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Oeffnung gemessen. Die Anordnung des Behälters in Grundriss und Längenprofil war dabei mit Rücksicht auf Figur 103 a bis g, die von											
		Aa	Ab	Ac	Ba	Bd	Be	Bf	Ad	Ae	Af	Bg	Ag
0,005	0,20	0,594	0,592	0,592	0,622	0,696	1,009	1,117	0,613	0,670	0,721	0,684	0,602
0,020		0,595	0,582	0,573	0,611	0,663	0,947	1,055	0,598	0,647	0,685	0,658	0,593
0,050		0,586	0,581	0,579	0,608	0,638	0,837	0,938	0,593	0,633	0,657	0,638	0,592
0,100		0,589	0,588	0,585	0,612	0,631	0,723	0,783	0,595	0,633	0,646	0,637	0,595
0,200		0,595	0,595	0,593	0,618	0,633	0,686	0,706	0,601	0,636	0,641	0,643	0,603
0,500		0,600	0,600	0,602	0,621	0,634	0,672	0,684	0,607	0,630	0,637	0,643	0,608
1,00		0,604	0,604	0,605	0,623	0,636	0,667	0,679	0,610	0,629	0,637	0,642	0,610
2,00		0,601	0,602	0,602	0,619	0,636	0,661	0,669	0,609	0,626	0,636	0,640	0,610
3,00		0,601	0,600	0,602	0,615	0,636	0,658	0,666	0,607	0,623	0,636	0,637	0,608
0,005	0,10	0,614			0,670	0,698	0,918			0,668			
0,020		0,602			0,636	0,660	0,817			0,646			
0,050		0,602			0,634	0,653	0,729			0,640			
0,100		0,606			0,640	0,653	0,698			0,639			
0,200		0,611			0,644	0,654	0,686			0,636			
0,500		0,615			0,646	0,655	0,680			0,631			
1,00		0,614			0,646	0,655	0,674			0,630			
2,00		0,607			0,641	0,652	0,669			0,629			
3,00		0,603			0,636	0,648	0,664			0,625			
0,005	0,05	0,624	0,617	0,724	0,750	0,749	0,899	0,925	0,626	0,656	0,680	0,759	0,623
0,020		0,612	0,608	0,608	0,672	0,688	0,754	0,770	0,624	0,648	0,648	0,700	0,619
0,050		0,620	0,618	0,617	0,662	0,669	0,711	0,721	0,627	0,645	0,640	0,678	0,621
0,100		0,625	0,624	0,622	0,663	0,670	0,695	0,703	0,629	0,646	0,638	0,675	0,624
0,200		0,626	0,628	0,624	0,666	0,674	0,688	0,692	0,629	0,643	0,637	0,673	0,626
0,500		0,626	0,625	0,628	0,666	0,674	0,683	0,687	0,631	0,637	0,638	0,670	0,628
1,00		0,624	0,621	0,625	0,666	0,671	0,680	0,684	0,627	0,634	0,628	0,669	0,626
2,00		0,613	0,615	0,615	0,664	0,670	0,675	0,681	0,617	0,634	0,621	0,669	0,616
3,00		0,606	0,609	0,609	0,662	0,670	0,673	0,679	0,611	0,631	0,616	0,669	0,610

Auch bei diesen Versuchen waren die Druckhöhen unmittelbar an der Mündung gemessen, was man schon an den naturwidrigen Werthen der Ausfluss-Coefficienten bei Be und Bf unter Druckhöhen von 0,005 und 0,020 M. erkennt, indem hier schon eine bedeutende Einsenkung des Wasserspiegels vor der Schützöffnung eintreten musste, also ein erheblicher Theil der auf Ausfluss wirkenden Druckhöhe nicht mitgemessen ist.

Achter Abschnitt.

Ueberfall- und Stauwehre, Bewegung in Gerinnen, Kanälen, Flüssen und Rohrleitungen.

§ 84.

Ueberfälle in Seitenwänden von Gefässen und Gerinnen.

In § 80 bis 81 und § 57 bis 58 ist zwar bereits hinlänglicher Anhalt gegeben, zur Ermittlung der Ausfluss-Coefficienten auch für Ueberfälle in den Seitenwänden von Gefässen der verschiedensten Form und jedem beliebigen Querschnitts-Verhältnisse $\frac{a}{A}$ zwischen Ueberfallöffnung und Zuflussgerinne. Der bessern Controlle halber mögen hier jedoch auch die Versuchs-Resultate von Lesbros für freie Ueberfälle in dünner Wand von 0,2 M. Breite bei 0,01 bis 0,30 M. Druckhöhe und zwar für die Figur 103 in den Längenprofilen A und B und den Grundrissen a bis g dargestellten Zuströmungs-Verhältnisse, tabellarisch geordnet, mitgetheilt werden. Die Druckhöhen H sind dabei in gehöriger Entfernung von der Ueberfallschwelle im stillstehenden Wasser gemessen. Von der Constante $\frac{s}{\gamma}$ ist den gemessenen Druckhöhen, wie § 57, 0,0033 M. zugesetzt.

Tabelle

für die Ausfluss-Coefficienten ($\varrho\beta$) bei Ueberfällen von der Breite $b = 0,02$ M. in dünner Wand.

$v = (\varrho\beta) \sqrt{2gH}$ und $Q = (\varrho\beta) bH \sqrt{2gH}$.

Druckhöhe H über der Basis der Abfluss- kante. Meter.	Behälter und Ueberfall entsprechen im Aufrisse und Grundrisse Figur 103.									
	Aa	Ab	Ac	Ba	Bd	Be	Ad	Ae	Af	Ag
0,01	0,367	0,372	0,377	0,338	0,319	0,257	0,395	0,395	0,425	0,385
0,02	0,386	0,392	0,395	0,376	0,354	0,297	0,410	0,410	0,437	0,404
0,03	0,390	0,396	0,400	0,392	0,371	0,322	0,414	0,412	0,435	0,407
0,04	0,391	0,397	0,400	0,397	0,381	0,340	0,413	0,412	0,431	0,407
0,06	0,390	0,394	0,396	0,400	0,391	0,361	0,409	0,413	0,425	0,405
0,08	0,389	0,393	0,394	0,402	0,396	0,372	0,405	0,413	0,426	0,401
0,10	0,389	0,392	0,393	0,402	0,399	0,376	0,403	0,414	0,428	0,399
0,15	0,388	0,390	0,390	0,403	0,403	0,380	0,401	0,416	0,429	0,398
0,20	0,386	0,387	0,387	0,402	0,405	0,380	0,398	0,420	0,428	0,399
0,25	0,376	0,380	0,380	0,402	0,405	0,379	0,393	0,419	0,425	0,398
0,30	0,369	0,373	0,373	0,401	0,404	0,376	0,388	0,416	0,422	0,396

Bei Ueberfallwehren in Wänden von bestimmter Dicke, tritt einerseits, wie bei allen eingefassten Oeffnungen, eine Milderung der Contraktion ein, welche den theoretischen Coefficienten β vergrössert, andererseits verkleinert der hinzutretende Abscheerungs-Widerstand an den benetzten Wandungen der Oeffnung die Widerstands-Coefficienten ϱ . Durch diesen Umstand werden die letzteren von der Druckhöhe abhängig, indem die Zunahme des Faktors $\sqrt[3]{h}$ sowohl wie die Abnahme des Quotienten $\frac{p}{a}$ (Umfang dividirt durch Querschnitt) die Werthe von $\frac{\mu p l}{a \sqrt[3]{h}}$ verkleinert. Sehr deutlich wird dies aus der nachstehenden Versuchstabelle von Lesbros mit einer Oeffnung von 0,6 M. Breite in einem Kanale von 3,68 M. Breite, deren Ueberfallkante 0,54 M. vom Boden entfernt war, bemerklich, wenn man deren Ausfluss-Coefficienten mit denen bei Aa der vorigen Tabelle vergleicht. Die Dicke der Bohlenwand, welche von dem ausfliessenden Strahle berührt wurde, betrug 0,05 M. Von 0,01 bis 0,30 M. ergiebt sich eine ganz stetige Zunahme der Ausfluss-Coefficienten um 0,00 bis 0,02. Die Druckhöhen sind auch hier im stillstehenden Wasser gemessen.

H in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,50	0,80	1,00
($\varrho\beta$)	0,367	0,389	0,396	0,398	0,400	0,400	0,399	0,396	0,392	0,389	0,389	0,390	0,389	0,388

Schon früher ist darauf hingewiesen worden, dass die Einsenkung, welche der Wasserspiegel über der Abflusskante erleidet, eine Funktion der Form des Zuflussgerinnes und der Geschwindigkeit des vor dem Ueberfalle anlangenden Wassers ist. Dieselbe lässt sich nur für jeden besondern Fall, unter der Voraussetzung, dass die Zuströmungs-Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sei, berechnen, wie § 49 die Form des contrahirten Strahles aus runden Oeffnungen in dünner Wand mit der Beobachtung übereinstimmend hergeleitet worden. Für die Praxis lässt sich von derartigen Untersuchungen indessen schwerlich ein Nutzen erwarten, weil sich wohl in allen Fällen Gelegenheit findet, die Druckhöhen entweder im stillstehenden Wasserspiegel, oder in Gerinnen da zu messen, wo die Bewegung aus einer gleichförmigen in eine beschleunigte überzugehen beginnt. Der Uebergang markirt sich zumal bei hellem Wetter ziemlich genau durch die Schatten-Veränderung und den Reflexwechsel an der Oberfläche des Wassers. In jedem Falle kann nur die consequente Durchführung einer derartigen Bestimmung der Druckhöhen

zu korrekten Rechnungs-Resultaten und zum Auseinanderhalten der veränderlichen Widerstandsgrössen in den Zu- und Abflussgerinnen von den constanten des Ausflusses führen.

§ 85.

Vollkommene Stauwehre.

Am wichtigsten für die Praxis ist eine genaue Bestimmung der Ausfluss-Coefficienten für Ueberfälle und Stauwehre, welche am Ende natürlicher oder künstlicher Gerinne angebracht sind und entweder die ganze Breite derselben einnehmen, oder denen das Wasser bei mässiger Convergenz der Gerinne-Wände ohne Seitencontraktion zugeführt wird, indem sich solche vorzugsweise zur Messung von Wassermengen benutzen lassen. Bei solchen Ueberfällen ist es möglich, durch genaue Messung der Querprofile an jedem beliebigen Punkte das Verhältniss der daselbst statthabenden Zufluss-Geschwindigkeit v_0 zu der Ueberfall-Geschwindigkeit v zu bestimmen und es bleibt daher ganz gleichgültig, in welcher Entfernung von letzterer man die Druckhöhe $\frac{H}{2}$ misst, wenn

man derselben die Höhe der Zufluss-Geschwindigkeit $\frac{v_0^2}{2g}$, in dieser Entfernung gemessen, zusetzt und auch den Widerstand im Gerinne genau von dem Punkte ab in Rechnung bringt, an dem man H gemessen hat. Die auf den Ueberfall des Wassers in diesem Falle wirksame Druckhöhe beträgt sonach $\frac{H}{2} + \frac{v_0^2}{2g}$ und man erhält anstatt Gleichung 1) und 2)

§ 57 nunmehr

$$1) v = (q\beta) \sqrt{2gH + 2v_0^2}$$

$$2) Q = (q\beta) bH \cdot \sqrt{2gH + 2v_0^2}.$$

Während β beim vollen Ausflusse unter einer mittlern Druckhöhe h oder h_m in den Grenzen 0,707 bis 1,00 liegt, kann sein Werth hier selbstverständlich nur von 0,500 bis 0,707 wachsen, weil eben der Werth unter dem Wurzelzeichen um den Faktor 2 grösser als die wirkliche Druckhöhe in Rechnung gebracht worden.

Setzt man in Gleichung 1) $v_0 = nv$, so erhält man

$$3) v = \frac{(q\beta)}{\sqrt{1-2(q\beta)^2 n^2}} \sqrt{2gH}.$$

Da das in einem Gerinne mit der beliebigen und constanten Geschwindigkeit v_0 ankommende Wasser auch mindestens mit derselben Geschwindigkeit am Ende desselben ausfliessen muss und v_0 , wenn keine Widerstände entgegenwirken, auch unendlich gedacht werden kann, muss in Gleichung 3) für $n = 1$, $q = 1$ und $\beta = 0,707$ auch v unendlich

werden, was denn auch der Fall ist. So lange man es jedoch mit einem begrenzten Werthe von v_0 als Funktion der Ueberfallhöhe und Gerinne-Form zu thun hat, wie dies in den bei Weitem meisten Fällen der Praxis zutrifft, kann v in Gleichung 3) über der äussersten Kante des Ueberfalles gemessen ohne Widerstände nicht grösser als $\sqrt{2gH}$ und mit Berücksichtigung eines Minimums von Widerständen, wie solches beim Ausflusse durch ausgerundete Mundstücke stattfindet, nicht grösser als im Mittel $0,963 \sqrt{2gH}$ gedacht werden. Setzt man nun den Faktor aus Gleichung 3)

$$4) \frac{(q\beta)}{\sqrt{1-2(q\beta)^2n^2}} = 0,963,$$

so wird für den Grenzwert $n = 1$, also $v_0 = v$

$$5) (q\beta) = 0,570$$

als Maximalwerth für Ueberfälle in Gerinnen von einer für die Ausfluss-Capacität am günstigsten gestalteten Form, wenn H in gehöriger Entfernung von der Ueberfallkante entweder im ruhigen Wasserspiegel oder bei beginnender Beschleunigung gemessen ist. Der von Redtenbacher gefundene Werth von $(q\beta) = 0,570$ für vollkommene Stauwehre kann daher nur unter solchen Umständen gemessen sein.

Will man nun die Einsenkung $T-t$ kennen lernen, welche das mit der Tiefe T in einem Gerinne von der Breite b gleichförmig zufließende Wasser Q bei freier Ausströmung am äussersten Ende erleidet, so hat man dafür die Gleichung

$$Q = Q = 0,570 bT \sqrt{2gT} = 0,963 bt \sqrt{2gt},$$

woraus folgt

$$6) t = \left(\frac{0,570}{0,963}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot T = 0,705T \text{ und } T-t = 0,295T$$

als das grösste Einsenkungs-Verhältniss, welches bei Ueberfällen und Stauwehren vorkommen kann, in naher Uebereinstimmung mit der Beobachtung, welche dasselbe bis zu $t = 0,750T$ festgestellt hat.

Nicht nur die Beobachtung, sondern auch eine Untersuchung nach § 49 ergibt, dass die Länge des Bogens, welchen der eingesenkte Wasserspiegel im Längenprofile macht, nicht die überfallende Strahldicke übersteigt, sondern derselben nahezu gleich ist. Indem wir nun das Uebereinkommen treffen, dass die Ueberfallhöhe H und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 stets in der Entfernung $= H$ von der äussersten Ueberfallkante gemessen werden, und dass der Querschnitt im Zuflussgerinne an dieser Stelle $= A$ sei, haben wir damit eine sichere Grundlage zur rationellen Berechnung und tabellarischen Uebersicht der Werthe von $(q\beta)$ für Gleichung 1) und Gleichung 3) gewonnen, welche alle in der Praxis vorkommende Fälle zu erschöpfen geeignet ist.

Schon Weisbach hat sich durch Ermittlung von Correktions-Tabellen für Ueberfälle in dünner Wand von Gerinnen, deren Querschnitt A kein erheblich Vielfältiges des Ueberfall-Querschnittes $b \cdot H$ beträgt, verdient gemacht. Diese Ermittlung konnte ihm jedoch nur bis zu dem Werthe $\frac{b \cdot H}{A}$, welchen er mit n bezeichnet und der auch identisch mit unserm n in Gleichung 3) ist $= 0,50$ gelingen, weil ihm das Gesetz unbekannt war, nach welchem bei grösseren Werthen die Widerstände an den Wandungen der Gerinne die Ausfluss-Coefficienten modificiren. Wir sind in der Lage die Weisbach'schen Werthe von $(\varrho\beta)$ prüfen zu können, weil uns die Grenzwerte des Produktes und beider Faktoren nicht nur, sondern auch das Zunahme-Verhältniss der letztern bekannt geworden ist (vergl. Tabelle § 53). Diese Prüfung ergiebt eine ganz genaue Uebereinstimmung der von Weisbach innerhalb der oben bezeichneten Grenzen ermittelten Coefficienten für Ueberfälle ohne Seiten-Contraction bis auf 0,001 und für solche mit Seiten-Contraction nur Differenzen von 0,001 bis höchstens 0,005. Die nebenstehende Tabelle enthält die solchergestalt übereinstimmenden Werthe von $(\varrho\beta)$, β und ϱ für alle vorkommenden Werthe von n . Die von β entsprechen Gleichung 3) § 52 nämlich

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2 - (n\varrho)^2}}$$

nur dass solche mit Rücksicht auf die Bedeutung von H in Gleichung 1) und 3) durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ reducirt sind.

Nach nebenstehender Tabelle lassen sich die Coefficienten für Ueberfälle und Stauwehre von jeder nur denkbaren Formbildung mit hinreichender Sicherheit finden. Sie giebt übrigens, wie man sich leicht überzeugen kann, auch für die auf anderm Wege gefundene Lösung der Aufgabe No. 4 § 81 sehr nahezu dieselben Resultate. Hat man in irgend einem Falle die Höhe H in grösserer Entfernung als H von der äussersten Ueberfallkante gemessen und ist genöthigt, solche in Rechnung zu stellen, so muss man auch selbstredend den dieser grössern Entfernung zukommenden Widerstandswert $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ berechnen, solchen dem des betr.

Coefficienten nebenstehender Tabelle zusetzen und den danach reducirten Ausfluss-Coefficienten aus der Widerstands-Tabelle entnehmen. Derselbe verkleinert den Werth von Q wieder um eben so viel, als er ohne dies durch das grösser gemessene H vermehrt worden wäre.

Tabelle

für Ueberfälle in dünner Wand am Ende von Gerinnen
und Kröpfen.

$$v = (q\beta) \sqrt{2gH + 2v_0^2} \text{ oder } = \frac{(q\beta)}{\sqrt{1 - 2(q\beta)^2 n^2}} \sqrt{2gH} \text{ und } Q = bH.v.$$

H, A, n und v_0 in der Entfernung = H von der äussersten
Ueberfallkante gemessen.

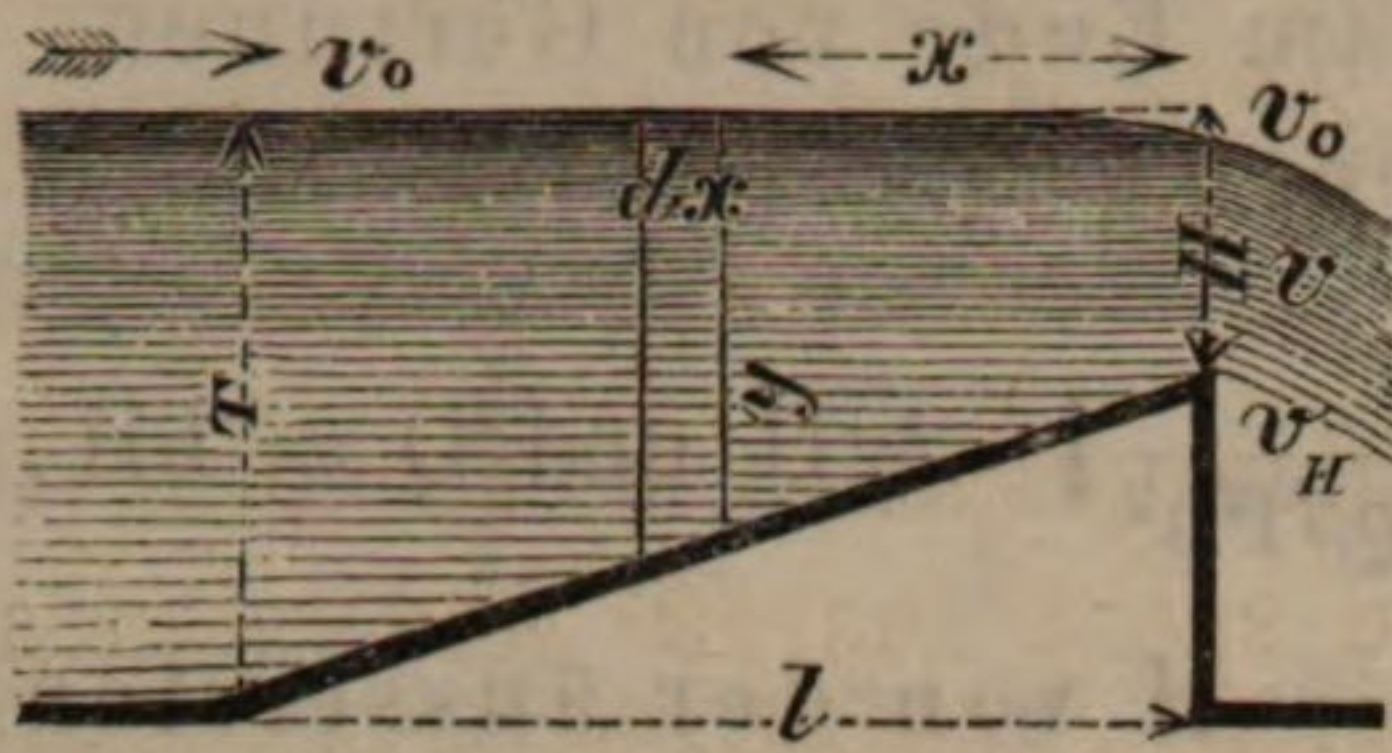
A. Mit Seitencontraktion.					B. Ohne Seitencontraktion.				
$\frac{bH}{A}$ = n	β	q	$(q\beta)$	$\frac{(q\beta)}{\sqrt{1 - 2(q\beta)^2 n^2}}$	$\frac{bH}{A}$ = n	β	q	$(q\beta)$	$\frac{(q\beta)}{\sqrt{1 - 2(q\beta)^2 n^2}}$
0,00	0,500	0,778	0,389	0,389	0,00	0,500	0,810	0,405	0,405
0,05	0,500	0,778	0,389	0,389	0,05	0,500	0,810	0,405	0,405
0,10	0,501	0,778	0,390	0,391	0,10	0,501	0,812	0,407	0,408
0,15	0,502	0,779	0,391	0,392	0,15	0,502	0,814	0,409	0,410
0,20	0,503	0,781	0,393	0,396	0,20	0,503	0,817	0,411	0,414
0,25	0,505	0,784	0,396	0,400	0,25	0,505	0,820	0,414	0,419
0,30	0,508	0,788	0,400	0,406	0,30	0,508	0,823	0,418	0,425
0,35	0,510	0,793	0,405	0,413	0,35	0,511	0,826	0,422	0,432
0,40	0,514	0,799	0,411	0,422	0,40	0,515	0,830	0,428	0,441
0,45	0,518	0,808	0,419	0,434	0,45	0,519	0,834	0,433	0,452
0,50	0,523	0,820	0,429	0,450	0,50	0,524	0,840	0,440	0,465
0,55	0,530	0,831	0,440	0,468	0,55	0,530	0,847	0,449	0,481
0,60	0,535	0,841	0,450	0,487	0,60	0,537	0,854	0,459	0,498
0,65	0,543	0,850	0,462	0,500	0,65	0,544	0,861	0,468	0,517
0,70	0,552	0,859	0,474	0,537	0,70	0,554	0,868	0,481	0,547
0,75	0,563	0,867	0,488	0,571	0,75	0,564	0,864	0,493	0,579
0,80	0,575	0,875	0,503	0,612	0,80	0,576	0,879	0,506	0,616
0,85	0,590	0,881	0,519	0,665	0,85	0,591	0,883	0,522	0,666
0,90	0,604	0,885	0,535	0,731	0,90	0,605	0,886	0,536	0,732
0,95	0,622	0,888	0,552	0,827	0,95	0,623	0,888	0,553	0,827
1,00	0,642	0,889	0,570	0,963	1,00	0,642	0,889	0,570	0,963

§ 86.

Aus dem Schlusse des § 84 geht hervor, dass bei Stauwehren, die einen sehr allmählig ansteigenden und langen Aufschlussboden haben, die Ausfluss-Coefficienten für Höhen, die in beträchtlicher Entfernung vom Ueberfalle gemessen sind, keineswegs ganz unabhängig von den letztern sein können, sondern dass deren dritte Wurzeln um so mehr von Einfluss auf die Grösse der Coefficienten werden, als die Werthe der Druckhöhen sich von der Einheit entfernen. Behufs Beurtheilung dieses Einflusses möchte es daher nicht ohne Interesse sein, dies Verhältniss einer annähernden Berechnung zu unterziehen.

Die Breite des Figur 104 im Längenprofile dargestellten Stauwehres sei b. In T sei die mittlere Geschwindigkeit des ankommenden Wassers

Fig. 104.



$= v_0$ angenommen und deren Beschleunigung nach H hin vernachlässigt. Die Boden-Geschwindigkeit in H werde mit v_H bezeichnet. Die Länge zwischen T und H sei l . Die Arbeit des Abscheerungs-Widerstandes auf dem Boden zwischen T und H und des Verschiebungs-Widerstandes in Folge Voreilung der Bodenschicht vor der Oberfläche berechnet sich nach § 34 und § 41

$$A_{ar1} = \mu b l \left(\frac{v_H + v_0}{2} \right) + \mu b l \left(\frac{(v_H + v_0)}{2} - v_0 \right)$$

$$A_{ar1} = \mu b l v_H \text{ also } W_{a1} = \frac{\mu b l v_H}{v}.$$

Da nun der Quotient $\frac{v_H}{v}$ aus der Boden-Geschwindigkeit in H und der mittlern Geschwindigkeit daselbst sich theoretisch auf $\sqrt{2} = 1,41$ berechnet, so wird

$$1) W_{a1} = 1,41 \mu b l.$$

Das Differenzial des Abscheerungs-Widerstandes an den beiden Seitenflächen ist

$$dA_{ar2} = 2\mu y dx v_y.$$

Aber v_y die mittlere Geschwindigkeit in y ist sehr nahezu $\frac{H}{y} v$ mithin auch

$$dA_{ar2} = 2\mu H v dx.$$

Das Integral von $x = 0$ bis $x = l$ giebt

$$2) A_{ar2} = 2\mu H v l \text{ und } W_{a2} = 2\mu H l.$$

Die Summe von Gleichung 1) und 2) nämlich $W_{a1} + W_{a2}$ wird

$$3) W_a = \mu l (1,41 b + 2H).$$

Der der Widerstands-Tabelle entsprechende Gesamtwert von $\frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}}$ berechnet sich mithin

$$4) \frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = \frac{(1,41 b + 2H) l}{0,86 b H \sqrt[3]{\frac{H}{2}}}$$

und wenn man darin l in Uebereinstimmung mit § 85 $= H$ setzt

$$5) \frac{W_a}{\mu a \sqrt[3]{h}} = \frac{2,07}{\sqrt[3]{H}} + \frac{2,8 \sqrt[3]{H^2}}{b}$$

Berechnet man nun zu verschiedenen Zahlenwerthen von b und H in Metern die Werthe nach Gleichung 5) und sucht aus der Widerstandstabelle die zugehörigen Werthe von ϱ , so stellen sich dieselben wie folgt.

Tabelle

der Widerstands-Coefficienten ϱ für Stauwehre, wie sich solche aus dem Abscheerungs-Widerstande an dem benetzten Umfange und dem Verschiebungs-Widerstande auf die Länge $l = H$ von der Ueberfallkante ergeben.

Ueberfallhöhe H in Metern.	Breite b des Ueberfalles in Metern							
	0,05	0,10	1,0	2,0	3,0	5,0	10	100
0,05	0,872	0,894	0,911	0,913	0,914	0,914	0,914	0,914
0,10	—	0,887	0,918	0,921	0,921	0,922	0,923	0,924
1,0	—	—	0,920	0,931	0,938	0,941	0,944	0,938
5,0	—	—	—	0,916	0,928	0,939	0,947	0,958
10	—	—	—	—	0,916	0,932	0,945	0,963
20	—	—	—	—	0,901	0,920	0,929	0,964

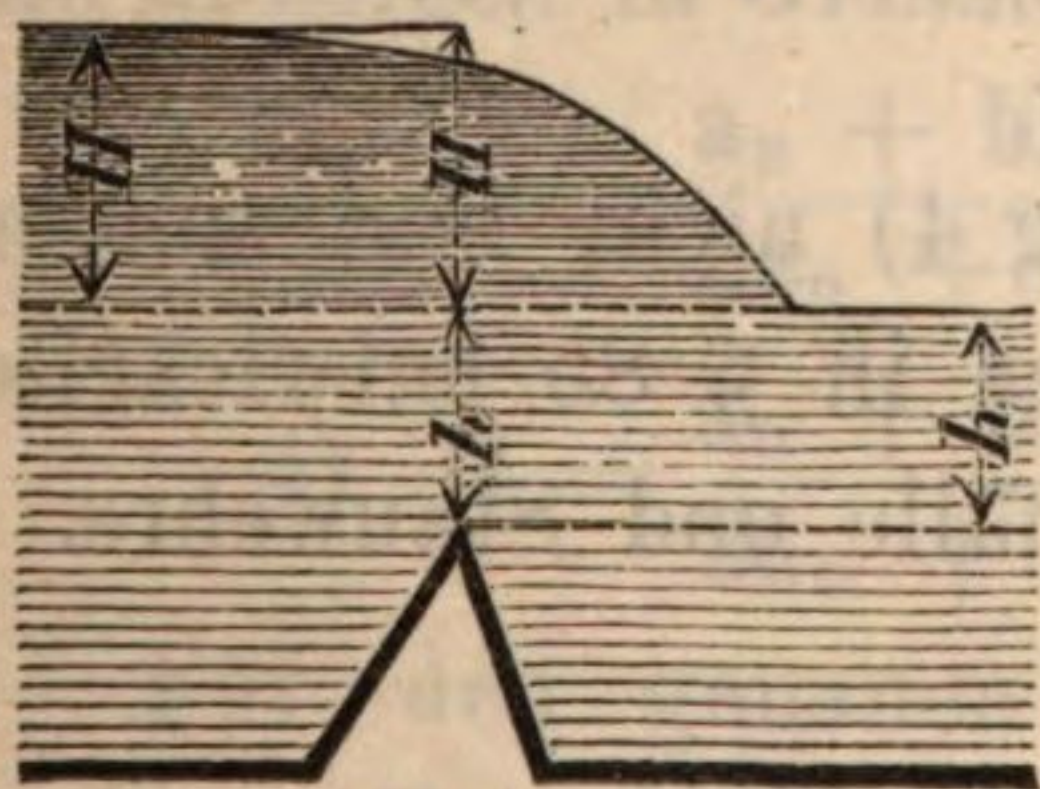
Die Differenzen gegen die Werthe von ϱ in der Tabelle § 85 geben uns den Vibrations-Verlust in Folge der ungleichmässigen Beschleunigung der einzelnen Wasserschichten an. Der äusserste Grenzwert 0,964 ist nahezu derselbe, welchen wir für den günstigsten Fall in Gleichung 4) § 85 eingeführt haben.

§ 87.

Unvollkommene Ueberfälle und Stauwehre.

Unter unvollkommenen Ueberfällen und Stauwehren versteht man

Fig. 105.



solche, bei denen nach Figur 105 der Unterwasserspiegel nicht gleich hoch mit der Ueberfallkante oder Wehrkrone, oder tiefer als letztere, sondern um eine gewisse Höhe h darüber liegt, während der Oberwasserspiegel dadurch um die Höhe H über dem ursprünglich bestandenen Unterwasserspiegel aufgestaut wird. Um correkte Beziehungen

für die mittlere Geschwindigkeit v zu finden, mit welcher das Wasser über solche Wehre fließt, müssen wir wie § 55 auch hier von den mittlern Druckkräften über der Ueberfallkante ausgehen. Die Breite des Ueberfalles werde auch hier durch b bezeichnet.

In dem obern Theile von der Höhe H ist die Druckhöhe $\frac{H}{2}$, in dem untern von der Höhe h die H , wirksam. Die gesammte Druckkraft P_m beträgt also

$$P_m = \frac{bH^2\gamma}{2} + b \cdot h \cdot H\gamma = \frac{b\gamma}{2} (H^2 + 2hH).$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch das Produkt $b(H + h)\gamma$ aus dem Gesamt-Querschnitte in das Gewicht der Cubik-Einheit, so erhält man die auf den ganzen Querschnitt in Rechnung zu bringende mittlern Druckhöhe h_m

$$h_m = \frac{H^2 + 2hH}{2(H + h)}.$$

Sollen nun die Werthe von ϱ und β für vollkommene Wehre auch für unvollkommene gelten, so muss man in Gleichung 1) und 2) § 85 ebenfalls für H vorstehenden Werth unter dem Wurzelzeichen doppelt einsetzen. Dann erhält man für unvollkommene Wehre

$$v = (\varrho\beta) \sqrt{2g\left(H + h - \frac{h^2}{H + h}\right) + 2v_0^2}$$

$$Q = (\varrho\beta) b(H + h) \sqrt{2g\left(H + h - \frac{h^2}{H + h}\right) + 2v_0^2}$$

Für $h + 0$ ergeben sich hieraus Gleichung 1) und 2) § 85 für vollkommene Wehre wieder.

Setzt man den Ausdruck in der Klammer unter dem Wurzelzeichen $= H_m$, in welchem Falle also H_m die doppelte mittlere Druckhöhe bezeichnet, so erhält man in völliger Uebereinstimmung mit den Ausdrücken für vollkommene Wehre

$$1) v = (\varrho\beta) \sqrt{2gH_m + 2v_0^2} \text{ und } H_m = \frac{v^2 - 2v_0^2(\varrho\beta)^2}{2g(\varrho\beta)^2}$$

$$2) Q = (\varrho\beta)b(H + h) \sqrt{2gH_m + 2v_0^2}$$

worin $H_m = H + h - \frac{h^2}{H + h}$ zu setzen ist.

Es gelten dann Gleichung 3) und Gleichung 4) nicht nur, sondern auch die Coefficienten-Tabelle, sowie die übrigen in § 85 entwickelten Beziehungen ebenfalls für unvollkommene Ueberfälle und Stauwehre.

§ 88.

Verengungen in Gerinnen, Kanälen oder Flussbetten.

Die vorstehende Entwicklung führt uns auch auf den richtigsten Weg zur Berechnung des durch Verengungen beliebiger Form, Grösse und Lage in künstlichen und natürlichen Flussbetten erzeugten Aufstauens, indem durch jede solche Verengung die Verhältnisse eines unvollkommenen Ueberfalles herbeigeführt werden.

a bezeichne den Inhalt des ursprünglichen Querprofiles, a_n den des eingeeengten, H die dadurch erzeugte Erhebung des ursprünglichen Wasserspiegels und b die mittlere Breite desselben in der Mitte der Stauhöhe H gemessen. Dann berechnet sich die doppelte mittlere Druckhöhe H_m ganz analog § 87

$$1) H_m = \frac{(2a_n + b)H}{a_n + bH}$$

Setzt man diesen Ausdruck dem in Gleichung 1) § 87 gefundenen für H_m gleich, so ergibt sich

$$\frac{(2a_n + b)H}{a_n + bH} = \frac{v^2 - 2v_0^2(\varrho\beta)^2}{2g(\varrho\beta)^2}$$

und daraus H

$$2) H = \frac{a_n + bH}{2a_n + b} \left(\frac{v^2 - 2v_0^2(\varrho\beta)^2}{2g(\varrho\beta)^2} \right).$$

Es handelt sich jetzt nur darum, für jeden speciellen Fall den richtigen Werth von $(\varrho\beta)$ zu finden und dazu geben die frühern Beispiel-Rechnungen genügenden Anhalt. Sind die Verengungen durch normal gegen die Stromaxe stehende dünne Wände erzeugt, so gelten natürlich ganz und gar die Coefficienten der Tabelle in § 85. Bei Brückenpfeilern, Einbauen, Buhnen und überflutheten Stauwehren sind die Verengungen jedoch meist mundstückartig abgerundet, und die Seitencontraktion erstreckt sich nur auf einen verhältnissmässig geringen Theil des ganzen Querprofil-Umfanges, während in 0,80 bis 1,00 des letztern keine merkliche Contraktion eintritt. Dem entsprechend kann wohl mit einer Genauigkeit, die für alle gewöhnlichen Fälle der Praxis hinreichen dürfte, dem mittlern Werthe von $n = 0,91$ entsprechend aus der Coefficienten-Tabelle § 85 $(\varrho\beta)$ mit 0,540 entnommen werden. Setzt man dieselben in Gleichung 2) ein auch für $2g$ die Zahlenwerthe, so wird

$$3) H = \frac{a_n + bH}{2a_n + b} (0,0542v^2 - 0,0317v_0^2) \text{ für pr. Fussmaass}$$

$$4) H = \frac{a_n + bH}{2a_n + b} (0,175v^2 - 0,102v_0^2) \text{ für Metermaass.}$$

Für den genauen Werth von H müssen diese Gleichungen Null werden. Bei einiger Uebung gelangt man schon bei höchstens zwei

Versuchs-Rechnungen mit Einsetzung eines vorläufig annähernd geschätzten Werthes von H , durch Beurtheilung der sich ergebenden Differenzen, zum Ziele.

Gleichung 3) und 4) schliessen sich mit grosser Uebereinstimmung auch den Versuchs-Resultaten von Funk (vergl. Rühlmann Hydrodyn. § 142) an.

Ein Beispiel wird zur Erläuterung der Rechnung genügen.

Aufgabe. Vor dem Baue der Weserbrücke zu Münden hatte das Flussbett an der Brückenbaustelle eine Breite von 576 Fuss bei einer mittlern Tiefe von 14,15 Fuss. Durch die Brückenpfeiler wurde diese Weite bis auf 311 Fuss beschränkt. Die Wassermasse, welche der Strom bei der gemessenen mittlern Tiefe führte, war auf 32208 Cbf. ermittelt worden. Nach dem Baue der Brücke wurde ein Aufstau von 1,10 Fuss beobachtet. Wie hoch berechnet derselbe sich nach Gleichung 3)?

Auflösung. Nach vorstehenden Angaben ist $a = 576 \cdot 14,15 = 8150$
 $a_n = 311 \cdot 14,15 = 4400$, $b = 311$.

Setzt man nun für H vorläufig den beobachteten Werth 1,10 in Gleichung 3) ein, so wird ferner

$$bH = 311 \cdot 1,10 = 342, \quad v = \frac{Q}{a_n + bH} = \frac{32208}{4400 + 342} = 6,8 \text{ Fuss}$$

$$v_0 = \frac{32208}{8150 + 576 \cdot 1,10} = 3,63, \quad 0,0542v^2 = 2,51 \text{ und } 0,032v_0^2 = 0,42.$$

$$\text{Also } H = \left(\frac{4400 + 342}{8800 + 311} \right) (2,51 - 0,42) = 0,52 \cdot 2,09 = 1,09.$$

Es lässt sich hieraus schon übersehen, dass Gleichung 3) für den Werth $H = 1,097 = \text{Null}$ wird, dass also das Resultat der Rechnung mit dem der Beobachtung bis auf 0,003 übereinstimmt.

Vielfältige Anwendung finden Gleichung 3) und 4) zur Bestimmung der Stauhöhen von Wehren bei Hochwasserständen.

§ 89.

Bewegung des Wassers in Flussbetten.

Wenn schon im § 47 vorläufige Beziehungen für die mittlere Geschwindigkeit v , mit welcher sich das Wasser in Flussbetten bewegt, hergeleitet sind, um solche mit den bisher üblich gewesenen Experimental-Formeln zu vergleichen, so können dieselben doch nur als in den meisten Fällen annähernd zutreffende gelten, weil zwei Umstände darin nicht berücksichtigt sind.

Zunächst ist in Gleichung 4) § 47 behufs Bestimmung des Faktors $f(h)$, welcher die Grösse des Widerstandes bestimmt, nur derjenige Theil

der Druckhöhe berücksichtigt, welcher auf das relative Gefälle $\alpha = \frac{h}{l}$ kommt, während bei allen übrigen Arten der Bewegung die Rechnung nur dann Uebereinstimmung mit der Beobachtung ergibt, wenn man für h in $f(h)$ die ganze Druckhöhe einschliesslich mindestens des der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entsprechenden Theiles $\frac{v_0^2}{2g}$ einsetzt. Dass dem so sein müsse, darüber lässt der Grad der Uebereinstimmung der § 46 mitgetheilten Versuchs-Tabelle der Du Buat'schen Messungen an einem künstlichen Kanale nur wenig Zweifel übrig, wenn man auf den dort befolgten Rechnungsgang zurückgeht.

Ein anderer Umstand, welcher bei Berechnung des äussern Widerstandes zumal in Kanälen und Gerinnen mit senkrechten Seitenwänden, in denen sich das Wasser mit erheblicher Geschwindigkeit bewegt, in Betracht kommt ist der, dass in einem der Wasseroberfläche zunächst liegenden Theile des benetzten Seiten-Umfanges durch die Bewegung der hydrostatische Druck, mit ihm zugleich nach § 39 also auch der Abscheerungs-Widerstand aufgehoben wird. Das Gesetz, nach welchem diese Druck-Aufhebung resp. Verminderung erfolgt, findet sich im § 111 hergeleitet. Es wird hier nachgewiesen werden, dass der hydrostatische Druck fliessenden Wassers auf Seitenwandungen normal zur Richtung der Bewegung um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ vermindert, also bis zur

Tiefe $t = \frac{v^2}{2g}$ unter der Wasseroberfläche negativ resp. Null wird.

In Berücksichtigung dieser Umstände erscheint es passender, und für die Praxis consequenter, nicht von den § 47 hergeleiteten Formeln, sondern bei Berechnung auch der mittlern Wassergeschwindigkeit in offenen Leitungen von der Widerstands-Tabelle Gebrauch zu machen und auf die allgemeine Formel

$$1) v = (\rho\beta) \sqrt{2gh}$$

zurückzugehen. Da wir es in solchen Leitungen zumal bei Flussbetten und bei Uebergängen aus einem Profile in das andere fast ohne Ausnahme mit allmählichen Erweiterungen oder Verengungen zu thun haben, bei welchen die Contraktion wegfällt, kann man von vorn herein $\beta = 1$ setzen und Gleichung 1) vereinfachen auf

$$2) v = \rho \sqrt{2gh}$$

Nehmen wir nun an, es bewege sich durch eine Flussstrecke von der Länge l die constante Wassermenge Q pro Sekunde mit beliebiger beschleunigter oder verzögerter Geschwindigkeit. Beim Eintritte werde das Durchflussprofil $= na$, beim Austritte $= a$ gemessen. Bei letzterm

sei die Durchfluss-Geschwindigkeit $= v$, dann muss sie bei ersterm $\frac{v}{n}$ sein. Es muss also zunächst oberhalb der Flussstrecke l eine in na zur uneingeschränkten Grösse $\frac{v^2}{2gn^2}$ zu berechnende Druckhöhe behufs Erzeugung der Anfangs-Geschwindigkeit $\frac{v}{n}$ wirksam sein, die wir mit h_1 bezeichnen wollen. Ausserdem werde das absolute Gefälle im Wasserspiegel zwischen na und $a = h_2$ gemessen. Bei gleichförmiger Bewegung wird dann ein relatives Gefälle in der Flussstrecke l vorhanden sein, welches $= \frac{h_2}{l}$ ist und das wir auch künftighin mit α bezeichnen wollen.

Bei beschleunigter oder verzögerter Bewegung wird das relative Gefälle, wie dies ohne Weiteres einleuchtet, sich an jedem Punkte ändern und der Wasserspiegel des Längenprofils im erstern Falle eine convexe, im letztern eine concave Kurve bilden, wenn die Flusssohle eine grade Linie ist.

Die auf Erzeugung der Durchfluss-Geschwindigkeit in a wirksame Druckhöhe beträgt also $h_1 + h_2$ und ihr wirkt nur der Widerstand zwischen na und a entgegen, weil h_1 ohne Widerstände durch $\frac{v^2}{2gn^2}$ gemessen worden.

Setzen wir nun in Gleichung 2) für $h = h_1 + h_2$ ein, so wird

$$3) \quad h = \frac{v^2}{2gn^2} + h_2$$

$$4) \quad v = \varrho \sqrt{\frac{v^2}{n^2} + 2gh_2}$$

Aus Gleichung 4) entwickeln die einzelnen Grössen sich nun wie folgt:

$$5) \quad v = \frac{n\varrho}{\sqrt{n^2 - \varrho^2}} \sqrt{2gh_2} = \frac{4,43n\varrho}{\sqrt{n^2 - \varrho^2}} \sqrt{h_2}$$

$$6) \quad h_2 = \frac{(n^2 - \varrho^2)}{\varrho^2} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{0,051(n^2 - \varrho^2)v^2}{\varrho^2}$$

$$7) \quad n = \frac{\varrho v}{\sqrt{v^2 - \varrho^2 \cdot 2gh_2}} = \frac{\varrho v}{\sqrt{v^2 - \varrho^2 \cdot 19,62hh_2}}$$

$$8) \quad \varrho = \frac{v}{\sqrt{\frac{v^2}{n^2} + 2gh_2}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{v^2}{n^2} + 19,62h_2}}$$

Die Zahlenwerthe rechts gelten für Metermaass. h_2 kann in vorstehenden Gleichungen eben so wohl positiv als negativ in Rechnung gebracht werden. Das letztere muss unter andern bei wellenartigen Er-

hebungen, wie solche beim Austritte aus Reservoirs in Gerinne oder Kanäle vorkommen und bei der Fortbewegung in horizontalen Gerinnen, der Fall sein.

Setzt man in Gleichung 5) bis 8), $n = 1$ so wird auch $na = a$ und es ergeben sich die nachstehenden Formeln für die gleichförmige Bewegung:

$$9) \quad v = \frac{4,43\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \sqrt{h_2}$$

$$10) \quad h_2 = \frac{0,051(1-\varrho^2)v^2}{\varrho^2}$$

$$11) \quad \varrho = \frac{v}{\sqrt{v^2 + 19,62h_2}}$$

In Gleichung 5) bis 10) finden sich so ziemlich alle Fälle erschöpft, welche bei der Bewegung in offenen Leitungen und Flussbetten in Frage kommen können. Es handelt sich nur darum, für jeden besondern Fall den Widerstandswerth $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ zu berechnen, um den zugehörigen Werth

von ϱ aus der Tabelle entnehmen zu können. Abschnitt IV giebt für die Berechnung von p resp. p_m genügende Anhaltspunkte, für a ist selbstredend dasjenige Querprofil zu nehmen, in welchem v gesucht wird und für $\sqrt[3]{h}$ ist $\sqrt[3]{h_2 + \frac{v^2}{2gn^2}}$ zu setzen. v ist dabei zunächst durch Schätzung annähernd zu ermitteln. Ein Beispiel möchte zur Erläuterung der Rechnung und Prüfung der Richtigkeit genügen.

Brahms fand bei zwei Geschwindigkeits-Messungen an grössern Strömen, bei dem einen auf eine deutsche Meile 4 Zoll, bei dem andern 32 Zoll Gefälle. Beide hatten eine mittlere Tiefe von 10 Fuss. Bei dem erstern wurde die mittlere Geschwindigkeit $v = 1,17$ Fuss, bei dem letztern 3,25 Fuss gemessen. Wie gross berechnen dieselben sich nach Gleichung 9?

$\frac{pl}{a}$ hier $\frac{1}{t}$ ist für beide Fälle $\frac{24000}{10} = 2400$. $\sqrt[3]{h}$ berechnet sich nach Gleichung 3) auf 0,708 resp. 1,416 und, daraus $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ auf 3389 resp. 1695,

dafür ferner aus der Widerstandstabelle $\varrho = 0,182$ resp. 0,251. Setzt man diese Werthe in Gleichung 9) so findet sich für den ersten Strom $v = 0,86$ und für den letztern $v = 3,36$.

Die Differenz $1,17 - 0,86 = 0,31$, welche die Rechnung bei dem einen Strome gegen die Beobachtung ergiebt, berechtigt keineswegs zu der Annahme, dass Gleichung 9) falsche Resultate ergiebt. Einmal nämlich kann die Messung bei einem meilenweiten Nivellement gar zu

leicht eine Differenz von 1 bis 2 Zoll ergeben haben. Ausserdem aber braucht man nur anzunehmen, dass auf der zunächst folgenden Meile oberhalb oder unterhalb der gemessenen Stromstrecke nahezu dieselben Gefälle- und Geschwindigkeits-Verhältnisse stattfanden und v für $l = 48000$ und $h_2 = 0,67$ anstatt $0,33$ zu berechnen, dann erhält man dessen Werth schon auf $0,95$ und für $l = 72000$, also 3 Meilen auf $1,06$, mithin sehr nahe dem Resultate der Beobachtung.

§ 90.

Dass sich in Kanälen und Flüssen die einzelnen Wasserfäden nicht mit gleicher Geschwindigkeit bewegen können, sondern die Voreilung derjenigen Schichten, welche in der grössten Entfernung von dem Angriffe des äussern Widerstandes, also dem benetzten Umfange, fliessen, am grössten sein muss, dass ferner die sogenannte Geschwindigkeits-Kurve, welche sich im horizontalen oder vertikalen Längenschnitte eines Stromes darstellt, indem man die Breiten oder Tiefen als Abscissen und die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, parabolische Gestalt haben müsse, ist bereits in § 35 nachgewiesen. Die Maximalgeschwindigkeit oder der sogenannte Stromstrich wird hiernach in gradlinigen Stromstrecken mit der grössten Tiefe des Querprofiles zusammenfallen, in Krümmungen dagegen eine Ablenkung nach der concaven hin erfahren, welche sich nach dem Gesetze der Centrifugalkraft für jeden gegebenen Fall berechnen lässt. § 53 giebt den Weg dazu an. Weiteres hierüber wird in §§ 111 und 112 verhandelt, auch nachgewiesen werden, dass die Voreilung der einzelnen Wasserfäden keineswegs durch eine förmliche Verschiebung gegen einander, sondern durch stetiges Uebertreten der kleinsten Theilchen aus den langsamer in die rascher fliessenden Schichten vor sich geht, in Folge der durch die ungleichmässige Geschwindigkeit erzeugten Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes. Die langsamer fliessenden Schichten üben eben auf die rascher fliessenden in der Richtung normal auf die Bewegung einen grössern Druck aus, als sie von letztern wieder empfangen. Nur einer Eigenthümlichkeit des Stromstriches, welche die Serpentinbildung bedingt, möge hier noch erwähnt werden. Aus § 111 wird hervorgehen, dass der Wasserspiegel im Querprofile fliessender Gewässer stets eine convexe Kurve zur Begrenzung haben muss und sich im Stromstriche am meisten über den Wasserstand an den Ufern erhebt. Tritt nun mit einer solchen durch die Centrifugal-Pressung vermehrten Erhebung der Stromstrich von einer zufällig gebildeten concaven Uferstrecke links in eine tangential grade fortgehende über, so kann er nicht, wie man dies zu vermuthen geneigt sein möchte, sich auch in der Tangente fortsetzen, sondern muss in der mittlern Richtung des Druckes, welchen seine

Erhebung nach allen Seiten ausübt, aber von dem linkseitigen Ufer wieder empfängt, nach rechts hinübergehen und stromabwärts das entgegengesetzte Ufer treffen, auch dasselbe angreifen, wenn dem nicht durch künstliche Befestigung entgegengetreten wird, oder dasselbe nicht von der Natur unangreifbar gebildet ist. Aus dieser Eigenthümlichkeit folgt, dass ein Strom, der sich selbst überlassen in angreifbaren Ufern fliesst, dies der Regel nach nur in fortgesetzten Serpentinien und nur ausnahmsweise in graden Linien thun kann. Befördert wird sie durch die Ablagerung von Geschieben, mit welcher jeder von der ursprünglichen Richtung plötzlich abweichende Stromstrich nach der Tangente hin eine natürliche Eindämmung bildet und sich die Fortsetzung seiner ursprünglichen Richtung selbstthätig sperrt. Es ist diese Ablagerung eine Folge des grössern Gewichtes und der damit im Verhältnisse stehenden grössern Massenträgheit der auf der Fusssohle bewegten Geschiebe, oder vom Wasser fortgeführten Sinkstoffe, vermittelt derer sie in tangentialer Richtung oder nach einem ungleich grössern Krümmungshalbmesser, aus dem Stromstriche in das langsamer fliessende Wasser fortgeschleudert werden, während der letztere vermöge seiner geringern Masse seine Wendung rascher und nach kleinerm Krümmungshalbmesser zu bewerkstelligen vermag. An der convexen Seite finden aus demselben Grunde Anlandungen von Sinkstoffen in dem Maasse statt, als an der concaven sich eine tiefere und geräumigere Stromrinne ausbildet und die Wendung, welche der Stromstrich von aufwärts machen muss, um in dieselbe hineinzugelangen, eine entschiedenere wird. Auch diese Verlandungen beginnen daher stets stromaufwärts und setzen sich stromabwärts fort. In der Regel ist die Verlandung stärker als die Vertiefung und nur in diesem Falle entstehen durch Serpentinien Druckhöhen-Verluste, welche dem verengten Querprofile und der in Folge davon vermehrten mittlern Geschwindigkeit entsprechen, sich auch nach § 88 berechnen und beurtheilen lassen. Für eine erhebliche und in Betracht zu ziehende Vermehrung des äussern und innern Widerstandes lassen sich aus der Natur desselben keine Gründe herleiten, es sei denn, dass ein plötzlicher Uebergang aus einem engern Profile in ein weiteres, also aus einer grössern in eine geringere Geschwindigkeit, stattfände, welcher eine heftigere wirbelnde Bewegung und eine grössere Cohäsionsarbeit zur Folge hat, wie sie bei stetiger Fortbewegung vorkommen.

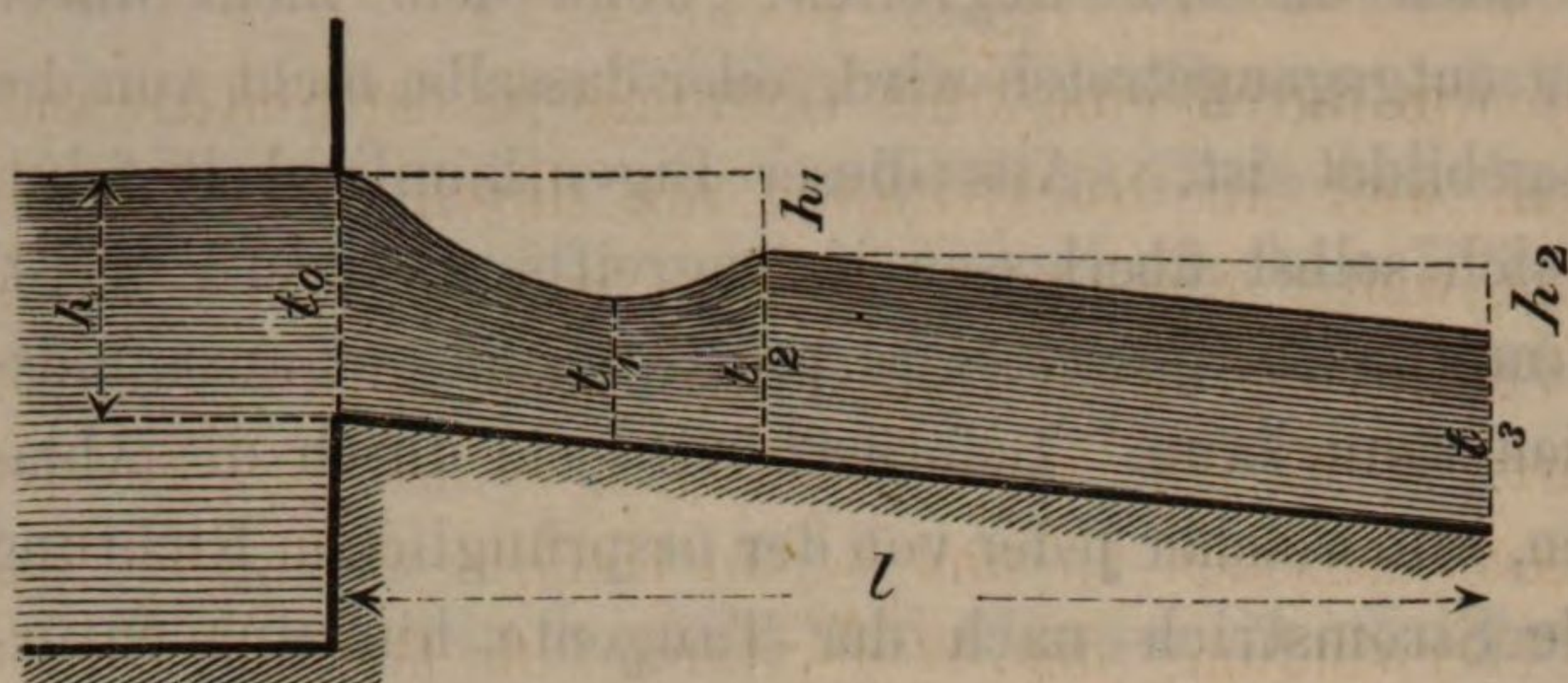
§ 91.

Ausfluss aus Seitenöffnungen durch vorliegende Gerinne.

Bei Wassertriebwerken kommt es häufig vor, dass Wasser aus Oeffnungen in Seitenwänden grösserer Reservoirs durch Vermittelung ausserhalb derselben angebrachter Gerinne von rechteckigem Querschnitte

zum Ausflusse gelangt. Figur 106 stelle den Längenschnitt eines

Fig. 106.



solchen Ausflusses dar. Das Gerinne werde von constantem Querschnitte und der Länge l gedacht, habe mit der Oeffnung die gleiche Breite b und seine Sohle falle in t_0

mit der Sohle der letztern zusammen. In den meisten, wenn auch nicht in allen Fällen, wird der Wasserspiegel wie Figur 106 darstellt bei t_1 eine Einsenkung und bei t_2 eine Aufstauchung zeigen. Denkt man sich nämlich den Theil des Gerinnes zwischen t_1 und t_3 fort und vernachlässigt die überdies im Verhältnisse zum ganzen Gerinne verschwindend kleinen Widerstände zwischen t_0 und t_1 , so muss sich in t_1 und zwar in einer Entfernung von t_0 , welche etwa dem halben mittlern Oeffnungsdurchmesser gleichkommt, eine Verdünnung des Strahles zeigen, die dem effektiven Contraktions-Verhältnisse β_1 der Oeffnungsform entspricht und es muss die Beziehung statthaben

$$1) \quad t_1 = \beta_1 t_0.$$

β_1 bedeutet hier den effektiven Contraktions-Coefficienten zum Unterschiede von dem theoretischen β , welcher sich ohne Berücksichtigung der Widerstände ergibt.

Es darf dabei durchaus nicht übersehen werden, dass trotz der Profil-Verminderung in t_1 eine Beschleunigung der Arbeits-Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers zwischen t_0 und t_1 nicht stattgefunden hat. Die einzelnen Wassertheilchen hatten vielmehr, wie dies § 24 erörtert worden, in t_0 ihre volle Arbeits-Geschwindigkeit bereits erlangt, sie gingen mit derselben aber nicht normal, sondern unter dem mittlern Winkel $\text{arc. cos } \beta$ gegen die Ebene der Oeffnung hindurch, während sie in t_1 sich zu einheitlicher Richtung normal auf die Längensaxe der Bewegung vereinigt haben, also dem entsprechend den frühern Querschnitt nicht mehr füllen können. Desshalb wird auch beim

Ausflusse in Gerinne die Constante $\frac{s}{\gamma}$, welche beim freien Ausflusse und fortgesetzter Beschleunigung des ausgetretenen Strahles in der Oeffnung wirksam ist, ausser Ansatz bleiben, wenn das Gefälle in dem Gerinne nicht so gross ist, dass in t_1 eine Verdünnung eintritt, welche das Verhältniss nach Gleichung 1) übersteigt.

So lange nun Gleichung 1) bestehen bleibt, kann ein vorgelegtes

Gerinne von beliebiger Länge keine andere Rückwirkung auf den Ausfluss in t_0 ausüben, als dass die Constante $\frac{s}{\gamma}$ ausser Kraft tritt, der letztere wird vielmehr wie durch eine freie Oeffnung in der Seitenwand des Reservoirs erfolgen, weil eine Rückwirkung nur durch einen Gegendruck des im Gerinne weiter fliessenden Wassers in t_1 eintreten kann und ein solcher eine Verdickung daselbst zur Folge haben müsste, welche Gleichung 1) modificirt. Tritt eine solche nicht ein, so ist dies gleichzeitig ein Beweis, dass zwischen t_1 und t_3 ein Gefälle vorhanden ist, das entweder zur Ueberwindung der Widerstände im Gerinne grade ausreicht oder so viel grösser ist, dass ausserdem noch eine Beschleunigung nach t_3 hin stattfindet. Tritt jedoch der umgekehrte Fall ein, so wird durch die Verdickung in t_1 auch die Rückwirkung auf t_0 und die Verminderung des Ausflusses daselbst gemessen. Darum möchte es nicht überflüssig sein, die Beziehungen zwischen t_1 , t_2 und t_3 einer nähern Beleuchtung zu unterziehen.

Im Allgemeinen bedarf es wohl keines weitem Beweises dafür, dass, wenn sich in einem offenen Gerinne die vordern Wassertheilchen eben so rasch oder rascher bewegen, wie die hintern, die Bewegung also entweder eine gleichförmige oder beschleunigte ist, sie keinen Gegendruck auf die letzteren auszuüben vermögen. Jeder Gegendruck, den die letztern trotzdem erleiden, kann daher nur in dem Widerstande an den benetzten Wandungen gesucht werden. Der letztere macht den Ausfluss durch vorgelegte Gerinne von der Druckhöhe abhängig und wird ihn bei sehr kleinen Druckhöhen erheblich, bei grössern unerheblich beeinträchtigen. Versuche von Lesbros mit vorgesetzten 3 M. langen 0,2 M. breiten horizontalen Gerinnen ergeben daher die Ausfluss-Coefficienten bei 0,005 M. hohen Oeffnungen und 0,005 M. Druckhöhe darüber um 0,11 bis 0,15 kleiner, wie bei denselben Oeffnungen ohne Gerinne, bei 0,4 M. und höhern Druckhöhen aber keine merklichen Differenzen. Ausserdem tritt das Wasser bei sehr kleinen Druckhöhen über der Oeffnung mit erheblich grösserer Geschwindigkeit am Boden, wie an der Oberfläche in t_0 ein, während in t_2 zufolge des Bodenwiderstandes das umgekehrte Verhältniss eingetreten sein muss. Es wird also zwischen t_0 und t_2 eine, die Widerstands-Arbeit vermehrende, Verschiebung der einzelnen Schichten über einander stattfinden, die offenbar in t_1 ihren Wechsellpunkt hat. Bezeichnen wir die den verschiedenen Wasserständen t_1 , t_2 u. s. w. entsprechenden Durchfluss-Geschwindigkeiten mit v_{t1} , v_{t2} u. s. w. und vernachlässigen den Widerstand zwischen t_1 und t_2 , ferner auch das kleine Gefälle, welches daselbst in der Gerinnesohle noch vorhanden sein mag, so erhalten wir mit hinlänglicher Genauigkeit aus § 89 Gleichung 6), wenn wir darin h_2 negativ nämlich $-(t_2 - t_1) = t_1 - t_2$ auch $\varrho = 1$ und

$n = \frac{t_1}{t_2}$ setzen die Beziehung

$$t_1 - t_2 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_2^2} \cdot \frac{v_{t2}^2}{2g}$$

woraus folgt

$$2) \frac{t_2^2}{t_2 + t_1} = \frac{v_{t2}^2}{2g} = 0,051 v_{t2}^2 \text{ für Metermaass.}$$

Denken wir uns dagegen die Entfernung zwischen t_1 und t_3 so erheblich, dass der Widerstand dabei nicht vernachlässigt werden kann, so erhalten wir mit Beibehaltung von ϱ aus Gleichung 6) § 89

$$3) \frac{t_1}{t_3} = \varrho \sqrt{1 + \frac{2g}{v_{t3}^2}(t_1 - t_3)} = \varrho \sqrt{1 + \frac{19,62(t_1 - t_3)}{v_{t3}^2}}$$

Gleichung 3) gilt für jede Art von Bewegung in horizontalen Gerinnen. Fliesst das Wasser am Ende des Gerinnes, nachdem es den Querschnitt in t_3 passirt hat, in t_4 frei in die Luft aus, so liefert uns Gleichung 2) § 85 dafür die Beziehung

$$v_{t4} = (\varrho\beta) \sqrt{2gt_3 + 2v_{t3}^2}$$

und setzt man hierin gemäss § 85 $\beta = 0,707$, auch für ϱ den Maximalwerth 0,963 also für $(\varrho\beta) = 0,681$, auch für $2g$ den Werth 19,62 in Metermaass, so wird daraus

$$4) v_{t4} = 3,017 \sqrt{t_3 + 0,102 v_{t3}^2}.$$

Zwischen t_3 und t_4 setzt sich das Wasser dann selbstverständlich in beschleunigte Bewegung.

Da aber durch t_4 nicht mehr Wasser als durch t_3 fließen kann, muss die Gleichung statthaben

$$t_4 \cdot v_{t4} = t_3 v_{t3} \text{ und } v_{t4} = \frac{t_3}{t_4} v_{t3}$$

Setzt man den hierdurch gefundenen Ausdruck für v_{t4} in Gleichung 4) ein und entwickelt daraus t_4 so erhält man

$$5) t_4 = \frac{0,332 t_3 v_{t3}}{\sqrt{t_3 + 0,102 v_{t3}^2}}.$$

Für $t_3 = 0,2$ und $v_{t3} = 2$ ergibt sich hieraus beispielsweise $t_4 = 0,17$. Soll $t_4 = t_3$ werden, so muss

$$\frac{0,332 v_{t3}}{\sqrt{t_3 + 0,102 v_{t3}^2}} = 1$$

sein, woraus die Bedingung folgt

$$t_3 = 0,008 v_{t3}^2 \text{ oder } v_{t3} = 11,2 t_3$$

d. h. am Ende eines offenen Gerinnes fliesst das Wasser ohne Einsenkung an der äussersten Kante frei über, wenn dessen Geschwindigkeit mindestens das 11,2fache des Wasserstandes beträgt.

Verlässt das Wasser das Gerinne nicht frei fallend, sondern vermittelt eines daselbst angebrachten vollkommenen Ueberfallschützes von der Breite des Gerinnes und man bezeichnet für diesen Fall mit n das Verhältniss der Ueberfallhöhe zur Wassertiefe in demselben, so erhält man aus Gleichung 2) § 85, wenn man darin $H = nt_3$ und

$$v_0 = \frac{Q}{bt_3} \text{ setzt,}$$

$$6) t_3 = \frac{0,371}{n} \left(\frac{Q}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{1 - 2n^2(e\beta)^2}{(e\beta)^2}} \text{ für Metermaass.}$$

Ist der am Ende des Gerinnes angebrachte Ueberfall ein unvollkommener und liegt der Unterwasserspiegel um die Höhe h höher als die Ueberfallsschwelle, so erhält man aus Gleichung 2) § 87, indem man darin $H + h = nt_3$ also $H_m = nt_3 - \frac{h^2}{nt_3}$ setzt, auch für v_0 die vorige Substitution, macht

$$7) t_3 \left(t_3^2 - \frac{h^2}{n^2} \right) = \frac{0,051}{n^3} \left(\frac{Q}{b} \right)^2 \left(\frac{1 - 2n^2(e\beta)^2}{(e\beta)^2} \right).$$

Für $h = \text{Null}$ wird Gleichung 7) selbstverständlich identisch mit Gleichung 6).

Hiermit möchten so ziemlich alle Verhältnisse erschöpft sein, welche beim Ausflusse durch Vermittelung vorgelegter Gerinne, oder beim Ueberfüllen aus einem Gefässe in das andere unter constanter Druckhöhe vorzukommen pflegen. Einige Beispiele werden auch hier zur Veranschaulichung des Gebrauches von Gleichung 1) bis Gleichung 7) erwünscht sein.

Aufgabe 1. Nach Versuchen von Lesbros ergab eine quadratische Oeffnung von 0,2 M. in der Seitenwand eines grössern Behälters, vor welcher ein gleich breites horizontales Gerinne von 3 M. Länge angebracht war, einen Ausfluss-Coefficienten von 0,602 und zwar bei einer Druckhöhe von 0,5 M. über der obern Kante der Mündung. Wie gross mussten bei diesem Versuche t_1 , t_2 , t_3 und t_4 sein?

Auflösung. Der Ausfluss - Coefficient ist auf die Druckhöhe $0,5 + \frac{0,20}{2} = 0,6$ M. und auf den Oeffnungs - Querschnitt $0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \square \text{M.}$ bezogen. Nach der § 56 mitgetheilten Versuchs-Tabelle von Lesbros für eine gleiche Oeffnung in dünner Wand ohne vorgelegtes Gerinne ergab sich der Ausfluss-Coefficient mit Berücksichtigung der Constante $\frac{S}{\gamma}$ auf 0,600 und ohne dieselbe auf 0,603, also völlig übereinstimmend mit dem vorliegenden Falle, woraus folgt, dass der Widerstand im Gerinne keine Rückwirkung auf den Ausfluss gehabt haben kann.

Dem Ausfluss-Coefficienten 0,602 entspricht ein Widerstands-Coefficient $e = \frac{0,602}{0,707} = 0,851$ und nach Gleichung 1) § 50 ein Geschwindigkeits-Coefficient $e_1 = 0,647 + \frac{1}{3}e = 0,931$.

$\sqrt{h}$ berechnet sich $= 0,774$, die Ausfluss-Geschwindigkeit $v_{t_0} = 0,602$
 $\sqrt{2gh} = 0,602 \cdot 4,43 \cdot 0,774 = 2,064$, ferner $Q = 0,04 \cdot 2,064 = 0,0826$,
 $\frac{Q}{b} = 0,413$ und $\left(\frac{Q}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,555$.

Die Geschwindigkeit v_{t_1} in t_1 berechnet sich auf $\varrho_1 \sqrt{2gh} = 0,931$.
 $4,43 \cdot 0,774 = 3,192$ und daraus $t_1 = \frac{v_{t_0}}{v_{t_1}} \cdot t_0 = \frac{2,064}{3,192} \cdot 0,2 = 0,129$.

Nach Gleichung 1) § 91 berechnet sich $t_1 = \beta_1 t_0 = 0,128$, wenn man für β_1 den Mittelwerth $0,64$ setzt.

Aus den Werthen von v_{t_1} und t_1 lässt sich schon übersehen, dass nach § 89 der Widerstand an den Seitenwänden des Gerinnes vollständig aufgehoben ist und hier daher nur der am Boden in Betracht kommt. Von der Länge des letztern nämlich 3 M. wird der Theil zwischen t_0 und t_1 , in welchem der Druck auf den Boden durch die Sprungkraft des ausfliessenden Strahles aufgehoben ist und der Theil zwischen t_3 und t_4 bei Berechnung des Widerstandes in Abzug zu bringen sein. Beide Abzüge können ziemlich annähernd auf das $1\frac{1}{2}$ fache der Oeffnungshöhe mithin $0,3$ angenommen werden, wonach die Länge l zwischen t_1 und t_3 mit $2,7$ M. in Rechnung zu bringen ist.

Der Widerstandswerth $\frac{pl}{a\sqrt{h}}$ des Gerinnes zwischen t_1 und t_3 wird
sonach $\frac{0,2 \cdot 2,7}{a\sqrt{0,6}} = \frac{0,64}{a}$. Da das letztere horizontal ist, der Widerstand

also nur dadurch überwunden werden kann, dass das Wasser auf dem Wege von t_1 bis t_3 einen Theil seiner Geschwindigkeit abgibt, wird die Bewegung im Gerinne eine verzögerte, der Querschnitt sich nach t_3 hin also verdicken, t_3 also grösser als t_1 , grösser als $0,129$ sein müssen. Setzen wir versuchsweise $t_3 = 0,15$ resp. $0,16$, so folgt daraus $a = 0,030$

resp. $0,032$, ferner $\frac{pl}{a\sqrt{h}}$, auf die mittlere Geschwindigkeit bezogen,

mit welcher der Widerstand zwischen t_1 und t_3 überwunden werden muss, $22,9$ resp. 22 und dafür aus der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,836$ resp. $0,838$. Dagegen finden wir aus Gleichung 8) § 89 nämlich

$$\varrho = \frac{v}{\sqrt{\frac{v^2}{n^2} + 19,62h_2}}$$

wenn wir darin h_2 negativ $= t_3 - t_1 = 0,150$ resp. $0,160 - 129$ also $= 0,021$ resp. $0,031$, ferner $n = \frac{t_1}{t_3} = \frac{0,129}{0,150}$ resp. $\frac{0,129}{0,160} = 0,860$ resp.

0,806 und $v = v_{t_1} \frac{t_1}{t_3} = 3,192 \cdot 0,860$ resp. $3,192 \cdot 0,806$ also 2,73 resp. 2,57 setzen

$$q = 0,878 \text{ resp. } 0,834.$$

Es lässt sich hieraus schon übersehen, dass der Gleichung 8) § 89 für den Werth $t_3 = 0,159$ genügt wird, dass also die Erhebung bei t_2 in der That wegfällt und das durch t_0 fließende Wasser keinen Gegendruck in t_1 erfährt, also das Gerinne überhaupt keine Einwirkung auf den Ausfluss in t_0 haben kann.

$$v_{t_3} \text{ folgt aus } \frac{Q}{bt_3} = \frac{0,0826}{0,2 \cdot 0,159} = 2,60 \text{ M.}$$

t_4 folgt aus Gleichung 5) mit

$$t_4 = \frac{0,332 \cdot 0,159 \cdot 2,60}{\sqrt{0,159 + 0,102 \cdot (2,60)^2}} = 0,149$$

Aufgabe 2. Wie werden sich dagegen die Verhältnisse der vorigen Aufgabe gestalten, wenn am Ende des Gerinnes durch ein eingesetztes Schutzbrett ein freier Ueberfall gebildet wird, bei dem das Verhältniss der Ueberfallhöhe zur Wassertiefe davor 0,50 ausmacht?

Auflösung. Für $n = 0,50$ findet sich in der Tabelle § 85 Col. B. $(q\beta) = 0,440$. Nimmt man nun versuchsweise an, dass auch durch das vorgesezte Schutzbrett der Ausfluss in t_0 nicht beeinträchtigt werde, also Q unverändert bleibe, so haben wir in Gleichung 4) ausser vorstehenden Werthen für $\left(\frac{Q}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,555$, wie bei Aufgabe 1) berechnet einzusetzen und erhalten dadurch

$$t_3 = 0,688.$$

Nach diesem Resultate lässt sich schon aus Gleichung 2) und 3) § 89 übersehen, dass in t_1 ein erheblicher Rückstau stattfinden, also der Ausfluss durch den angebrachten Ueberfall erheblich beeinträchtigt werden muss.

Nehmen wir versuchsweise an, der Wasserspiegel in t_1 werde dadurch um 0,280 M. gehoben, dann beträgt $t_1 = 0,280 + 0,129 = 0,408$ und da hiermit die ganze Oeffnung von 0,200 M. Höhe um 0,208 M. unter Wasser kommt, bleibt also für den Ausfluss in t_0 nur eine wirksame Druckhöhe von $0,500 - 0,208 = 0,291$ übrig. Dem entsprechend kann in t_0 nunmehr die Ausfluss-Geschwindigkeit nur noch $0,602 \cdot 4,43 \sqrt{0,291} = 1,44$ und die ausfließende Wassermenge $Q = 1,44 \cdot (0,2)^2 = 0,0576$ betragen. Mit Einsetzung dieser Werthe erhält man aus Gleichung 6)

$$t_3 = 0,540.$$

Der mittlere Wasserstand im Gerinne würde somit $\frac{t_1 + t_3}{2} =$

$$\frac{0,540 + 0,409}{2} = 0,475, \text{ die mittlere Geschwindigkeit } \frac{0,0576}{0,2 \cdot 0,475} = 0,6$$

betragen. Vom benetzten Umfange blieben daher an jeder Seite $\frac{(0,6)^2}{2g} = 0,051 \cdot 0,36 = 0,02$ M. ausser Wirksamkeit, wesshalb derselbe nur mit $0,200 + 2 \cdot (0,475 - 0,020) = 1,11$ in Rechnung zu bringen ist.

$$\frac{pl}{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{h}} \text{ berechnet sich also nahezu } = \frac{1,11 \cdot 3}{0,2 \cdot 0,475 \sqrt[3]{0,291}} = 53. \text{ Dafür}$$

findet sich aus der Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,762$.

Für diesen Werth von ϱ wird in Gleichung 6) § 89 nahezu $h_2 = 0$, wenn man darin ausserdem $n = \frac{t_1}{t_3} = \frac{0,409}{0,540}$ und $v = v_{t_3} = \frac{Q}{bt_3} = \frac{0,0576}{0,2 \cdot 0,540}$ setzt.

Für eine verzögerte Bewegung von t_1 nach t_3 muss aber h_2 negativ werden, was in Gleichung 6) § 89 nur geschehen kann, wenn n kleiner als ϱ ist. Für den letzten Fall geben aber Gleichung 7) und 8) § 89, imaginäre Werthe. Hieraus lässt sich der Schluss ziehen, dass zwischen t_1 und t_3 eine beschleunigte Bewegung stattfinden und t_1 grösser als t_3 sein muss.

Setzt man nun $t_1 = 0,500$, so bleibt eine wirksame Druckhöhe von 0,2 M. übrig. Daraus folgt $v_{t_0} = 1,19$, $Q = 0,0476$ und $t_3 = 0,476$ also $n = 1,05$ und $v_{t_3} = 0,500$.

Für letztere Werthe ergibt nun Gleichung 6) § 89, wenn man ϱ , das sich nur sehr unbedeutend ändern kann, mit 0,76 beibehält $h_2 = t_2 - t_3 = + 0,012$, während es nach der gemachten Voraussetzung $0,500 - 0,476 = 0,024$ betragen sollte. Man kann daher nun übersehen, dass t_1 um ein geringes kleiner als 0,500 sein und zwischen 0,490 und 0,500 liegen wird.

Aufgabe 3. Aus derselben Oeffnung soll das Wasser durch Vermittelung eines 10 M. langen Gerinnes zum Abflusse gelangen. Wie viel Gefälle h_2 wird man demselben geben müssen, damit das Wasser mit der unverminderten und gleichförmigen Austritts-Geschwindigkeit v_{t_1} sich durch die ganze Länge des Gerinnes bewege?

Auflösung. Bei Aufgabe 1 ergab sich $v_{t_1} = 3,192$ M.

Für das gesuchte Gefälle h_2 findet man nach Gleichung 10) § 89

$$h_2 = \frac{0,051(1 - \varrho^2)v^2}{\varrho^2} = \frac{0,520(1 - \varrho^2)}{\varrho^2}$$

wenn man für v^2 den Werth von $v_{t_1}^2 = 3,192$ einsetzt.

Da sich bereits bei Aufgabe 1 ergab, dass der Widerstand an den Seitenwänden durch die Grösse der Geschwindigkeit ganz aufgehoben

ist, so berechnet sich wie dort $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ auf $\frac{0,2 \cdot 9,7}{0,2 \cdot 0,129 \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{75,2}{\sqrt[3]{h}}$

$$= \frac{75,2}{\sqrt[3]{\frac{v_{t1}^2}{2g} + h_2}} = \frac{75,2}{\sqrt[3]{0,52 + h_2}}.$$

den Werth von $h_2 = 0,48$ der Bedingungsgleichung 10) § 84 genügt wird.

$\sqrt[3]{h}$ wird dafür $= 1$, $\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ also 75,2 und ϱ aus der Widerstands-Ta-

belle $= 0,72$. Mithin

$$h_2 = \frac{0,52(1 - (0,72)^2)}{(0,72)^2} = \frac{0,52 \cdot 0,48}{0,52} = 0,48.$$

§ 92.

Rückstau.

Durch jede Verengung, welche man in einem Gerinne, Kanale oder Flussbette von constantem Querprofile a und constantem relativen Gefälle α nachträglich anbringt, wird wie bekannt eine gewisse Aufstauung H des ursprünglichen Wasserspiegels erzeugt, welche nach § 88 Gleichung 2) berechnet werden kann. Die Erhebung über dem ursprünglichen Wasserspiegel, welche sich stromaufwärts erstreckt und mit zunehmender Länge um so schneller verschwindet, je stärker das ursprüngliche relative Gefälle und je kleiner das Verhältniss des eingeeengten Querschnittes zu dem ursprünglichen ist, bildet im Längenprofile eine Kurve, die sogenannte Rückstaulinie, welche sich asymptotisch dem ursprünglichen Wasserspiegel stromaufwärts wieder anschliesst. Diese Kurve lässt sich mit hinreichender Sicherheit und Uebereinstimmung mit der Beobachtung aus Gleichung 4) § 37 herleiten, welche ergibt, dass die Strom-Geschwindigkeit sehr nahezu proportional dem Quotienten $\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{p}}$

und die Wassermenge Q dem Produkte $a\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{p}}$ ist. War also vorher der Querschnitt an irgend einem Punkte oberhalb des Aufstaues $= a$ oder bt dem Produkt aus der Breite in die mittlere Tiefe, und der benetzte Umfang $p = b + 2t$, ist dagegen nach einer Erhebung um die Höhe y in der Entfernung x von der Staustelle oder dem Stauwehr $a_1 = b(t + y)$ und $p_1 = b + 2(t + y)$, hat sich ferner das relative Gefälle von α in α_1 ungeändert, so muss, wenn die zufließende Wassermenge sich nicht geändert haben soll, die Beziehung statthaben

$$bt \cdot \sqrt[3]{\frac{bt\alpha}{b + 2t}} = b(t + y) \sqrt[3]{\frac{b(t + y)\alpha_1}{b + 2(t + y)}}, \text{ woraus folgt}$$

$$1) \frac{t^{\frac{3}{2}}\alpha}{b+2t} = \frac{(t+y)^{\frac{3}{2}}\alpha_1}{b+2(t+y)} \text{ oder } \alpha_1 = \frac{t^{\frac{3}{2}}(b+2t+2y)\alpha}{(t+y)^{\frac{3}{2}}(b+2t)}$$

und für den Fall, das t und y gegen b verschwindend klein werden, wie bei Kanälen und Flussbetten von erheblicher Breite im Verhältnisse zur Wassertiefe

$$2) \alpha_1 = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(t+y)^{\frac{3}{2}}} \cdot \alpha.$$

An der Stelle, wo der Aufstau erzeugt wird, ist $y = H$ bekannt vorauszusetzen. Dann findet sich die Neigung des aufgestauten Wasserspiegels daselbst, indem man in Gleichung 2) anstatt y nunmehr H setzt

$$3) \alpha_1 = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(t+H)^{\frac{3}{2}}} \alpha.$$

Da α_1 gleichzeitig die Tangente $\frac{dy}{dx}$ der Rückstaukurve in Bezug auf eine horizontale Abscissenaxe ausdrückt, lässt sich in vorkommenden Fällen nach Gleichung 3) und 2) der gestaute Wasserspiegel graphisch darstellen. Die Gleichung desselben führt auf ein irrationales Integral und sehr complicirte Näherungsformeln für x die Stauweite als Funktion von y der zugehörigen Rückstauhöhe. Für genaue Ermittlungen sind am bequemsten Coefficienten-Tabellen, welche sich zu diesem Zwecke in der Hydromechanik von Rühlmann berechnet finden, wesshalb wir uns hier damit begnügen können, darauf zu verweisen.

Aufgabe. In einem kleinen Flusse, welcher ein durchschnittliches relatives Gefälle von 1:480 und eine Breite von 25 M. hat, befindet sich ein 25 M. breites 1,5 M. hohes Stauwehr. 20 M. oberhalb desselben mündet der Untergraben des benachbarten Mühlenwerkes in den Fluss wieder ein. Das Wehr wird durch die Hochfluth zerstört und der Besitzer baut dasselbe im Einverständnisse mit seinem Nachbarn an einer günstiger gelegenen Baustelle 40 M. stromabwärts in denselben Dimensionen und derselben Höhenlage wieder auf. Der Besitzer des Untergrabens will darauf später die Wahrnehmung gemacht haben, dass bei einem Wasserstande von 0,4 M. über der Wehrkrone sich der Rückstau des neuen Wehres weiter in den Untergraben hineinerstrecke wie der des alten. Hat derselbe mit seiner Beobachtung Recht?

Beantwortung. Die Wassermenge Q , welche bei einem Wasserstande von 0,4 M. über das Stauwehr fließt, findet sich aus Gleichung 3) § 89

$$Q = \frac{e\beta}{\sqrt{1-2(e\beta)^2 \cdot n^2}} bH \cdot 4,43 \sqrt{H}.$$

Nimmt man an, dass der Aufschussboden vor dem Wehre auf 1 M.

Länge um $\frac{1}{2}$ M. ansteige also 2fussig dossirt sei, so berechnet sich n für diesen Fall in der Entfernung $= H$ von der Wehrkrone auf $\frac{2}{3}$ oder 0,66. Dafür ergibt die Tabelle § 85B

$$\frac{q\beta}{\sqrt{1-2(q\beta)^2 \cdot n^2}} = 0,523.$$

Mit Einsetzung dieses Werthes und der Zahlenwerthe für b und H nämlich 25 und 0,4 wird

$$Q = 35,2 \text{ Cub.-M.}$$

Aus Gleichung 5) § 47

$$v = 58,7 \sqrt[6]{\alpha t} \sqrt[6]{\alpha l}$$

folgt für den vorliegenden Fall mit hinreichender Genauigkeit, wenn man $\alpha l = 1$ setzt

$$Q = 35,2 = 58,7 b t^{\frac{3}{2}} \sqrt[6]{\alpha} = 58,7 \cdot 25 t^{\frac{3}{2}} \sqrt[6]{\frac{1}{480}}.$$

Daraus findet man die ursprüngliche Flusstiefe

$$t = 0,65 \text{ M.}$$

Setzt man nun in Gleichung 3)

$$\alpha_1 = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(t + H)^{\frac{3}{2}}} \cdot \alpha$$

$t = 0,65$ ferner $t + H = 1,9$ und $\alpha = \frac{1}{480}$, so findet man

$$\alpha_1 = \frac{1}{2400}.$$

In der Entfernung von 20 M. wird $t + H$ hiernach nahezu 1,86 und in der Entfernung von 40 M. vom Stauwehr 1,80. Für letztern Werth ergibt sich

$$\alpha_1 = \frac{1}{2210}.$$

Während also der Wasserspiegel an der Ausmündung des Untergrabens beim alten Stauwehr nahezu $\frac{20}{2360} = 0,009$ über der Krone lag, liegt er beim neuen Stauwehr nahezu $\frac{40 + 20}{2210} = 0,027$ darüber. Der Mühlenbesitzer oberhalb ist also in der That bei dem angegebenen Wasserstande um 0,018 M. benachtheiligt worden und seine Beobachtung war ganz richtig.

Die Differenzial-Gleichung 3) ist für die Berechnung des Rückstaues darum nur als eine annähernde zu betrachten, weil darin das Abhängigkeits-Verhältniss des Widerstandes von der Druckhöhe resp. der Widerstands-Coefficienten von der Länge der Wasserläufe keine Berücksichtigung gefunden hat.

Genauer lässt sich der Rückstau mit Benutzung von Gleichung 8) § 89 ermitteln, zumal wenn die Wassermenge oder die mittlere Geschwindigkeit eines Flusses bekannt ist. Nach Gleichung 6) § 89 war nämlich

$$1) \ h_2 = 0,051 \left(\frac{n^2}{q^2} - 1 \right) \cdot v^2.$$

Wir wählen dazu ein Beispiel, welches sich auch in der Hydromechanik von Rühlmann § 147 behandelt findet.

Ein Strom hat in seinem natürlichen Zustande ein relatives Gefälle von $\frac{1}{5000}$ und eine mittlere constante Wassertiefe von 2 Fuss. Durch den Einbau eines Wehres ist derselbe um 3 Fuss aufgestaut, so dass die Wassertiefe am Wehre 5 Fuss beträgt. Der Rückstau berechnet sich ziemlich übereinstimmend nach den üblichen Formeln und den Rühlmann'schen Tabellen in einer Entfernung stromaufwärts

von 5500 Fuss = 2 Fuss

„ 11700 „ = 1 „

„ 15900 „ = $\frac{1}{2}$ „

„ 19100 „ = $\frac{1}{4}$ „

Die ursprüngliche Geschwindigkeit berechnet sich annähernd nach der Eitelwein'schen Formel = 1,72 Fuss und v die Geschwindigkeit am Stauwehr auf $\frac{2}{5}$ davon mit 0,688.

In einer Entfernung von 11700 Fuss wird nun annähernd $n = \frac{3}{5} = 0,6$.

$\frac{pl}{a\sqrt[3]{h}}$ wird hier $\frac{1}{t\sqrt[3]{h}}$, bei nicht gestautem Wasserspiegel also

$\frac{1}{2\sqrt[3]{h_2}}$ und bei gestautem $\frac{1}{2 \text{ bis } 5\sqrt[3]{h_2}}$, wenn man $\frac{v^2}{2g}$ hier als ver-
schwindend klein vernachlässigt.

Für $l = 11700$ findet sich mit Einsetzung der mittlern Tiefe und des muthmasslichen Werthes von h_2 der Widerstandswerth dieser gestauten Flussstrecke 4180 und $\varrho = 0,164$.

Setzt man nun $n = 0,6$, $\varrho = 0,164$ und $v = 0,688$ in Gleichung 1) ein, so erhält man

$$h_2 = 0,266.$$

Der ursprüngliche Wasserspiegel stieg bei $\frac{1}{5000}$ Gefälle in 11700 Fuss Entfernung vom Stauwehr um 2,34 Fuss. Steigt nun der gestaute um 0,266, so entspricht dies einer Rückstauhöhe von $3,000 + 0,266 - 2,340 = 0,926$ Fuss oder 11,1 Zoll, während die vorerwähnten Rechnungen 12 Zoll ergeben.

Für die erste Strecke bis zu 5500 Fuss berechnet sich in gleicher Weise der Widerstandswerth 263 und ϱ aus der Tabelle 0,501, ferner $n = \frac{4}{5}$ oder 0,80, v behält denselben Werth 0,688 am Stauwehr. Hierfür findet sich

$$h_2 = 0,037.$$

Da vor Anlage des Stauwehres der Fluss $\frac{5500}{5000} = 1,100$ Fuss Gefälle hatte, so beträgt die Rückstauhöhe mithin $3,000 + 0,037 - 1,100 = 1,937$ oder $23\frac{1}{4}$ Zoll, während die anderweite Berechnung 24 Zoll ergab.

Bei 15900 Fuss findet man $\varrho = 0,220$, $n = 0,83$ und $v = 1,178$,

wenn man die Strecke zwischen 11700 Fuss und 15900 Fuss für sich in Betracht zieht. Dem entsprechend ergibt sich

$$h_2 = 0,427$$

während der ursprüngliche Wasserspiegel auf dieser Strecke 0,840 Fuss Gefälle hatte. Das Gesamtgefälle des gestauten Wasserspiegels bis zu diesem Punkte beträgt mithin $0,427 + 0,226 = 0,693$ Fuss, während der ursprüngliche bei $\frac{1}{5000}$ sich um 3,18 erhob. Die Differenz $3,000 + 0,693 - 3,18 = 0,513$ Fuss oder $6\frac{1}{6}$ Zoll stimmt mit den andern Rechnungs-Resultaten bis auf $\frac{1}{6}$ Zoll überein.

§ 93.

Schiefe Wehre.

Die Aufgabe in § 92 giebt uns auch Gelegenheit, die Frage zu beantworten, ob über schief, gegen den Strom gerichtete, Stauwehre ihrer grössern Ueberfalllänge wegen, bei derselben Stauhöhe mehr Wasser fliesst, wie über normal dagegen gerichtete. Vergleicht man nämlich mit der Capacität eines schiefen Wehres nach einander die zweier geraden, von denen man sich das eine durch den Anfangspunkt, das andere durch den stromabwärts liegenden Endpunkt des erstern gelegt denkt und die beide gleiche Höhe damit haben, so folgt ohne Weiteres, dass über das gerade Wehr stromaufwärts mehr, über das stromabwärts weniger Wasser fließen muss, als über das zwischen beiden liegende schiefe Wehr. In einem Flusse mit parallelen Ufern lässt sich also die Wirksamkeit eines jeden schiefen Wehres durch die eines geraden ersetzen, welches das erstere in irgend einem Punkte schneidet und gleiche Höhe damit hat. Nur eine Erweiterung des Wehrrückens in normaler Richtung auf den Stromstrich kann dessen Capacität erhöhen. Ausserdem kann bei unvollkommenen Ueberfällen eine Erweiterung des Flussbettes im Unterwasser das letztere senken und damit die Ueberfallhöhe, also auch die überfliessende Wassermenge vergrössern, ohne den Aufstau oder die Länge des Wehrrückens zu vermehren.

§ 94.

Bewegung in Rohrleitungen.

Wie die Widerstands-Tabelle auch auf die Bewegung in Rohrleitungen Anwendung findet, ist bereits im § 46 gezeigt worden. Wenn auch das daselbst eingeführte Abhängigkeits-Verhältniss $f(h)$ des Gesamt-Widerstandes von der Druckhöhe mit $z \cdot h^2$ eine grössere Uebereinstimmung mit den Beobachtungs-Resultaten ergibt, als die bisher bekannten Experimentalformeln, so ist damit keinesweges ausgeschlossen,

dass sich dafür nicht eine andere gebrochene Potenz von h finden könne, welche diese Uebereinstimmung noch vermehrt. Die Widerstände in Rohrleitungen sind indessen von so vielen unvermeidlichen und unberechenbaren Zufälligkeiten abhängig, die einzelnen in Rechnung zu bringenden Grössen selbst so vielen Beobachtungs-Fehlern unterworfen, dass sich für die Praxis vorläufig wenig Nutzen von der Erzielung einer grössern Genauigkeit der Rechnung erwarten lässt.

Auch die § 70 mitgetheilten Versuche von Eitelwein mit 1 Zoll weiten Röhren können die Richtigkeit dieses Abhängigkeits-Gesetzes nur bestätigen, wenn man berücksichtigt, dass dieselben mit neuen glatt gezogenen Metallröhren angestellt wurden, bei denen es zweifelhaft bleibt, ob sie auch vollständig vom Wasser benetzt wurden. War dies nicht der Fall, so konnte sich der Werth von μ dem entsprechend nur kleiner, also der Ausfluss-Coefficient grösser, aber nicht umgekehrt ergeben. Dagegen will Weisbach durch Versuche den Widerstand in hölzernen Röhren erheblich grösser als bei metallenen gefunden haben. Ein solches Resultat würde allerdings in Widerspruch mit unsern früheren Ausführungen treten, wenn nicht die Beobachtung zeigte, dass abgesehen von den Unebenheiten der Bohrung, welche häufig in einen wohl messbaren Theil des Querschnittes hineinragen, die genässte Holzfläche solcher Rohre mit einer Unzahl feiner und mit unbewaffnetem Auge kaum wahrnehmbarer Holzfäserchen besetzt ist, die einen aussergewöhnlichen Widerstand erzeugen, welcher im zehnten Abschnitte auch zum Gegenstande der Berechnung gemacht werden soll. Ebendasselbst werden auch die hydraulischen Druckverhältnisse, wie solche bei der Bewegung in Rohrleitungen vorkommen, näher untersucht werden. Für die Berechnung des Widerstandes sind dieselben darum wichtig, weil eben ein negativer Druck auf die Rohrwandungen auch den äussern Widerstand aufhebt. Man darf den letztern also nicht unter allen Umständen für die ganze Länge der Leitung berechnen, sondern wird in jedem Falle erst zu untersuchen haben, ob in allen Theilen derselben der hydraulische Druck positiv ist, oder mit andern Worten, ob dass sich hindurchbewegende Wasser einen Gegendruck auf das nachfolgende ausübt, oder das letztere im Gegentheile mit einem Theile der Athmosphären-Spannung nach sich saugt.

Wir werden uns demnach hier darauf beschränken können, die ausserordentlichen Widerstände, welche durch Profil-Änderungen und Krümmungen in Rohrleitungen erwachsen und in Rechnung zu bringen sind, zum Gegenstande der nähern Erörterung zu machen.

§ 95.

Erweiterungen und Verengungen in Rohrleitungen.

Im Allgemeinen liegt ein praktisches Bedürfniss zu einer eingehenden theoretischen Bestimmung der Widerstände, welche beim Durchgange des Wassers durch Verengungen und Erweiterungen erwachsen, zur Zeit nicht vor, weil hierüber von Weisbach zahlreiche und erschöpfende Versuche angestellt, auch Experimental-Gesetze daraus hergeleitet sind, die sich in fast völliger Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Rationaltheorie befinden. Dieselben sind in seinem Lehrbuche der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik Band 1 mitgetheilt, wesshalb darauf verwiesen werden kann, und es wird daher hier vorzugsweise unsere Aufgabe sein, in den von Weisbach gefundenen Resultaten eine Sonderung der Kraft- und Druck-Verluste von denen der eigentlichen Widerstände, welche die Cohäsions-Arbeit erzeugt, vorzunehmen. Auch diese Aufgabe findet sich indessen bereits § 64 und 65 vollständig gelöst, wenn man aus den daselbst entwickelten allgemeinen Gleichungen die Anwendungen für specielle Fälle macht. Die darin gesondert auftretenden Werthe von β und ϱ unterscheiden auch in jedem speciellen Falle Kraftgrösse und Widerstand.

Wie § 64 und 65 bereits entwickelt, folgt aus der allgemeinen für jede Art der Bewegung gültigen Gleichung

$$1) \quad v = (\varrho\beta) \sqrt{2gh}$$

$$2) \quad h = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{(\varrho\beta)^2} = \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \left(\frac{1}{(\varrho\beta)^2} - 1 \right),$$

dass man sich die Gesamt-Druckhöhe h , welche die Bewegung erzeugt, aus zwei Summanden h_v und h_r zusammengesetzt denken kann, deren erster h_v , die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, ausschliesslich auf Erzeugung

von v und deren zweiter, ein Vielfaches dieser Geschwindigkeitshöhe, ausschliesslich auf Ueberwindung der Widerstände thätig ist. Den letztern Theil h_r pflegt man mit „Widerstandshöhe“ und den Faktor

$\frac{1}{(\varrho\beta)^2} - 1$, welcher angiebt, ein wie Vielfaches der Geschwindigkeitshöhe auf die Ueberwindung der Widerstände verwendet werden muss,

pflegt man in der ältern Hydraulik mit dem „Widerstands-Coefficienten“ zu bezeichnen, während wir damit und wohl mit grösserem Rechte, ϱ denjenigen Faktor bezeichnet haben, mit dem man die theoretische Ausfluss-Geschwindigkeit $c = \beta \sqrt{2gh}$ multipliciren muss, um die effektive zu erhalten. Wir wollen desshalb übereinkommen, den

Faktor $\frac{1}{(\varrho\beta)^2} - 1$, welcher sich in dem Weisbach'schen Werke mit

ζ bezeichnet findet, zum Unterschiede von ϱ dem unsrigen als „ältern“ zu bezeichnen. Die Beziehungen zwischen beiden finden sich also leicht, wie folgt:

$$3) \zeta = \frac{1}{(\varrho\beta)^2} - 1$$

$$4) (\varrho\beta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$$

und für den besondern Fall, dass der Uebergang aus einer Geschwindigkeit in die andere allmählig ohne Contraktion, oder in stetem und vollem Anschlusse an die Gefässwandungen erfolgt, also $\beta = 1$ ist,

$$5) \zeta = \frac{1}{\varrho^2} - 1$$

$$6) \varrho^2 = \frac{1}{\zeta + 1}.$$

Hiernach lassen sich für jeden besondern Fall die Beziehungen zwischen den Ergebnissen der Rationaltheorie und der Experimental-Wissenschaft feststellen oder vereinigen. Da die Entwicklungen § 64 und 65 sowie § 79 auch für alle bei Rohrleitungen gewöhnlich vorkommenden Fälle gelten und auch im Uebrigen bei letztern keine Widerstands-Erscheinungen auftreten, die sich nicht leicht auf bereits behandelte Fälle zurückführen lassen, werden wir uns nunmehr damit begnügen können, zur Erläuterung der Anwendung einige Aufgaben durch Rechnung zu lösen.

Aufgabe 1. Aus einem Reservoir fliesse unter der Druckhöhe $= 1$ M. durch ein 25 M. langes, 0,1 M. weites Rohr Wasser ab. Man setze nun in das Rohr einen Blechschieber ein, welcher in der Mitte eine Oeffnung hat, die nur 0,5 des Rohrquerschnittes gross ist. Um wie viel wird der Ausfluss dadurch vermindert werden, und wie stellt sich das Resultat zu den Weisbach'schen Versuchen?

Auflösung 1. $\frac{1}{d\sqrt{h}}$ berechnet sich hier auf 250. Dafür findet man ϱ in der Widerstands-Tabelle 0,366. In Gleichung 3) § 64

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{(\varrho_0\beta_0)^2} + \frac{a_0^2}{a_1^2(\varrho_1\beta_1)^2}} \text{ u. s. w.}}$$

wird nun für den vorliegenden Fall β der Ausfluss-Coefficient für die Rohröffnung $= 1$, ferner ϱ_0 der Widerstands-Coefficient der Rohrleitung, wie oben gefunden, 0,366 und $\frac{a_0}{a_1}$, das Querschnitts-Verhältniss zwischen der Ausfluss-Oeffnung des Rohres und der des eingesetzten Schiebers $\frac{1}{0,5} = 2$.

($\varrho_1\beta_1$) Den Ausfluss-Coefficienten der Oeffnung in letzterm findet man aus Tabelle § 53 für das Querschnitts-Verhältniss 0,5 mit 0,683. Mit Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{7,46 + 8,58}} = 0,250 \sqrt{2gh}.$$

Der Ausfluss-Coefficient wird also durch die eingesetzte Verengung von 0,366 auf 0,250 vermindert.

Der Werth von ζ für den Widerstand derselben folgt daraus gemäss Gleichung 3) mit $8,58 - 1 = 7,58$.

Die Weisbach'schen Versuche erstrecken sich auf den vorliegenden Fall nicht und auch seine Näherungsformeln lassen diese Aufgabe ungelöst. Dagegen sind von ihm Versuche mit Schiebern in cylindrischen Röhren angestellt, welche den Rohrquerschnitt indessen nur an einer Seite verengen. Dafür findet er $\zeta = 4,77$ bei einem Querschnitts-Verhältnisse von 0,50. Der Theil n des Rohrumfanges, welcher gleichzeitig Oeffnungsumfang bleibt, berechnet sich nach der angewendeten Schieberform auf etwa 0,60. Nach § 80 ist behufs Bestimmung des Ausfluss-Coefficienten für eine derartige Oeffnung in die Tabelle § 53 für $\frac{a}{A}$ einzusetzen $\frac{a}{A} + \left(1 - \frac{a}{A}\right)n$, also hier $0,50 + (1 - 0,50) \cdot 0,6 = 0,80$.

Demgemäss findet man ($\varrho_1\beta_1$) = 0,829, also $\frac{a_0^2}{a_1^2(\varrho\beta)^2} = \frac{2^2}{(0,829)^2} = 5,82$ und $\zeta = 5,82 - 1 = 4,82$, folglich in grosser Uebereinstimmung mit dem Weisbach'schen Versuchs-Resultate, welches $\zeta = 4,77$ ergab.

Aufgabe 2. Um wie viel würde der Ausfluss in demselben Rohre beeinträchtigt werden, wenn man anstatt des dünnen Schiebers eine gleich grosse Verengung jedoch in Form eines wohl ausgerundeten Mundstückes anbringen wollte?

Auflösung. Für diesen Fall wird $\varrho_1\beta_1 = 0,96$ und $\frac{a_0^2}{a_1^2(\varrho_1\beta_1)^2} = 4,34$ anstatt 8,58, der Ausfluss-Coefficient 0,291 anstatt 0,366, ferner $\zeta = 4,34 - 1 = 3,34$.

Weisbach fand für eine ähnliche Verengung, die jedoch nicht gerade sehr vollkommen ausgerundet war, $\zeta = 3,75$.

Aufgabe 3. Die vorige Aufgabe werde dahin modificirt, dass der Austritt des Wassers aus der mundstückartigen Verengung und der Wiedereintritt in den ursprünglichen Rohrquerschnitt durch eine ganz allmähliche Erweiterung, deren halber Divergenzwinkel 8° (vergl. § 73) nicht übersteigt, vermittelt werde. Wie wird der Ausfluss sich hier nach stellen?

Auflösung. Nach § 72 berechnet sich für diesen Fall $(\varrho_1\beta_1)$, auf den engsten Querschnitt bezogen, mit $0,93\sqrt{2} = 1,31$, also $\frac{a_0^2}{a_1^2 \cdot (\varrho_1\beta_1)^2}$ mit 2,32 und ζ mit 1,31. Der Ausfluss-Coefficient wird dadurch 0,321, also nur um $0,366 - 0,321 = 0,045$ unerheblich vermindert.

Aufgabe 4. Anstatt einer Verengung werde in dieselbe Rohrleitung eine cylindrische Erweiterung von 1 M. Länge eingeschoben, deren Durchmesser dem doppelten Rohrdurchmesser gleich komme, also 0,2 M. sei. Die Uebergänge sollen scharfkantig ohne Ausrundung geformt sein. Wie wird dieselbe auf den Ausfluss wirken?

Auflösung. Der allgemeine Ausdruck Gleichung 3) § 64 giebt für diesen Fall mit Einsetzung der von Auflösung 1) beizubehaltenden Zahlenwerthe

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{7,46 + \frac{a_0^2}{a_1^2(\varrho_1\beta_1)^2} + \frac{a_0^2}{a_0^2 \cdot (\varrho_2\beta_2)^2}}} \\ = \sqrt{\frac{2gh}{7,46 + \frac{1}{(\varrho_1\beta_1)^2} + \frac{1}{(\varrho_2\beta_2)^2}}}$$

$(\varrho_1\beta_1)$ findet man in der Tabelle § 78 für das Querschnitts-Verhältniss 0,25 mit 0,826 und $(\varrho_2\beta_2)$ wird hier $= 1$.

$$\text{Also } v = \sqrt{\frac{2gh}{7,46 + 1,47 + 1}} = 0,318\sqrt{2gh}.$$

Würde die eingeschobene Erweiterung einen unendlich grossen Querschnitt haben, so müsste $\varrho_1\beta_1 = 0,815$ gesetzt werden, wonach der Ausfluss-Coefficient sich noch etwas kleiner ergeben muss.

Macht endlich die Länge derselben nicht, wie hier, einen verschwindend kleinen, sondern einen erheblichen Theil der ganzen Rohrlänge aus, so ändert sich auch der Werth von ϱ , weil der Leitungswiderstand in dem erweiterten Theile nach Verhältniss des grössern Durchmessers und der geringern Geschwindigkeit kleiner wird. Nimmt man beispielsweise die Länge des 0,2 M. weiten Rohrtheiles auf 10 M. und die des nur 0,1 M. weiten, durch welches das Wasser zum schliesslichen Ausflusse gelangt, auf 15 M., so findet sich, dass nach Gleichung 4) § 38 der Widerstands-Werth für das erstere anstatt mit $\frac{1}{D}$ nur mit $\frac{1}{D} \cdot \frac{d}{D} = \frac{ld}{D^2}$, also $\frac{10 \cdot 0,1}{0,04} = 25$ in Rechnung gebracht werden darf, während er sich für das letztere auf $\frac{15}{0,1} = 150$ berechnet. Man hat also ϱ , weil $h = 1$ vorausgesetzt für $\frac{1}{\frac{150}{3} + 25} = 175$ in der Widerstands-Tabelle zu suchen und findet dafür 0,416.

§ 96.

Widerstand in Knien und Krümmungen.

Wenn das in einer Rohrleitung sich bewegende Wasser durch ein Knie in derselben zu einer plötzlichen Richtungs-Änderung gezwungen wird, so muss dasselbe an derjenigen Rohrwand, welche die Ablenkung erzeugt, eine gewisse lokale Pressung erleiden. Im Abschnitt X wird dieselbe Gegenstand der nähern Untersuchung sein. Diese lokale Pressung muss nicht nur nach rückwärts hin eine Rückwirkung auf die Zuströmungs-Bewegung, also einen Druckhöhen-Verlust erzeugen, welcher durch sie gemessen wird, sondern auch nach vorwärts hin eine lokale Beschleunigung und in Folge dessen eine Verdünnung des Querschnittes, in jedem Rohre von constanter Weite, also ein partielles Vakuum. Der Druckhöhen-Verlust kann daher eben so wohl nach den Gesetzen des Wasserstosses, als den § 94 entwickelten Gesetzen der Profil-Verengung berechnet werden. Die letztere ist eben eine Funktion des ersteren. Da die Gesetze des Wasserstosses, wie sich Abschnitt X zeigen wird, wiederum aus dem Gesetze der Centrifugal-Bewegung herleiten, lässt sich der in Rede stehende Verlust auch aus dem letztern bestimmen.

Weisbach hat denselben mit genügender Sicherheit durch Versuche ermittelt und für ζ gefunden, wenn α den Ablenkungs-Winkel bezeichnet

$$1) \zeta = 0,9457 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + 2,047 \sin^4 \frac{1}{2} \alpha.$$

Unter dem Ablenkungs-Winkel ist derjenige verstanden, welcher den Winkel, unter welchem zwei Rohrstücke zusammenstossen, zu 180° ergänzt. Nach Gleichung 1) berechnen sich für verschiedene Ablenkungs-Winkel nachstehende Werthe von ζ

$\alpha =$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Wenn schon Gleichung 1) nur eine Experimentalformel ist, kommt sie in der Form dem wirklichen Abhängigkeits-Gesetze doch sehr nahe. Dem letztern nach müsste ζ mit dem sogenannten Paralleldrucke des schiefen Stosses, nämlich mit $\sin^2 \alpha$ wachsen. Für $\sin^2 \alpha$ gilt aber nach trigonometrischen Lehrsätzen der allgemeine Ausdruck

$$\sin^2 \alpha = a \sin^2 \frac{1}{2} \alpha - b \sin^4 \frac{1}{2} \alpha,$$

worin allerdings $a = +4$ und $b = -4$ ist.

Folgen mehrere Knie einer Leitung auf einander, so erwachsen für die folgenden nur in dem Falle neue Gleichung 1) entsprechende Ver-

luste, wenn zwischen je zwei auf einander folgenden wieder ein voller Anschluss des Wassers an die Rohrwandung, also ein erneuter Geschwindigkeits-Wechsel stattgefunden hat, nicht aber, wenn das Wasser mit der vom ersten Knie erhaltenen Pressung beschleunigt auch die nachfolgenden Kniee passirt. Der letztere Fall tritt ein, wenn die Kniee dicht auf einander folgen und sämtliche Ablenkungen in einer Ebene erfolgen. Liegen die Schenkel des nachfolgenden Kniees nicht in der Ebene des vorhergehenden, sondern unter einem Winkel von 90° dagegen, so beträgt der Druckhöhen-Verlust nach Weisbach nur etwa $\frac{2}{3}$ desjenigen, welcher aus Gleichung 1) folgt.

Im Allgemeinen werden solche Kniee bei jeder rational construirten Rohrleitung eben dieser Verluste wegen vermieden und gehörig ausgerundet. Ist die Ausrundung derart beschaffen, dass das Wasser den Rohrquerschnitt überall füllt und gar kein Vakuum entsteht, so wird auch der Druckhöhen-Verlust gleich Null und es lässt sich auch gar kein mechanisches Moment auffinden, welches das Vorhandensein eines solchen zu erklären vermag. Die Bedingungen dafür sind bereits § 33 hergeleitet worden.

In Gleichung 1) daselbst

$$2) \quad r = \frac{d\gamma v^2}{g(s_1 + z)}$$

bezeichnet r den kleinsten Krümmungs-Halbmesser, v die mittlere Geschwindigkeit, d die Höhe resp. Dicke eines Wasserstreifens von der Breite $= 1$ im Durchschnitt einer durch den Krümmungskreis gelegten Ebene gemessen, z den hydraulischen Druck und s_1 die Adhäsion pro Flächeneinheit. Für luftdichte metallische Flächen ist s_1 etwa $1\frac{1}{2}$ mal so gross als s , also 5,6 Kilogr. pr. $\square$ Meter zu nehmen. Setzt man in Gleichung 2) auch für γ und g die Zahlenwerthe für Metermaass ein, so wird

$$3) \quad r = \frac{102dv^2}{(5,6 + z)}$$

z kann hier ebensowohl positiv als negativ sein und wird durch den Piezometerstand gemessen. Man erkennt aus Gleichung 2), dass der volle Anschluss des Wassers an die Rohrwandung nicht allein von der Geschwindigkeit und dem Krümmungs-Halbmesser, sondern ganz besonders auch von dem hydraulischen Drucke derjenigen Stelle in der Rohrleitung abhängig ist, an welcher die Krümmung angebracht ist. Indessen möchte es in allen Fällen der Praxis genügen, von Gleichung 3) und 4) § 33 Gebrauch zu machen, nämlich

$$4) \quad r = 6,3dv^2 \text{ für kreisrunde Oeffnungen,}$$

$$5) \quad r = 8dv^2 \text{ für quadratische Oeffnungen.}$$

In Gleichung 4) und 5) ist d bis zum Schwerpunkte des halben Rohrquerschnittes an der convexen Seite gemessen.

Ist der Krümmungs-Halbmesser kleiner genommen, so berechnet sich der Druckhöhen-Verlust nach der Verdünnung, welche der Strahl erfährt, wenn er sich von der convexen Seite ablöst. Auch für diese Berechnung haben wir in den früheren Abschnitten genügende Grundlagen gewonnen. Mit Beibehaltung der Grössen und ihrer Bezeichnung, welche in Gleichung 2) gelten, sei d_1 die Höhe resp. Dicke eines durch die überschüssende Centrifugalkraft von d bis auf d_1 verdünnten Wasserstreifens. Es muss dann die Pressung, welche die Verdünnung erzeugt hat, identisch mit der Gleichung 1) § 68

$$6) P = \frac{av^2\gamma}{g} \left(\frac{a}{a_m} - 1 \right)$$

hergeleitet sein, welche die Beschleunigung eines Wasserstreifens vom Querschnitte a aus der Geschwindigkeit v in die $\frac{av}{a_m}$ vom Querschnitte a_m bewirkt.

Bezieht man Gleichung 6) nun auf die Flächeneinheit und das Querschnitts-Verhältniss $\frac{d}{d_1}$, so wird daraus

$$7) P_1 = \frac{v^2\gamma}{g} \left(\frac{d}{d_1} - 1 \right).$$

Die Pressung P_1 kann aber nur durch die von der Centrifugalkraft erzeugte Pressung gemessen werden, deren wirksamer Ueberschuss sich nach § 33 ausdrückt durch

$$P - (s_1 + z) = \frac{2d\gamma v^2}{g(2r + d)} - (s_1 + z)$$

ebenfalls auf die Flächeneinheit bezogen.

Wir haben also damit die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{2d\gamma v^2}{g(2r + d)} - (s_1 + z) = \frac{v^2\gamma}{g} \left(\frac{d}{d_1} - 1 \right).$$

Hieraus entwickelt sich schliesslich

$$8) \frac{d}{d_1} = \frac{2r + 3d}{2r + d} - \frac{g(s_1 + z)}{v^2\gamma}$$

und mit Einsetzung der Zahlenwerthe für Metermaass

$$9) \frac{d}{d_1} = \frac{2r + 3d}{2r + d} - \frac{0,01(5,6 + z)}{v^2}.$$

In Gleichung 9) wird $d = d_1$ wenn

$$\frac{2d}{2r + d} - \frac{0,01(5,6 + z)}{v^2} = 0$$

ist. Entwickelt man hieraus r , so erhält man wie Gleichung 3)

$$10) r + \frac{d}{2} = \frac{102dv^2}{(5,6 + z)}$$

und nur um $\frac{d}{2}$ davon verschieden, also anstatt des kleinern den mittlern Krümmungs-Halbmesser, was daher kommt, dass Gleichung 2) und 3), wie aus ihrer Herleitung § 33 ersichtlich, eine kleine Abkürzung auf Kosten der Genauigkeit erfahren haben.

§ 97.

Zweigrohren.

Aus dem zehnten Abschnitte wird ersichtlich werden, wie das in einem Rohrleitungs-Systeme sich bewegende Wasser trotz seines Bewegungs-Zustandes einer ganz bestimmten und in jedem Querschnitte verschiedenen Pressung unterworfen ist, welche wie auch der hydrostatische Druck auf Druck und Gegendruck beruht, aber eben sowohl positiv wie negativ bis zur Grenze der Athmosphären-Spannung sein kann. Diese Pressung, welche man, wie bereits in den vorhergehenden Paragraphen angedeutet, mit „hydraulischem Druck“ zu bezeichnen pflegt, äussert sich gerade wie der hydrostatische Druck nach allen Richtungen hin mit gleicher Stärke. In der Richtung der Fortbewegung wird sie von den hintern Wassertheilchen gegen die vordern mit gleicher Stärke ausgeübt als wieder empfangen, wie sie ferner auch auf die Seitenwandungen wirkt und durch die Piezometerstände gemessen wird. Will man nun aus einer grösseren Hauptleitung mittelst kleinerer Zweigleitungen Wasser abführen, so giebt der Piezometerstand im Hauptrohre an der Ableitungsstelle das Maximum der Druckhöhe an, welche an der Mündung des Zweigrohres auf Bewegung in dem letztern wirksam werden kann. Hat das Zweigrohr von seiner Mündung im Hauptrohre ab gemessen bis zu seiner Ausströmung mehr Gefälle, als zur Ueberwindung der Widerstände erforderlich ist, so wird ausserdem noch der Ueberschuss auf Erzeugung der Geschwindigkeit in demselben wirksam.

Die durch den Piezometerstand im Hauptrohre gemessene Druckhöhe kommt zur uneingeschränkten Wirkung auf die Bewegung im Zweigrohre, wenn der Eintritt des Wassers in das letztere in derselben Richtung erfolgt, in welcher die Bewegung im Hauptrohre stattfindet. Sie wird um die einfache Geschwindigkeitshöhe des Wassers im Hauptrohre vermindert, wenn der Eintritt normal zum letztern erfolgt und endlich um die doppelte Geschwindigkeitshöhe vermindert, wenn der Eintritt in entgegengesetzter Richtung erfolgen muss.

Der letztere Umstand macht es möglich, dass trotz positiven Piezometerstandes und hydraulischen Druckes in Hauptleitungen, Wasser aus Reservoirs mittelst Zweigleitungen nachgesogen werden kann, wenn solche der Richtung der Bewegung in ersteren entgegengesetzt abgehen.

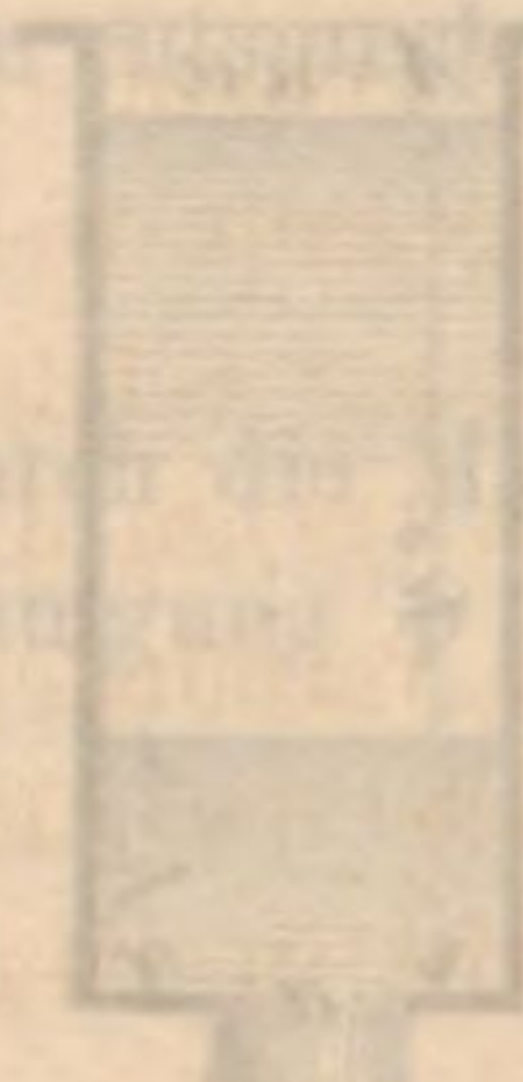
Alle diese Gesetze folgen aus den in den früheren Abschnitten entwickelten Vorstellungen des Zusammenhanges zwischen dem hydrostatischen Drucke und der bewegenden Kraft des Wassers und den im zehnten Abschnitte zur Entwicklung kommenden Grundbegriffen des Wasserstosses und hydraulischen Druckes ohne Weiteres, und ein Beweis derselben könnte nur eine Umschreibung jener Grund-Vorstellungen und Begriffe sein. Sie lassen sich übersichtlich, wie folgt, zum Ausdrucke bringen.

v_0 bezeichne die Geschwindigkeit, mit der sich das Wasser in der Hauptleitung bewegt, z den hydraulischen Druck der Flächeneinheit an der Mündung eines abgehenden Zweigrohres, h_z die demselben entsprechende Wassersäulenhöhe, h_1 das absolute Gefälle des Zweigrohres von der Mitte der Einmündung in das Hauptrohr bis zur Mitte des Ausflusses, resp. bis zum Wasserspiegel des Aufsauge-Reservoirs gemessen, h diejenige Totaldruckhöhe, welche für die Bewegung im Zweigrohre in Rechnung zu bringen ist, v die aus derselben mit Berücksichtigung der bekannten Widerstände resultirende effektive Geschwindigkeit in letzterm und endlich α den Winkel, welchen die Bewegungs-Richtung im Hauptrohre mit dem Zweigrohre an der Einmündungsstelle als Scheitelpunkt macht.

Dann hat man also nach dem Vorhergehenden für v die Geschwindigkeit im Zweigrohre die Gleichung

$$1) \quad v = \varrho \sqrt{2g(h_1 + h_z) - (1 - \cos \alpha)v_0^2} \text{ für Ausfliessen.}$$

$$2) \quad v = \varrho \sqrt{(1 - \cos \alpha)v_0^2 - 2g(h_1 + h_z)} \text{ für Aufsaugen.}$$



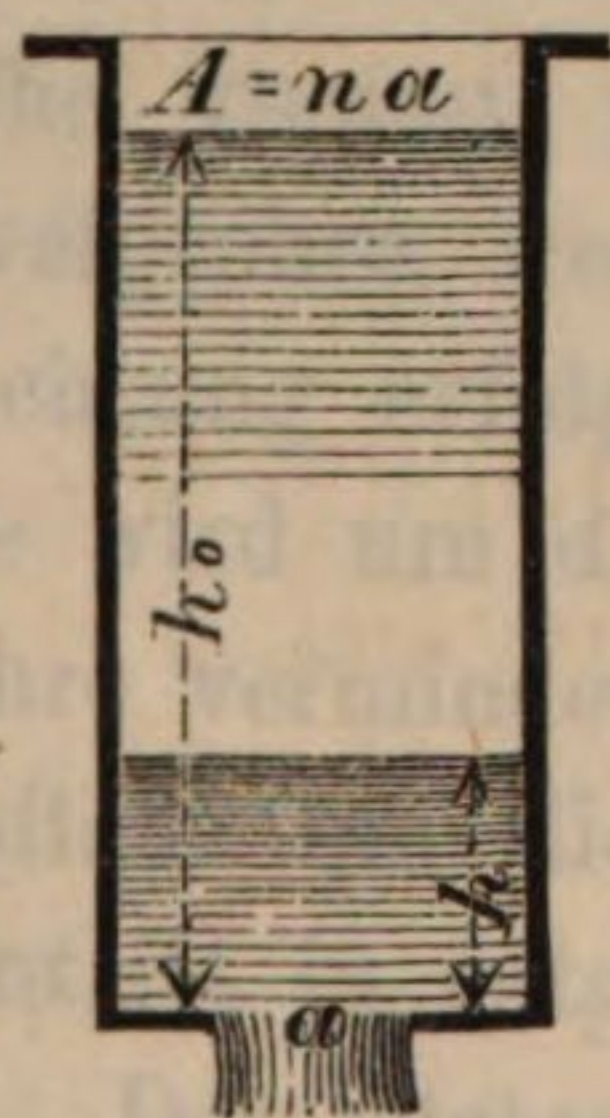
Neunter Abschnitt.

Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe.

§ 98.

Die Gesetze des Ausflusses unter veränderlicher Druckhöhe, wie sie sich für die Praxis entwickeln lassen und namentlich behufs Bestimmung der Zeit, welche zur selbstthätigen Entleerung eines Gefässes durch eine darin angebrachte Oeffnung erforderlich ist, sowie auch zur Ermittlung der Ausfluss-Coefficienten Anwendung finden, gelten genau nur so lange, als die Ausfluss-Oeffnung nicht grösser, wie etwa $\frac{1}{10}$ des Gefäss-Querschnittes ist, in welchem die Entleerung stattfindet. Wird dieselbe grösser, so hört die Ausfluss-Bewegung allmählig auf, eine mit der Abnahme der Druckhöhe verzögerte zu sein, kann vielmehr für ein ganz bestimmtes Querschnitts-Verhältniss zeitweise eine constante und schliesslich eine beschleunigte werden, wie sie auch der Bewegung des freien Falles völlig gleich werden kann, wenn die Oeffnung dem Gefäss-Querschnitte gleich ist. Bereits im § 52 ist auf den Unterschied aufmerksam gemacht, welcher zwischen der Bewegung des freien Falles und der Ausfluss-Bewegung des Wassers durch Oeffnungen in Gefässwänden besteht. Man kann sich diesen Unterschied am schärfsten durch die Betrachtung der Vorgänge in einem mit Wasser gefüllten vertikalen Rohre versinnlichen, dessen Inhalt man sich durch eine Oeffnung im Boden entleeren lässt.

Fig. 107.



Figur 107 stelle den vertikalen Durchschnitt eines solchen Rohres vor. In der dünnen Bodenwand desselben befinde sich die Oeffnung vom Querschnitte a . Der Querschnitt A des Rohres sei n mal so gross als a , mithin na . Ursprünglich sei das Rohr bei geschlossener Oeffnung bis zur Höhe h_0 über dem Boden mit Wasser gefüllt. Man denke sich die Oeffnung plötzlich aufgezogen und nach einer gewissen Zeit den Wasserstand im Rohre bis auf die Höhe h über dem Boden gesunken.

Wenn $n = 1$ also $a = A$ wäre, so müsste das Wasser vom ersten Augenblicke an mit einer von Null bis $\sqrt{2g(h_0 - h)}$ beschleunigten Geschwindigkeit bis h gesunken sein und sofern man sich die innere

Rohrfläche nicht nur als vollkommen glatt und eben, sondern auch als unbenetzt denken will, würden dieser Bewegung nicht einmal Widerstände entgegen gewirkt haben, weil freifallende Körper keinen Druck auf einander ausüben können. Das letzte Wassertheilchen würde schliesslich den Endquerschnitt a mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh_0}$ verlassen, die ganze Wassersäule in diesem Augenblicke indessen mit ihrem Schwerpunkte die Lage $\frac{1}{2}h_0$ unter der Oeffnung einnehmen. Die Beschleunigung, mit welcher das Wasser diese Bewegung beginnt, ist gleich g der Beschleunigung der Schwere.

Anders gestaltet sich dies Verhältniss, wenn a kleiner als A ist. Die Kraft, welche auf Bewegung der im Rohre befindlichen Wassersäule vom Gewichte $Ah_0\gamma = nah_0\gamma$ und der Masse $\frac{nah_0\gamma}{g}$ wirkt, wird in diesem Falle kleiner, als ihr eigenes Gewicht und durch die von der Oeffnung hervorgebrachte Aufhebung des Gegendruckes $ah_0\gamma$ gemessen. Bezeichnen wir die auf Weiterbewegung der Wassersäule h im Gefässe wirkende Kraft mit P_1 , so drückt sich P_1 mit Berücksichtigung des Widerstandes, wenn derselbe durch den Widerstands-Coefficienten ϱ gemessen wird, aus durch

$$1) P_1 = a\varrho^2 h\gamma.$$

Entgegen wirkt dieser Kraft P_1 diejenige P , welche in der Oeffnung dazu erforderlich ist, der Ausflussmasse $\frac{av\gamma}{g}$ pro Zeiteinheit den Geschwindigkeits-Zuwachs $v\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, also die Beschleunigung $v\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ zu ertheilen, und sich nach § 68 Gleichung 1) ausdrückt durch

$$2) P = \frac{av^2\gamma}{g}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Unter v ist hier die der augenblicklichen Wasserstandshöhe h entsprechende Ausfluss-Geschwindigkeit in der Oeffnung a verstanden, während die Zuströmungs-Geschwindigkeit im Gefässe derselben entsprechend $\frac{v}{n}$ sein muss.

Die Differenz $P_1 - P$ Gleichung 1) und 2) dividirt durch die Masse des im Rohre befindlichen Wassers, muss die Beschleunigung p des letztern ausdrücken, mithin

$$3) p = \frac{g}{n}\varrho^2 - \frac{v^2}{nh}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

sein. Für ϱ und $n = 1$ wird in Gleichung 3) ganz richtig $p = g$ der Beschleunigung der Schwere. Soll nun bei abnehmender Druckhöhe eine gesetzmässige Verzögerung der Ausfluss-Bewegung eintreten können, so darf p für die Wassermasse im Gefässe nicht positiv sein, sondern

muss einen negativen Werth annehmen können, oder mindestens gleich Null werden. Für diese Bedingung folgt aus Gleichung 3)

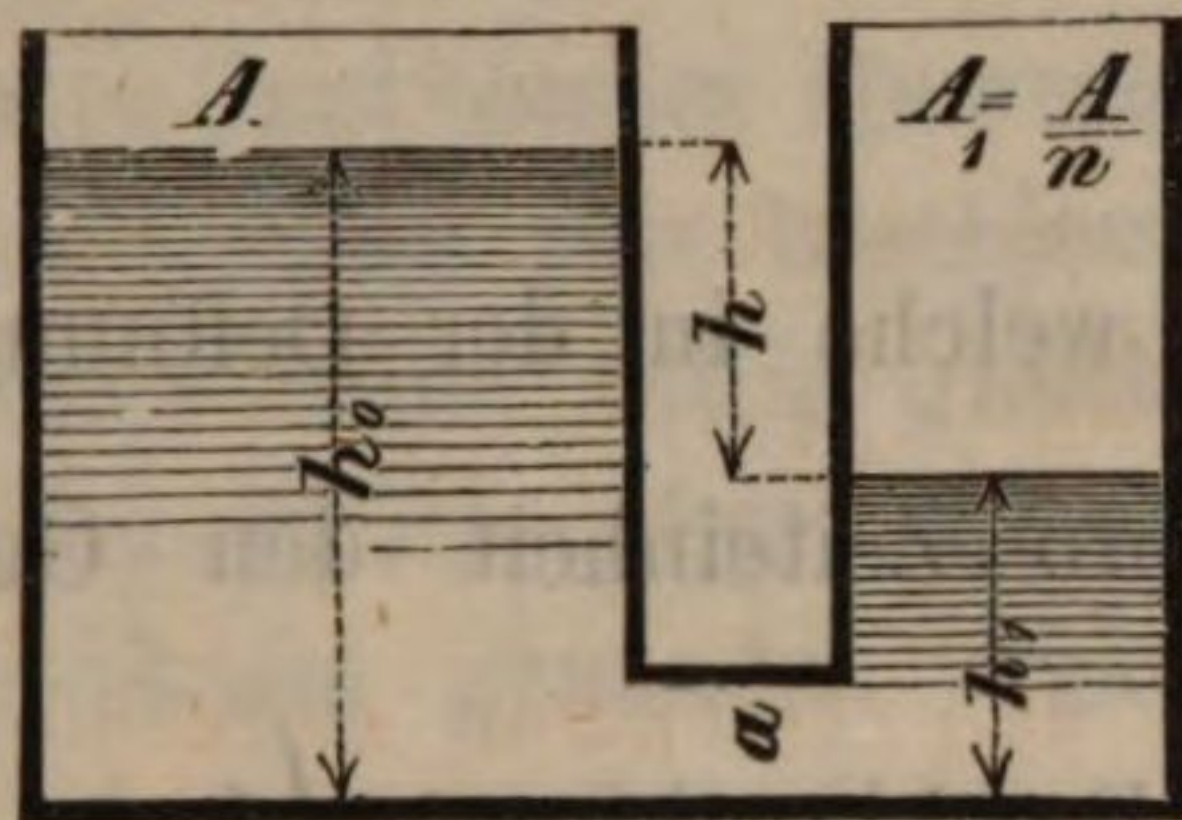
$$4) \quad v^2 = \frac{ng\varrho^2h}{n-1}.$$

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, dass derselben um so eher genügt werden kann, je grösser n wird und je mehr der Bruch $\frac{n}{n-1}$ sich der Einheit nähert. Für $\varrho = 1$ folgt, dass n nicht kleiner als 2 sein darf, wenn v nicht grösser als $\sqrt{2gh}$ werden muss, was nicht möglich ist. Die selbstthätige Entleerung eines Rohres also durch eine Oeffnung, welche nicht kleiner als der halbe Rohrquerschnitt ist, kann unter keinen Umständen mit verzögerter, sondern nur mit beschleunigter Geschwindigkeit erfolgen.

§ 99.

Figur 107a stelle den Durchschnitt durch zwei mittelst eines Rohres

Fig. 107a.



oder einer Oeffnung vom Querschnitte a verbundene also communicirende Gefässe A und A_1 dar. Mittelst der Oeffnung a werde Wasser aus dem Gefässe A vom Querschnitte A in das kleinere Gefäss A_1 vom Querschnitte $A_1 = \frac{A}{n}$ übergefüllt, ohne dass A während

der Ueberfüllzeit Zufluss von Aussen her erhalte. Nach einem gewissen Zeitraume, seit dem die Ueberfüllung beim ursprünglichen Wasserstande h_0 in A begonnen, sei die Wassermenge Q aus A in A_1 abgelaufen und die Wasserstands-Differenz, welche ursprünglich h_0 war, sei $h_0 - h_1 = h$ geworden. In Folge dessen wird

der Wasserstand in A um die Höhe $\frac{Q}{A}$ gesunken, oder in A_1 um die $\frac{nQ}{A}$ gestiegen sein. Wie bereits § 98 erwähnt, handelt es sich in allen

derartigen Fällen darum, die erforderliche Ueberfüllzeit T , oder wenn die letztere und die Wasserstands-Differenzen beobachtet werden, den entsprechenden Ausfluss-Coefficienten der Oeffnung a zu finden, sofern derartige Versuche zu diesem Zwecke angestellt sind. Die jederzeitige Druckhöhe h wird während des Ueberfüllens von h_0 bis Null, mit ihr also auch die jederzeitige Ausfluss-Geschwindigkeit von $(\varrho\beta)\sqrt{2gh_0}$ bis Null abnehmen, sofern nämlich nicht die Oeffnung oder ein zwischen beiden Gefässöffnungen vorhandenes Verbindungsstück derart beschaffen oder derart lang ist, dass der Widerstands-Coefficient ϱ mit der Druck-

höhe veränderlich wird, welcher letzterer Fall ausgeschlossen werden soll. Verstehen wir nun unter v die Ausfluss-Geschwindigkeit in der Oeffnung a , welche gleichzeitig mit der Wasserstand-Differenz h eingetreten ist und unter dQ die unendlich kleine Wassermenge, welche während des nächstfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchens dt zum Ausflusse gelangt, so haben wir zunächst die Grundbedingung

$$1) dQ = avdt.$$

Während desselben Zeittheilchens ist aber die Aenderung von h , wie leicht zu übersehen,

$$dh = \frac{dQ}{A} + \frac{ndQ}{A} = \frac{dQ}{A}(1+n),$$

woraus folgt

$$2) dQ = \frac{Adh}{n+1}.$$

Durch Gleichsetzung von Gleichung 1) und 2) erhält man

$$3) \frac{Adh}{n+1} = avdt \text{ und } dh = \frac{a(n+1)vdt}{A}$$

v muss aber jederzeit sein

$$v = (\varrho\beta) \sqrt{2g} \sqrt{h}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 3), so wird

$$4) \frac{dh}{2\sqrt{h}} = \frac{a(n+1)(\varrho\beta) \sqrt{2g} dt}{2A}.$$

Das Integral dieser Differenzial-Gleichung in den Grenzen zwischen $h = h_0$ bis $h = h_1$ und $t = T$ bis $t = 0$ giebt

$$5) \sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} = \frac{(\varrho\beta) \sqrt{2g}(n+1)aT}{2A}$$

$$6) T = \frac{2A(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{(\varrho\beta) \sqrt{2g} \cdot (n+1)a}$$

$$7) (\varrho\beta) = \frac{2A(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{T \sqrt{2g}(n+1)a}.$$

Will man nach Gleichung 6) beispielsweise die Ueberfüllzeit zweier gekuppelten Schleusenkammern berechnen, so hat man nur nöthig $h_1 = 0$ zu setzen.

Aus der leicht ersichtlichen Beziehung $h_1 = h_0 - \frac{Q}{A}(n+1)$ findet sich schliesslich auch der Werth der überfüllten Wassermenge Q mit

$$8) Q = \frac{A(h_0 - h_1)}{n+1}.$$

Setzt man $n = 0$, so erhält man aus Gleichung 5) bis 8) die Ausdrücke für den Ausfluss aus einem einzigen Gefässe in die freie Luft, eben so die für den Eintritt unbegrenzten Wassers durch eine Oeffnung in dem

Boden eines darin eingetauchten Gefässes, wenn h_0 die Wasserstands-Differenz am Anfange und h_1 die am Ende bedeutet.

Den Werth von $(\varrho\beta)$ muss man je nach der Form der Oeffnung nach Anleitung der früheren Abschnitte entnehmen. Befindet sich die letztere nicht auf dem Gefässboden, sondern über demselben, so muss man die Rechnung zunächst für die Füllung bis zum unteren Rande der Oeffnung, also für $n = 0$ und demnächst von hier ab bis zur Ausgleichung der Wasserspiegel vernehmen. Aehnlich hat man zu verfahren, wenn die beiden Gefässe in verschiedenen Höhen Abtheilungen von verschiedenen Querschnitts-Verhältnissen haben. Ist die Aenderung der letztern eine stetige und giebt als Funktion von h in Gleichung 4) eingesetzt einen integrirbaren Ausdruck, so wird auch in einem solchen Falle eine exakte Lösung möglich.

In die Differenzial-Gleichung 4)

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{a(n+1)(\varrho\beta)\sqrt{2g}dt}{A}$$

hat man dann nur nöthig für n den entsprechenden Funktionswerth einzusetzen. Sie erhält dann die allgemeinere Form

$$9) \int_{h_1}^{h_0} \frac{dh}{(f(h)+1)\sqrt{h}} = \frac{a}{A} \cdot (\varrho\beta)\sqrt{2g} \cdot T.$$

Auch kann man die veränderliche Druckhöhe h als Funktion von der Ausflusszeit in Rechnung zu bringen Gelegenheit haben und dann als Integral der Differenzial-Gleichung 3) mit Einsetzung des Werthes von v

und unter Berücksichtigung, dass $Q = \left(\frac{h_0 - h_1}{n+1}\right)A$ ist, schreiben

$$10) h_0 - h_1 = \frac{a(n+1)(\varrho\beta)\sqrt{2g}}{A} \int_0^T dt \sqrt{f(t)}$$

$$11) Q = a(\varrho\beta)\sqrt{2g} \int_0^T dt \cdot \sqrt{f(t)}.$$

Nach Gleichung 11 lässt sich beispielsweise die durch eine Oeffnung vom Querschnitte a , welche h_1 Meter unter der Ebbe liegt, während der Zeit T frei ausfliessende Wassermenge berechnen, wenn man n darin Null setzt und für $f(t)$ das Abhängigkeits-Verhältniss des Wasserstands-Wechsels von der Fluthzeit einführt. Für $n = \text{Null}$ wird eben $\frac{A}{n}$ unendlich, was dem freien Ausflusse entspricht.

Zehnter Abschnitt.

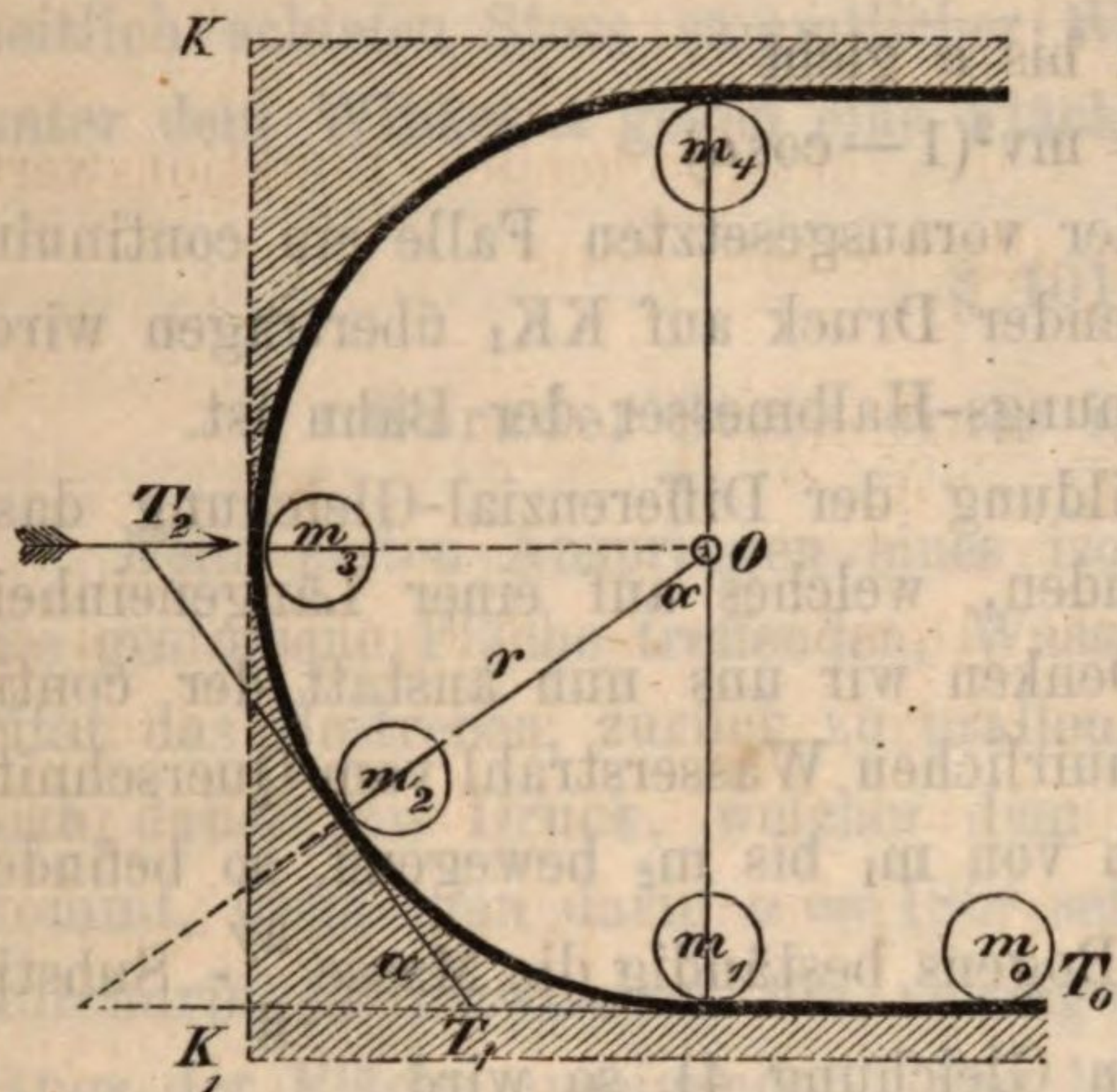
Stoss und Widerstand des bewegten Wassers gegen feste Körper, Reaktion und hydraulischer Druck.

§ 100.

Allgemeine Entwicklung des Wasserstosses.

Die Masse M , unter der wir uns beispielsweise eine Billardkugel vorstellen wollen, komme in der Richtung von m_0 nach m_1 Figur 108

Fig. 108.



normal zu KK_1 mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v an und werde vom m_1 aus durch eine feststehende Form KK_1 genöthigt, aus der tangential geraden in die halbkreisförmige Bahn $m_1 m_3 m_4$ um O mit $Om_2 = r$ als mittlern Radius beschrieben, einzulenken. Reibung werde bei dieser Bewegung nicht erzeugt oder verschwindend klein gedacht. Die Grösse des Widerstandes, welchen die Form KK_1 in jedem Momente, während M diese Bahn durchläuft,

in centraler Richtung nach O hin entgegensetzen muss, drückt sich als die sogenannte Normalkraft nach dem bekannten Gesetze der Centrifugal-Bewegung aus durch

$$1) P = \frac{Mv^2}{r}.$$

Setzt man hierin r unendlich klein, so wird P , wie leicht ersichtlich, als Stosswirkung ohne Deformationsweg unendlich. In dem Momente der Lage m_2 unter dem Centriwinkel α ist also die Componente von P normal auf KK_1

$$2) P_p = P \sin \alpha = \frac{Mv^2}{r} \cdot \sin \alpha$$

und die parallel mit KK_1

$$3) P_s = P \cos \alpha = \frac{Mv^2}{r} \cdot \cos \alpha.$$

Der Schub also, welcher gegen KK_1 ausgeübt wird, während die Kugel M ihre halbkreisförmige Bahn durchläuft, wächst nach Gleichung 2) mit $\sin \alpha$ von Null bis P , erreicht in m_3 sein Maximum und wird in m_4 wieder gleich Null.

Denkt man sich nun anstatt einer einzigen Kugel eine ununterbrochene Reihenfolge von solchen, während einer gewissen Zeit hindurch die Bahn durchlaufend und setzt die Grösse des davon auf die Längeneinheit des Bogens $r\alpha$ treffenden Massenanteils $= m$, so befindet sich fortdauernd in jedem unendlich kleinen Bogenelemente $r d\alpha$ die Masse $mr d\alpha$. Bezeichnet man ferner den Druck, welchen ein solch unendlich kleines Massentheilchen in der Lage m_2 unter dem Centriwinkel α normal gegen KK_1 ausübt, mit dP_p , so erhalten wir durch Substitution in Gleichung 2) die Differenzial-Gleichung

$$dP_p = \frac{mr d\alpha \cdot v^2}{r} \cdot \sin \alpha = mv^2 \cdot \sin \alpha d\alpha.$$

Das Integral derselben von Null bis α giebt

$$4) P_p = mv^2(1 - \cos \alpha)$$

und zugleich an, dass in dem hier vorausgesetzten Falle ein continuirlicher und ganz constant anhaltender Druck auf KK_1 übertragen wird, welcher unabhängig vom Krümmungs-Halbmesser der Bahn ist.

Unter m hatten wir bei Bildung der Differenzial-Gleichung dasjenige Massenanteilstheilchen verstanden, welches auf einer Längeneinheit der Bogenbahn Raum findet. Denken wir uns nun anstatt der continuirlichen Kugelreihe einen continuirlichen Wasserstrahl vom Querschnitt a mit der Geschwindigkeit v sich von m_1 bis m_2 bewegend, so befindet sich auf jeder Längeneinheit des Bogens beständig die Masse $\frac{av}{g}$. Substituiert man diesen Werth für m in Gleichung 4), so wird

$$5) P_p = \frac{av^2}{2g} \cdot 2(1 - \cos \alpha).$$

Dem ganz analog erhält man aus Gleichung 3) als Differenzial-Gleichung

$$6) P_s = \frac{av^2}{2g} \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

für den Seitendruck parallel mit KK_1 .

Denkt man sich den Wasserstrahl am Ende des Bogens α in m_2 die Kreisbogenbahn verlassen und in tangentialer Richtung nach T_2 weiter gehend und will den Druck kennen lernen, welchen er stetig normal gegen die Tangente ausübt, längs der er weiter geht und den wir mit „Normalstoss“ P_n bezeichnen wollen, so ergeben sich aus einer einfachen Betrachtung der Winkelverhältnisse in Figur 108 durch Gleichung 5) und 6) dafür zwei Componenten, nämlich

$$\frac{av^2}{2g} \cdot 2(1 - \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \text{ und } \frac{av^2}{2g} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Die Summe beider macht

$$7) P_n = \frac{a\gamma v^2}{2g} \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

und wollen wir endlich auch den Druck kennen lernen, welchen das Wasser parallel mit der tangential abgehenden Fläche nach rückwärts ausübt, so berechnet sich derselbe durch

$$\frac{a\gamma v^2}{2g} \cdot 2(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - \frac{a\gamma v^2}{2g} \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha$$

auf

$$8) P_r = \frac{a\gamma v^2}{2g} \cdot 2 \cdot (\cos \alpha - 1)$$

nämlich negativ, wie erwartet, gleich, aber gerade entgegengesetzt dem Paralleldrucke P_p Gleichung 5) als Reaktion desselben.

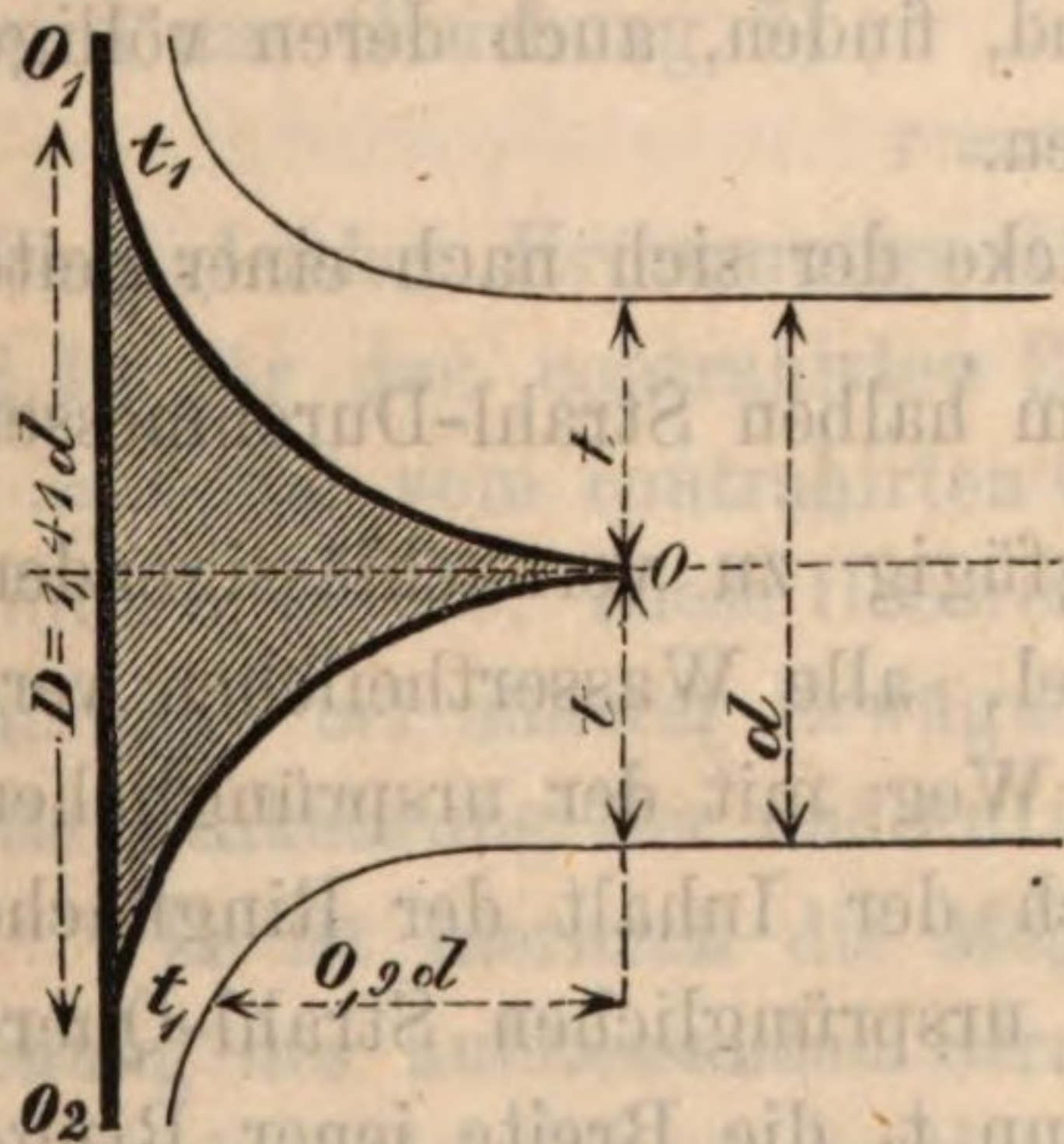
Gleichung 5) löst die Aufgaben für den Stoss des Wassers normal gegen eine Fläche, welche es unter dem Winkel α mit unverminderter Geschwindigkeit wieder verlässt, Gleichung 6) diejenigen für den einheitlich schiefen Stoss sämtlicher Wasserfäden nach einer Richtung unter dem Winkel α gegen eine Fläche.

§ 101.

Gerader Stoss eines isolirten Strahles.

Beim ersten Anspringen eines isolirten Strahles haben die, zuerst die gestossene Fläche treffenden, Wassertheilchen vermöge ihrer Elasticität das Bestreben, zurück zu prallen. Im ersten Augenblicke, äussert sich daher ein Druck, welcher dem Werthe von Gleichung 5) nahe kommt, wenn man darin $\alpha = 180^\circ$ setzt. Die nachfolgenden Theilchen durchdringen inzwischen die vorangegangenen und treiben dieselben längs der Fläche auseinander. Die letzteren setzen dem einen Widerstand entgegen, welcher ihrem Normaldrucke gleichkommt, so dass sich schliesslich ganz naturgemäss der ruhende Presskegel 00_10_2 Figur 109

Fig. 109.



bildet, dessen Mantelfläche den nachfolgenden Wassertheilchen als Führung dient, welcher sie nach einem bestimmten Krümmungs-Halbmesser folgen, der bei 0 am grössten, bei 0_1 und 0_2 am kleinsten ist. In diesem Beharrungszustande empfängt die Fläche 0_10_2 einen Druck, welcher $\alpha = 90^\circ$ in Gleichung 5) entspricht, also

$$1) P_p = 2 \cdot \frac{a\gamma v^2}{2g}$$

beträgt und der merkwürdiger, aber

wohl ganz natürlicher, Weise demjenigen gleichkommt, welcher erforderlich ist, um einen contrahirten Wasserstrahl vom Querschnitte a durch eine Oeffnung in dünner Wand zu treiben, oder der Wassermenge av die Beschleunigung v zu ertheilen.

Da das Wasser nicht ganz ohne Widerstände den Weg von 0 nach 0_1 und 0_2 zurücklegt und letztere durch ihre normal gegen $0_1 0_2$ gerichtete Componente den Druck gegen die Fläche vermehren, so müssen die Versuche den Werth von P_p Gleichung 1) etwas grösser ergeben. Von Bossut, Bidone, Langsdorf und Weisbach angestellte Versuche weisen mit ziemlicher Uebereinstimmung diese Differenz auf 5 Prozent nach, so dass man für die praktische Benutzung mit hinreichender Genauigkeit in Metermaass schreiben kann

$$2) P_p = 107av^2.$$

Nach den Beobachtungen des Verfassers ist der innere Durchmesser der Kegelbasis D ganz unabhängig von der Geschwindigkeit und hat den constanten Werth $d\sqrt{2} = 1,41d$. Man kann diese Basis sehr deutlich auf einer Glasplatte beobachten und messen, die man über einen Springbrunnenstrahl hält. Der kleinste Krümmungs-Halbmesser an dem äussern Umfange des Strahles bei 0_1 und 0_2 wurde gleich $0,35d$ beobachtet.

Trägt man diese Maasse zusammen, so findet sich merkwürdiger Weise die umgekehrte Form des contrahirten Strahles nach Figur 73 wieder, wenn man dessen unendlich grosse Ausbreitung auf den Spiegel des die Fläche benetzenden Wassers setzt.

Da der innere Presskegel $00_1 0_2$ sich in völlig hydrostatischem Gleichgewichte und unter gleicher Pressung aller seiner Theile befindet, und dieser Bedingung zwischen 0 und 0_1 resp. 0_2 nicht anders als durch Kreisbögen von constantem Krümmungs-Halbmesser entsprochen werden kann, so findet sich dessen Form leicht, wenn man durch 0 und 0_1 resp. 0_2 Kreisbögen mit dem Radius $1,05d$ (vergl. Figur 73) legt.

Von diesen Bögen aus lässt sich die äussere Begrenzung des aufgestauchten Wasserstrahles, wie nachstehend, finden, auch deren völlige Uebereinstimmung mit Figur 73 nachweisen.

An der Spitze des Kegels muss die Dicke der sich nach einer Seite hin ausbreitenden Wassermenge $t = \frac{d}{2}$ dem halben Strahl-Durchmesser sein. Da abgesehen von dem als geringfügig zu vernachlässigenden Abscheerungs-Widerstande am Kegelmantel, alle Wassertheilchen vermöge ihrer vollkommenen Elasticität ihren Weg mit der ursprünglichen Geschwindigkeit v fortsetzen, so muss auch der Inhalt der Ringfläche vom mittlern Durchmesser D gleich dem ursprünglichen Strahl-Querschnitte vom Durchmesser d sein, also, wenn t_1 die Breite jener Ring-

fläche oder die Dicke des durch dieselbe fliessenden ringförmigen Wasserstreifens bezeichnet

$$D\pi t_1 = \frac{d^2\pi}{4}$$

woraus folgt

$$3) \quad t_1 = \frac{d^2}{4D}.$$

Bezeichnet man die zu t und t_1 gehörigen Krümmungs-Halbmesser mit r und r_1 , so findet man dafür nach § 100 Gleichung 1)

$$4) \quad r = \frac{mv^2}{P} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{m_1v^2}{P}.$$

Hier sind die auf die Flächeneinheit der Kegeloberfläche treffenden Massentheilchen m und m_1 durch die Dicken t und t_1 bestimmt, nämlich

$$5) \quad m = \frac{t\gamma}{g} = \frac{d\gamma}{2g} \quad \text{und} \quad m_1 = \frac{t_1\gamma}{g} = \frac{d^2\gamma}{4Dg}.$$

Da der gesammte Wasserkegel 00_10_2 mit seiner $\frac{D^2\pi}{4}$ grossen Basis nach Gleichung 1) die Pressung $\frac{a\gamma v^2}{g} = \frac{d^2\pi v^2\gamma}{4g}$ auf die Fläche 00_1 ausübt, muss auch jedes darin enthaltene Theilchen dieser Pressung unterworfen, also P für jede Flächeneinheit des innern Kegelmantels sein

$$6) \quad P = \frac{d^2\gamma v^2}{D^2g}.$$

Setzt man die Werthe aus Gleichung 5) und 6) in Gleichung 4) ein, so erhält man

$$7) \quad r = \frac{D^2}{2d} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{D}{4}.$$

Es bestätigt sich hierdurch zunächst, dass die Krümmungs-Halbmesser, also auch die Form des Presskegels, unabhängig von der Geschwindigkeit sind und lediglich vom Strahl-Durchmesser bestimmt werden.

Mit Einsetzung des für $\frac{D}{d}$ beobachteten Zahlenwerthes von 1,41 wird aus Gleichung 7)

$$r = d \quad \text{und} \quad r_1 = 0,35d.$$

Den gleichen Krümmungs-Halbmesser $r_1 = 0,35d$ ergiebt Gleichung 9) § 49 für den contrahirten Strahl nach Figur 73 in der Entfernung $l = 0,90d$ vom contrahirten Querschnitte, in völliger Uebereinstimmung mit Figur 109. Diese Uebereinstimmung kann um so weniger auffallen, als man bei näherer Erwägung findet, dass die eine Erscheinung genau die Umkehrung der andern ist.

Es ist hiernach die Möglichkeit gegeben, die Form der Aufstauung des aufstossenden Strahles für jede gegebene Dicke mit mathematischer Schärfe zu bestimmen.

Bei Strahlen von rechteckigem Querschnitte mit von festen Wandungen eingefassten Endflächen, bildet der ruhende Presskörper ein Prisma, dessen Basis der doppelten Strahldicke gleich ist. Da bei rechtwinkligem Aufstossen, nach jeder der beiden nicht eingefassten und einander gegenüber liegenden Seiten die halbe Strahldicke abfliessen muss, auch bei unveränderter Geschwindigkeit constant bleibt, muss auch der mittlere Krümmungs-Halbmesser constant und der Presskörper im Querschnitte von concentrischen Kreisbögen begrenzt sein. Setzt man

in die allgemeine Gleichung $r = \frac{mv^2}{P}$ die entsprechenden Werthe pro Flächeneinheit mit $P = \frac{\gamma v^2}{2g}$ und $m = \frac{d\gamma}{2g}$, so folgt daraus der mittlere Krümmungs-Halbmesser r_m

$$8) r_m = d.$$

So lange man durch eine Platte den aus einer Oeffnung in dünner Wand springenden Strahl nicht in solcher Nähe auffängt, dass der vollkommen contrahirte Querschnitt eine Verdickung dadurch erleidet, so kann, wie schon § 91 ausgeführt worden, auch keine den Ausfluss benachtheiligende Rückwirkung auf das Wasser im Gefässe erfolgen.

Die Minimal-Entfernung von der Oeffnung, welche hierzu erforderlich ist, ergiebt sich nach dem Vorigen auf die Summe der Längen des contrahirten und aufgestauchten Strahles, also auf $1,05 + 0,62 = 1,67d$ oder $1\frac{2}{3}$ des Strahl-Durchmessers, in Uebereinstimmung mit Beobachtungen von Langsdorf. Aus Figur 73 lässt sich auch ganz genau beurtheilen, wie gross die Stossplatte im Verhältnisse zum Strahl-Durchmesser sein muss, damit das Wasser die erstere in paralleler Richtung verlasse, also P_p seinen vollen Werth nach Gleichung 2) erhalte. Schon nach dem Augenmaass lässt sich daraus ersehen, dass erst dann, wenn der Trichter-Durchmesser gleich dem 4fachen Strahl-Durchmesser wird, ein tangentialer Anschluss der sich ausbreitenden Wassertheilchen an die Fläche stattfinden kann. Genau dasselbe Verhältniss fand Langsdorf durch Versuche.

Lässt man einen Wasserstrahl normal in eine glockenartig ausgehöhlte Fläche stossen, so dass er beim Abfliessen von dem innern Rande der Glockenform um einen Winkel von 180° von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt ist, so giebt Gleichung 5) § 100 für diesen Fall

$$9) P_p = \varrho \frac{4a\gamma v^2}{2g}$$

worin ϱ einen noch näher zu bestimmenden Widerstands-Coefficienten bezeichnet. Eine Vergrösserung von P_p durch den Cohäsions-Widerstand kann hier nämlich nicht eintreten, sondern eine im Verhältnisse der benetzten Fläche des vorstossenden zu der des rückgehenden Strahles

stehende Verringerung, die sich für jeden einzelnen Fall beurtheilen und berechnen lässt, da dieser Widerstand durch die Grösse von μ pro Flächeneinheit gemessen wird. Für den günstigsten Fall kann man $\varrho = 0,98$ annehmen und dann für Metermaass schreiben

$$10) P_p = 200av^2.$$

Alle etwa denkbaren Zwischenfälle lassen sich nach dem Vorstehenden leicht in Ansatz und Rechnung bringen. Ist beispielsweise eine begrenzte Stossfläche mit entgegenstehendem Rande versehen, so muss das Wasser vor diesem je nach seiner Höhe eine rückkehrende Bewegung machen, welche den Ablenkungs-Winkel α , also auch P_p , vergrössert. In solchem Falle gelangt man am leichtesten und sichersten durch graphische Darstellung zur Ermittlung desjenigen Werthes von α , welchen man der Berechnung von P_p zu Grunde legen muss.

§ 102. Schiefer Stoss.

Die Betrachtung im § 100 führt uns auch zu exakten Lösungen für alle beim schiefen Stosse des Wassers vorkommende Aufgaben. Es wird in den Gleichung 5) bis 7) § 100 berechneten Stosswirkungen durchaus nichts geändert, wenn ein Wasserstrahl, anstatt in der Kreisbogenbahn mm_1m_2 Figur 108 sich zu bewegen, in der Richtung der Tangente T_0T_1 unter dem Winkel α gegen die Fläche T_1T_2 stösst und dadurch um den Winkel α von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Ist die Bogenbahn in der Form der das Wasser leitenden Flächen nicht körperlich vorhanden, so stellt dieselbe sich durch das den Stosswinkel nach dem § 101 entwickelten Gesetze ausrundende und daselbst in Ruhe verharrende Wasser von selber ganz gesetzmässig her. Die Frage also, welche Ausrundungskurve der Wasserradschaufeln die für den Effekt vortheilhafteste sei, kann hiernach nur als eine durchaus müssige und gleichgültige betrachtet werden. Jede stetige Kurve erfüllt den gleichen Zweck.

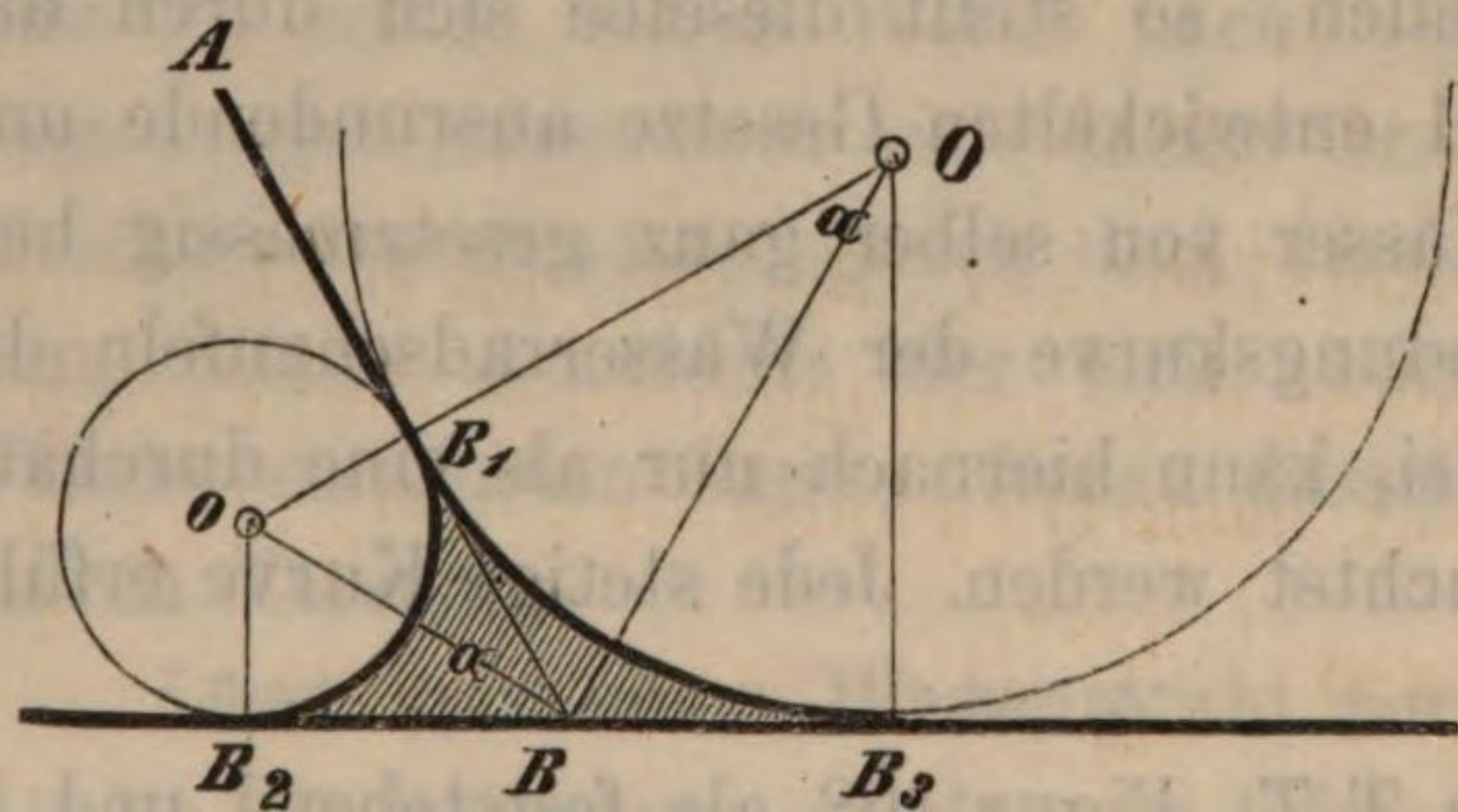
Denkt man sich die Fläche T_0T_1 Figur 108 als feststehend und in T_1 mit T_1T_2 in stets dichtem Anschlusse, T_1T_2 aber darauf verschiebbar, so wird der Reaktionsdruck P_r Gleichung 8) § 100 durch den festen Widerstand von T_0T_1 aufgenommen und kann daher die Stosswirkung auf T_1T_2 , wie solche Gleichung 5) bis 7) § 100 berechnet worden, nicht modificiren. Dieser Fall trifft mit wenigen Ausnahmen bei Wasserkraft-Maschinen zu, in denen ein Strahl mit verhältnissmässig langem und dünnem Querschnitte von der Leitschaufel auf die Radschaufel überspringt, wenn dessen Enden zwischen festen Wandungen begrenzt sind

und sich nur verhältnissmässig wenig nach der Seitenrichtung ausbreiten können.

Anders werden jedoch die Verhältnisse, wenn Wasserstrahlen sich entweder nach zwei entgegengesetzten oder nach allen vier Seiten frei auf der gestossenen Fläche ausbreiten können. In solchen Fällen bedingt die Reaktionskraft Gleichung 8) § 100 eine Gegenwirkung, die einen Theil des Strahles nöthigt, in einer dem andern entgegengesetzten Richtung, also Figur 108 in der Verlängerung von T_2 über T_1 hinaus, zu entweichen und sich dahin auszubreiten. Der Ablenkungs-Winkel wird dann in jedem Axenschnitte ein positiver (α) und ein negativer ($180^\circ - \alpha$), wenn die Ablenkung nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen erfolgen kann; erfolgt sie dagegen nach allen Richtungen, so wird der Ablenkungs-Winkel nach jeder derselben ein anderer, also auch der Durchschnittswerth von $1 - \cos \alpha$ ein ganz verschiedener. Beide Fälle lassen ganz exakte Lösungen nicht nur durch die Beobachtung, sondern auch durch Rechnung zu. Die erstere macht man am sichersten auf einer matt geschliffenen und horizontal gestellten Schiefertafel, indem man den constanten Inhalt einer kleinen Spritze darauf unter verschiedenen Winkeln entleert und den jedem Richtungswinkel entsprechenden Umfang aufzeichnet, welcher schliesslich benetzt worden ist, sowie auch die Lage des Stosspunktes darin. Dadurch erhält man ein genaues Bild von dem Verhältnisse der nach den verschiedenen Richtungen stattgehabten Ablenkungen zu den Massentheilchen, welche denselben Folge gegeben haben.

Zur Erläuterung der Rechnung diene Figur 110. AB sei die Mittel-

Fig. 110.



linie eines unter dem Winkel α gegen die unbegrenzte Fläche B_2B_3 mit der Geschwindigkeit v aufstossenden isolirten Strahles, welcher sich nach allen Richtungen darauf ausbreitet, $B_1B_2B_3$ die Durchschnitts-Ebene durch die Axe des Presskegels, B_1 dessen Spitze, die in einer gewissen nach § 101 zu berechnenden Entfernung von B liegen muss. Da B_1B_2 und B_1B_3 nach § 101 Kreisbogen sein müssen, die sich in B_1 gegenseitig und in B_2 und B_3 die gestossene Fläche berühren, so folgt aus dieser Vorbedingung durch eine einfache trigonometrische Betrachtung

$$OB_1 = r = B_1B \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$OB_1 = R = B_1B \cot. \frac{\alpha}{2}$$

Das Verhältniss der beiden entgegengesetzten Krümmungs-Halbmesser ergibt sich daraus für jeden durch die Strahlaxe AB und die Ebene B₂B₃ gelegten Schnitt

$$1) \frac{r}{R} = \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{\cot^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Weil aber in Gleichung 4) § 101 v und P constant sind, so muss der Quotient $\frac{r}{R}$ auch denjenigen der Massentheilchen ausdrücken, welche in je zwei rechts und links von der Strahlaxe sich einander gegenüber liegenden Flächenelementen des Kegelmantels in einander entgegengesetzter Richtung zur Ausbreitung gelangen. Man kann also auch schreiben

$$2) \frac{m}{m_1} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Zunächst haben wir nun für den Fall, dass ein Strahl sich nur nach zwei einander um 180° entgegengesetzten Richtungen beim Stosse ausbreiten kann, zwei entgegengesetzte Seiten desselben also durch feste Wandungen begrenzt sind,

$$3) m + m_1 = \frac{a\gamma}{g}$$

wie im § 100 zu Gleichung 5) auf die Längeneinheit des Wasserlaufes bezogen. Entwickelt man nun m und m₁ aus Gleichung 2) und 3), so erhält man für x = α dem Stosswinkel

$$m = \frac{a\gamma}{2g}(1 - \cos \alpha)$$

$$m_1 = \frac{a\gamma}{2g}(1 + \cos \alpha).$$

Die Masse m wird um den Winkel 180° - α, die m₁ um α abgelenkt. Beide Ablenkungen zusammen geben die Gesamtwirkung des Parallelstosses gegen die Fläche und zwar nach Gleichung 4) § 100

$$P_p = \frac{a\gamma v^2}{2g}(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) + \frac{a\gamma v^2}{2g}(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$$

oder

$$4) P_p = \frac{2a\gamma v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Auch diesen Werth von P_p geben die darüber angestellten Versuche aus demselben Grunde, wie bei Gleichung 1) § 101, um etwa 5 Prozent grösser, wesshalb man in Metermaass auch hier schreiben kann

$$5) P_p = 107av^2 \sin^2 \alpha.$$

Setzt man die erhaltenen Werthe von m und m₁ dagegen in Gleichung 7) § 100 ein, so erhält man für den Normaldruck gegen die Fläche

$$6) P_n = \frac{2\alpha\gamma v^2}{2g} \sin\alpha$$

wieder, woraus folgt, dass derselbe durch die vom Winkel α abweichende Ablenkung eines Theiles der aufstossenden Wasserfäden nicht geändert wird.

Bei einem isolirt auf eine unbegrenzte Fläche schief unter dem Winkel α aufstossenden Strahle werden alle Wasserfäden unter verschiedenen Winkeln abgelenkt. Der kleinste Ablenkungswinkel ist $= \alpha$, der grösste $180^\circ - \alpha$. Zwischen diesen Werthen muss es also einen mittlern geben, welcher der Mittelkraft aller einzelnen Kraftwirkungen entspricht und welcher diejenige einheitliche Ablenkung darstellt, der die ganze stossende Masse unterworfen werden muss, um eine gleiche Wirkung hervor zu bringen. Man kann sich aber auch die Wirkung sämtlicher Fäden durch 4 Gruppen ersetzt denken, von denen je zwei in der Durchschnitts-Ebene Figur 110 und je zwei in einer durch die Strahlaxe normal darauf gelegten Ebene wirksam sind. Die beiden letztern würden dann in entgegengesetzter Richtung jede eine Ablenkung von 90° erfahren, von den beiden erstern, die eine um den Winkel α , die andere um $180^\circ - \alpha$ abgelenkt werden. Bezeichnen wir jeden der beiden dem Ablenkungswinkel von 90° zukommenden Massenanteile mit m , den für den Winkel α mit m_1 und den für den Winkel $180^\circ - \alpha$ mit m_2 , so haben wir zunächst, wenn die in der Längeneinheit des Strahles enthaltene ganze Masse $\frac{\alpha\gamma}{g}$ beträgt für m , m_1 und m_2 die Gleichung

$$7) 2m + m_1 + m_2 = \frac{\alpha\gamma}{g}$$

Aus dem Vorhergehenden und Figur 110 ergeben sich ferner die Beziehungen

$$8) \frac{m_1}{m} = \frac{\tan \frac{180^\circ - \alpha}{2}}{\tan \frac{90^\circ}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$9) \frac{m_2}{m} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{90^\circ}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Entwickelt man aus Gleichung 7) bis 9) die Werthe von $2m$, m_1 und m_2 und sucht nach Gleichung 4) § 100 für jede der 3 Massengruppen den ihrem Ablenkungswinkel zukommenden Werth von P_p , so ergibt die Summe der drei hieraus resultirenden Werthe schliesslich

$$10) P_p = \frac{2\alpha v^2 \gamma}{2g} \sin\alpha$$

in Uebereinstimmung mit einer dafür von Scheffler entwickelten Formel und einigen darüber von Bidone angestellten Versuchen.

§ 103.

Arbeit und Maximalleistung des stossenden Wassers.

Wenn die Fläche, gegen welche ein Wasserstrahl vom Querschnitte a stösst, nicht, wie in den vorhergehenden Paragraphen, als feststehend gedacht wird, sondern in der Richtung des Strahles mit der Geschwindigkeit v ausweicht, während der letztere die Geschwindigkeit V besitzt, so wird die Fläche nur mit der Geschwindigkeit $V - v$ vom Strahle getroffen. Wenn man daher den hervorgebrachten Paralleldruck in der Richtung des letztern mit $\frac{a\gamma v^2}{g} f(\alpha)$ bezeichnet, so wird derselbe in diesem Falle

$$1) P_p = \frac{a\gamma(V-v)^2}{g} f(\alpha).$$

Da die Fläche, während sie diesen Druck empfängt, sich in der Richtung desselben mit der Geschwindigkeit v bewegt, so berechnet sich die während der Zeiteinheit auf sie übertragene Arbeit A

$$2) A = P_p v = a\gamma(V-v)^2 \cdot v f(\alpha).$$

Es wird nun für die Praxis der Wasserkraftmaschinen die Frage von Wichtigkeit, für welches Verhältniss von $V:v$ diese Arbeit ein Maximum wird. Den gesuchten Maximalwerth findet man durch die erste Ableitung des Faktors $(V-v)^2 v$ nämlich

$$(V-v)^2 - 2(V-v) \cdot v$$

wenn man dieselbe gleich Null setzt mit

$$3) v = \frac{1}{3}V.$$

Für diesen Werth von v wird die Maximalleistung A_m

$$4) A_m = \frac{8}{27} a\gamma \frac{V^3}{2g} f(\alpha) = 0,296 \varrho_1^2 Q \gamma h f(\alpha)$$

wenn man gleichzeitig für $aV = Q$ die Wassermenge pro Sekunde und für $V = \varrho_1 \sqrt{2gh}$ einführt.

Nimmt man $f(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ für $\alpha = 90^\circ$ auf 1 an so wird

$$A_m = 0,296 \varrho_1^2 Q \gamma h$$

und für den günstigsten Fall nämlich $f(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ und $\alpha = 180^\circ$

$$A_m = 0,592 \varrho_1^2 Q \gamma h$$

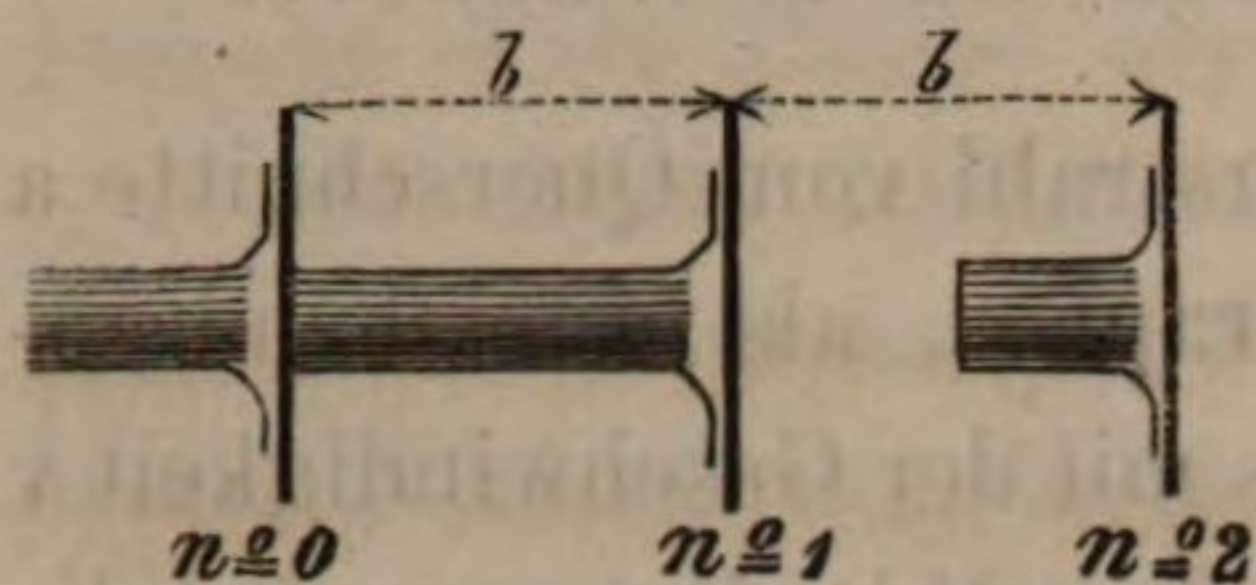
oder $\frac{16}{27}$ des absoluten Arbeitsvermögens des aufstossenden Wassers.

Gleichung 2), 3) und 4) finden auf Turbinen und in allen Fällen Anwendung, wo ein Wasserstrahl stetig ein und dieselbe Schaufel trifft. Es darf nur bei der Anwendung nicht übersehen werden, dass unter v die Geschwindigkeit der ausweichenden Fläche, in derjenigen Richtung, in welcher sie zuerst vom Strahle getroffen wird, verstanden ist.

Anders gestaltet sich das Maximal-Verhältniss, wenn, wie dies bei Zellenrädern der Fall ist, eine Reihe nach einander folgender Schaufeln

von dem einfallenden Wasserstrahle getroffen werden. In Figur 111

Fig. 111.



bezeichne b die gleichmässige Entfernung einer Anzahl von Schaufeln, welche sich hintereinander mit der Geschwindigkeit v in der Richtung des Strahles a vor demselben ausweichend bewegen. Wenn die Schaufel No. 1 den Weg b von 0 bis 1 zurückgelegt hat, denke man sich eine neue

Schaufel No. 0 vor den Strahl geschoben. In diesem Augenblicke befindet sich ein Strahlstück von der Länge b zwischen 0 und 1 abgeschnitten. Auf dem Wege von 0 bis $1 = b$ wirkte der Strahl a auf Schaufel No. 1 mit dem Drucke

$$\frac{a\gamma(V-v)^2}{g} f(\alpha)$$

übertrug also während des Weges b die Arbeit

$$5) A_1 = \frac{a\gamma(V-v)^2 \cdot b}{g} f(\alpha)$$

Nachdem nun das Strahlstück von der Länge b durch Dazwischentreten der Schaufel No. 0 isolirt worden, setzt es seine Stoss-Bewegung gegen Schaufel No. 1 mit der Stoss-Geschwindigkeit $V-v$ fort, bis es nach $\frac{b}{V-v}$ Zeiteinheiten gänzlich aufstossen, seine Länge also Null werden

wird. Während der Zeit $\frac{b}{V-v}$ legt aber die Schaufel No. 1 den Weg $\frac{bv}{V-v}$ zurück und die Arbeit, welche also von dem abgeschnittenen Strahlstücke gewisser Maassen als Nachwirkung übertragen wird, berechnet sich daher auf

$$6) A_2 = \frac{a\gamma(V-v)^2}{g} f(\alpha) \cdot \frac{bv}{V-v} = \frac{ab\gamma(V-v)}{g} v \cdot f(\alpha).$$

Die Gesamt-Arbeit daher, welche durch jede Schaufel übertragen wird, ergiebt die Summe von Gleichung 5) und 6) mit

$$A_3 = \frac{a\gamma b f(\alpha)}{g} \left((V-v)^2 + (V-v)v \right)$$

oder

$$7) A_3 = \frac{a\gamma b}{g} V \cdot (V-v) f(\alpha).$$

Wenn nun n Schaufeln während jeder Zeiteinheit vorstossen, dann wird die vom Wasser an das Rad übertragene Arbeit das n -fache der durch Gleichung 7) ausgedrückten. Multiplicirt man daher Gleichung 7) mit n und berücksichtigt gleichzeitig, dass $nb = v$ sein muss, so wird

$$8) A = \frac{a\gamma}{g} V(V-v) \cdot v \cdot f(\alpha).$$

Hier ergibt sich nun das Maximum von A für das Verhältniss
 $v = \frac{1}{2}V$
 mit

$$9) A_m = \frac{1}{2}a\gamma \frac{V^3}{2g} f(\alpha) = \frac{1}{2}Q_1^2 Q \gamma h f(\alpha).$$

Für $\alpha = 180^\circ$ wird $f(\alpha) = 1 - \cos \alpha = 2$, also der theoretische Maximal-Effekt gleich dem absoluten Arbeits-Vermögen des Wassers, nämlich
 $a\gamma \frac{V^3}{2g}$ oder $Q\gamma h$.

§ 104.

Stoss isolirter Strahlen gegen begrenzte Flächen.

Stösst ein isolirter Strahl vom Durchmesser d normal gegen die Mitte einer Fläche, deren Durchmesser D kleiner als 4d ist, so verlässt er dieselbe an den Rändern unter einem geringern Ablenkungswinkel als 90° und der Werth $(1 - \cos \alpha)$ in Gleichung 5) § 100, mit ihm also auch der übertragene Druck, wird kleiner. Setzt man in Gleichung 8) § 49 für $D = 1 + 2y$ und für $l = x$, so erhält man als Gleichung für die Kurve, welche die äussere Begrenzung der Aufstauchung eines in der Längsaxe durchschnittenen Strahles von kreisförmigem Querschnitte bildet, und zwar auf eine Strahlseite als Axe der x, und den Anfang der Aufstauchung als Coordinatenpunkt, ferner auf den Strahldurchmesser d als Maasseinheit bezogen

$$1) y = \frac{1}{1,975 \sqrt[4]{1,05 - x}} - 0,5$$

und für Strahlen von länglich rechteckigem Querschnitte, welche an den schmalen Enden durch rechtwinklige parallele Wandungen begrenzt sind, also nur nach den beiden entgegengesetzten Richtungen der Breitseiten abfliessen können

$$2) y = \frac{1}{1,95 \sqrt{1,05 - x}} - 0,5.$$

Durch Differenzirung giebt Gleichung 1)

$$3) \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{1}{60,8(y + \frac{1}{2})^3(1,05 - x)^2}$$

und Gleichung 2)

$$4) \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{1}{7,6(y + \frac{1}{2})(1,05 - x)^2}.$$

Aus Gleichung 3) und 4) lassen sich die Ablenkungswinkel mindestens an der Oberfläche der stossenden Strahlen für jede Entfernung vom Anfangspunkte der Aufstauchung oder der Spitze des Aufstau-

chungskegels resp. der Schneide des Prismas genau berechnen. Wenn man hiernach verschiedene Aufstauchungsformen graphisch darstellt, so findet sich, dass der mittlere Ablenkungswinkel gegenüber der Kante, an welcher ein kreisrunder Strahl die gestossene Fläche verlässt, dem äussern Ablenkungswinkel in einer Entfernung e von der Kante gleichkommt, die sehr nahezu das $1\frac{3}{4}$ fache der Dicke t_1 des Strahles daselbst beträgt. Bei rechteckigen an den schmalen Enden begrenzten Strahlquerschnitten dagegen tritt dies Verhältniss, des konstantern Krümmungshalbmessers wegen, bei $e = \text{Null}$ ein. t_1 findet sich in der Entfernung $\frac{nd}{2}$ von der Mittelaxe nach Gleichung 3) § 101

5) $t_1 = \frac{d}{4n}$

Für Strahlen der letztern Art wird t_1 , wie leicht zu übersehen, constant, nämlich

6) $t_1 = \frac{d}{2}$

weil der Strahl sich in zwei gleiche Hälften theilt, die in einem Gerinne von constanter Breite mit unverminderter Geschwindigkeit weiter fliessen.

Nach vorstehenden Daten berechnet sich nachfolgende Tabelle für die Werthe von $(1 - \cos \alpha)$ bei verschiedenen Verhältnissen $\frac{D}{d}$ des Plattendurchmessers D zum Durchmesser d des aufstossenden Strahles.

A. Für rektanguläre an den schmalen Enden eingefasste Strahl-Querschnitte.			B. Für kreisrunde Strahl-Quer- schnitte.		
$\frac{D}{d}$	$\cos \alpha$	$1 - \cos \alpha$	$\frac{D}{d}$	$\cos \alpha$	$1 - \cos \alpha$
2,00	0,464	0,536	1,41	0,324	0,676
2,05	0,438	0,562	1,68	0,177	0,823
2,29	0,345	0,655	2,02	0,093	0,907
2,65	0,221	0,779	2,28	0,054	0,946
3,25	0,123	0,877	2,74	0,021	0,979
4,59	0,044	0,956	3,17	0,008	0,992
5,92	0,020	0,980	3,47	0,003	0,997
7,28	0,011	0,989	4,00	0,001	0,999
10,06	0,004	0,996	—	—	—

Nach Versuchen von Bidone ergab ein kreisrunder, 9 Linien dicker, gegen eine kreisförmige Platte von 24 Linien stossender, Strahl $P_p = 2,09$, ein 12 Linien dicker $P_p = 1,92$ und ein 16 Linien dicker $P_p = 1,56 \frac{av^2\gamma}{2g}$.

Für diese drei Versuche war also $\frac{D}{d} = 2,66$ resp. $2,00$ resp. $1,50$. Durch Interpolation findet man in B der Tabelle dafür $2,1(1 - \cos \alpha) = 2,05$ resp. $1,89$ resp. $1,54$ in grosser Uebereinstimmung mit vorstehenden Versuchs-Resultaten.

Wird D kleiner, als die Basis des Presskörpers, also für Tabelle A kleiner als $2d$ und für Tabelle B kleiner als $1,41d$, oder der Strahl dicker, wie $0,5$ resp. $0,71 D$, so kann der Werth von $1 - \cos \alpha$ darum nicht wesentlich kleiner werden, weil die Presskörper ihre constante Form beibehalten und die hinzutretenden concentrischen Schichten, durch welche man sich den innern Kern des Strahles verdickt denken kann, dem Ablenkungswinkel des innern Theiles folgen müssen. Wird der Strahl dicker als die getroffene Platte, kann selbstredend von dem überschliessenden Theile keine andere Wirkung auf letztere erwartet werden, als die er vermöge seiner Cohäsion mit der aufstossenden Masse auszuüben vermag. In den meisten Fällen wird letztere indessen als geringfügig vernachlässigt werden können und man kann die Minimalwerthe von $1 - \cos \alpha$ in vorstehender Tabelle daher auch für solche Flächen als gültig annehmen, die gleich gross oder kleiner als der Querschnitt der aufstossenden Strahlen sind. Nur muss man dann nicht den Querschnitt des Strahles, sondern den Inhalt der getroffenen Fläche in Rechnung bringen.

Ist die Stossplatte, längs der ein isolirter Strahl sich ausbreitet, noch mit gegen den Strahl vortretenden Rändern eingefasst, so wird, wie bereits am Schlusse des § 101 bemerkt, die Stosswirkung in demselben Verhältnisse grösser, als der Ablenkungswinkel und mit ihm $1 - \cos \alpha$ grösser wird. Bidone benutzte bei einem Versuche eine kreisrunde Platte von 36 Linien Durchmesser, deren wiederkehrender normaler Rand von 18 Linien Höhe allmählig bis auf Null vermindert wurde. Er liess dagegen einen kreisrunden Strahl von 12 Linien Durchmesser mit 28 Fuss Geschwindigkeit stossen. Ohne Rand ergab sich

$P_p = 2,09$, bei 18 Linien Randhöhe dagegen $3,11 \frac{av^2\gamma}{2g}$. Bei 2 Linien

Randhöhe fand sich ein Maximum für P_p mit $3,42 \frac{av^2\gamma}{2g}$. Durch weitere

Versuche gelangte er zu dem Schlusse, dass es für jeden gegebenen Fall ein bestimmtes Verhältniss von Strahldicke, Stoss-Geschwindigkeit und Randhöhe geben müsse, für welches die Wirkung ein Maximum wird. Es ist dies ganz richtig und die Wirkung lässt sich mit Hülfe der vorstehenden und der Widerstands-Tabelle berechnen. Für den erwähnten

Versuch findet man beispielsweise, dass bei $\frac{D}{d} = 3$ der Werth von

$1 - \cos \alpha$ in Rubr. B. nahezu sein Maximum mit 0,988 erreicht hat und keiner bemerkenswerthen Steigerung mehr fähig ist, wenn man berücksichtigt, dass gleichzeitig mit der Platte sich auch der Abscheerungs-Widerstand darauf vergrössert und die Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers sich verringert.

Aus Gleichung 3) § 101 findet man t_1 die Dicke des ausgebreiteten Wasserstrahles für $D = 3d$ mit $\frac{d}{12}$ also 1 Linie. Bei einer Randhöhe von 2 Linien wird also für die Rückströmung am Rande $\frac{D}{d} = 2$ und dafür findet man unter A der Tabelle $\cos \alpha = 0,464$, $\alpha = 62^\circ 4'$ und $\sin \alpha = 0,886$. Die Reaktionswirkung am Rande in der Richtung des letztern wird folglich nach Gleichung 6) § 100 $= 2 \sin \alpha = 1,772$ und die Gesamtwirkung $2(1 - \cos \alpha) + 2 \sin \alpha = 2 \cdot 0,988 + 1,772 = 3,748 \frac{av^2\gamma}{2g}$ ohne Berücksichtigung der Widerstände.

Der Widerstandswerth $\frac{pl}{a\sqrt{h}}$ auf der kreisförmigen Platte und dem

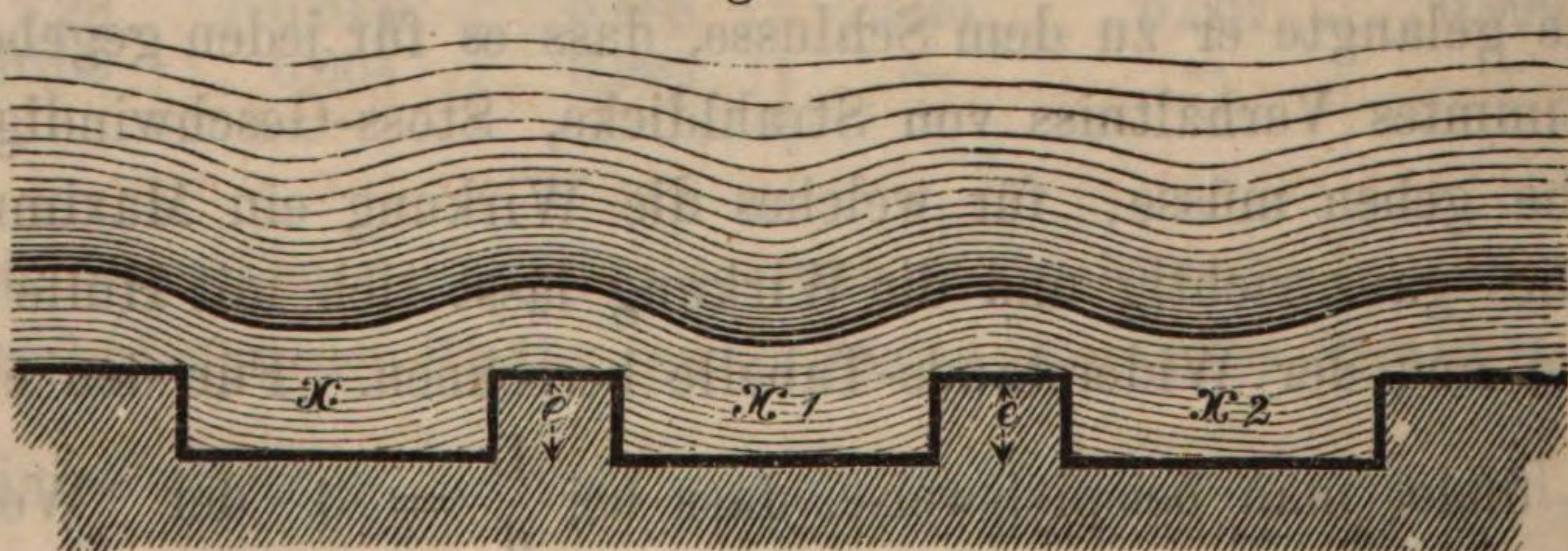
Rande berechnet sich bei 8 Fuss Druckhöhe und 2 Linien Randhöhe auf etwa 1,5 und bei 18 Linien Randhöhe auf 9,5. Dem entsprechen Widerstands-Coefficienten von 0,945 resp. 0,868, um welche also die Geschwindigkeit des reagirenden Strahles verringert und gleichzeitig dessen Dicke vergrössert worden sein muss. Ausserdem wird die Gesamtwirkung noch durch den negativen Zug μp_1 an der wiederkehrenden Randfläche vom benetzten Umfange p_1 verringert.

§ 105.

Vergrösserung des Widerstandes benetzter Flächen durch Unebenheiten.

Die § 104 entwickelten Gesetze der Stosswirkung gestatten uns nunmehr auch die Einflüsse einer nähern Schätzung zu unterziehen, welche Unebenheiten oder Einkerbungen der Oberfläche auf die Grösse des Widerstandes haben, den im Wasser fortbewegte Körper darin erleiden. Nehmen wir an, die Einheit einer Fläche wäre mit einer gewissen Anzahl paralleler, Figur 112 im Querschnitte dargestellter, Rippen eee,

Fig. 112.



welche alle denselben Vorsprung e vor der Fläche haben, versehen. Die letztern werden in einer Richtung normal gegen die Länge dieser Rippen mit der Geschwindigkeit v durch das Wasser bewegt, oder es fliesse Wasser mit dieser Geschwindigkeit darüber hinweg. Die Wirkung auf die Fläche wird in beiden Fällen nicht wesentlich verschieden sein. Die Wirkung der letztern auf die Bewegung des Wassers ist bereits § 28 näher untersucht worden. Betrachten wir nun das gegen die Seitenflächen eee von der Länge $= 1$ stetig anströmme Wasser als die eine Hälfte eines gegen eine Fläche von derselben Dicke stossenden Strahles von länglich rechteckigem Querschnitte, welcher an den beiden schmalen gegen die Länge verschwindend kleinen Kopfflächen eingefasst ist. Die Stosswirkung gegen jede einzelne Rippe ergibt sich dann nach § 104 Col. A der Tabelle auf $2.0,536 \frac{ev^2\gamma}{2g} = \frac{1,072ev^2\gamma}{2g}$. Soll nun die Wirkung auf die ganze Fläche ein Maximum, also einerseits die Stosswirkung auf jede einzelne Rippe eine möglichst vollständige, andererseits die Zahl der gestossenen Rippen eine möglichst grosse werden, ohne die erstere zu beeinträchtigen, so folgt dafür aus den frühern Untersuchungen der Form des contrahirten und aufgestauchten Strahles, dass die Entfernung zweier Rippen von einander mindestens $4,5e$ betragen muss. Auf die Längeneinheit können also nur $\frac{1}{4,5e}$ Rippen zur vollständigen Wirkung gelangen. Hiernach ergibt sich die Gesamtwirkung W_m für die Flächeneinheit

$$1) W_m = \frac{1,072e \cdot v^2\gamma}{4,5e \cdot 2g} = 0,238 \frac{v^2\gamma}{2g} = 12,1v^2 \text{ in Metern}$$

und zwar merkwürdiger Weise unabhängig von dem Vorsprunge e der einzelnen Unebenheiten und allein abhängig von dem Quadrate der Geschwindigkeit.

Wollen wir diese Maximal-Wirkung mit dem Parallelstosse P_p eines Wasserstrahles von der Breite $= 1$ und der Dicke oder Höhe $= x$ vergleichen, welcher in normaler Richtung gegen eine unbegrenzte Fläche stösst, so erhalten wir durch die Gleichsetzung

$$2) 0,238 \frac{v^2\gamma}{2g} = \frac{2xv^2\gamma}{2g}$$

$$3) x = 0,12$$

d. h. also der höchst mögliche Druck, welchen an einer Fläche vorbeifliessendes Wasser durch Stoss gegen deren Unebenheiten in der Richtung seiner Bewegung auf dieselbe hervorbringen kann, entspricht der Stosswirkung eines normal dagegen anfliessenden Wasserstrahles, dessen Querschnitt $0,12$ der Fläche beträgt.

Da diese Wirkung unabhängig von dem Vorsprünge der Unebenheiten ist, so kann sie nur dann gleich Null werden, wenn deren Form so abgeflacht ist, dass der Ablenkungswinkel Null wird, oder die einzelnen Vorsprünge so nahe zusammenliegen, dass kein Raum für eine ablenkende Bewegung übrig bleibt und die einzelnen Wasser-Moleküle darüber hinweg gleiten müssen. Denkt man sich die Ecken, welche die Fläche mit den einzelnen Rippen Figur 112 bildet nach der concaven Form² des gepressten Ablenkungs-Prismas oder Kegels ausgerundet, so wird der Ablenkungs-Winkel dadurch nicht geändert werden. Dagegen würde eine Ausfüllung der Ecken durch convex gekrümmte Formen, wie sie die Praxis für Brückenpfeiler und Schiffsschnäbel gebildet hat, eine sehr erhebliche Milderung des Ablenkungs-Winkels bewirken müssen. Wenn Gleichung 1) auch nur die Maximal-Wirkung ausdrückt, wie sie an Flächen, welche Natur oder Werkkunst rauh erzeugen, selten vollständig erreicht werden kann, so gestattet sie doch für viele Fälle der Praxis eine annähernde Beurtheilung und erklärt manche auffallende Erscheinungen, die namentlich bei Uferdeckungen beobachtet werden.

So ist es eine bekannte Erfahrung, dass normal von dem Wellenschlage getroffene Kaimauern, eine ungleich grössere Widerstandsfähigkeit zeigen, als flach geböschte Uferdeckungen, vielleicht sogar³ hat die Erfahrung gelehrt, dass die letzteren überhaupt nicht widerstandsfähig herzustellen sind. Vor den erstern bildet sich beim Anpralle der Wellen das natürliche Ablenkungs-Prisma, dessen relative Ruhe die Mauerfläche vor der Schubwirkung in paralleler Richtung schützt. Daher wird die Gesamtwirkung auf den festen Widerstand der Hinterfüllung übertragen. Bei den letztern dagegen schiesst die aufprallende Welle mit ungeschwächter Geschwindigkeit längs der Böschungsfäche empor. Nehmen wir an, dieselbe wäre aus rauh gespitztem Sandstein hergestellt, so denken wir uns damit eine Flächenbeschaffenheit, die der ideellen, für welche Gleichung 1) berechnet worden, vielleicht von allen, welche die Werkkunst schafft, am nächsten kommt. Einer Meereswelle von 9 M. Höhe entspricht eine Wasser-Geschwindigkeit von $\sqrt{2gh} = 4,43.3 = 13,3$ M. Nehmen wir etwa 0,5 des Maximalwerthes Gleichung 1) also $6v^2$, und setzen für v^2 den Werth 176,6, so giebt dies

$$W_m = 1060 \text{ Kg.}$$

auf den □ Meter. Wäre die Uferdeckung also aus 0,4 M. starken Platten hergestellt, so käme der Schub, welchen die aufstossenden Wellen auf der Oberfläche erzeugen, nahezu dem eigenen Gewichte der Decksteine pro □ Meter gleich und die letztern könnten in vertikaler Richtung aufgehoben, jedenfalls aber in der Böschungsebene in die Höhe geschoben werden. Man kann aus den vorhergehenden Untersuchungen auch erkennen, dass selbst die Lage und Richtung der Stoss- und Lagerfugen,

überhaupt die Art des Kopfverbandes eines Uferpflasters von erheblichem Einflusse auf die Haltbarkeit desselben ist. So wird beispielsweise die Oberfläche eines charrit bearbeiteten Sandsteines in der einen Richtung einen ungleich grössern Widerstand im fliessenden Wasser erleiden, als in der andern.

§ 106.

Widerstand eingetauchter Körper in bewegtem Wasser.

Die Erscheinungen des Widerstandes bewegter Körper in ruhendem Wasser oder eingetaucht festgehaltener Körper in fliessendem Wasser, sind im Allgemeinen durchaus dieselben wie beim Stosse isolirter Strahlen gegen feststehende Flächen und ihre Gesetze lassen sich daher im Wesentlichen aus den Gesetzen des Stosses unmittelbar herleiten. Nur die Grösse des Ablenkungswinkels kann je nach der verschiedenen Gestalt der eingetauchten Körper und der Tiefe der Eintauchung sehr verschieden ausfallen und unter Umständen verschwindend klein werden, während die übrigen Faktoren, welche den Gesamt-Widerstand bestimmen, weniger veränderlich und zum Theil nahezu constant angenommen werden können.

Um zu gewissen Normal-Beziehungen zu gelangen, welche eine praktische Beurtheilung auch abnormer Fälle zulassen, stellen wir uns den eingetauchten Körper von prismatischer Form und zwar vom Querschnitte a , der Länge l und dem benetzten Umfange b vor und denken uns denselben in der Richtung der Längensaxe bewegt, auch seine hintere und vordere Kopffläche von veränderlicher Form. Der Widerstand, welchen er mit der Geschwindigkeit v bewegt, oder festgehalten in Wasser, welches mit der Geschwindigkeit v dagegen an und daran vorbeiströmt, erleidet, setzt sich aus nachfolgenden Faktoren zusammen:

1) Aus dem gegen die vordere Kopffläche wirksamen und ganz und gar von deren Form abhängigen Parallelstosse. Derselbe drückt sich nach Gleichung 5) § 100 ganz allgemein aus durch

$$W_1 = \frac{2\gamma v^2}{2g} (1 - \cos \alpha) = 102v^2(1 - \cos \alpha)$$

und kann durch Zuspitzung der Kopffläche, welche den Winkel α verkleinert, bis auf nahezu Null reducirt werden.

2) Da das zurückbleibende Wasser von der hintern Kopffläche sich ablösen muss und dies bei freiem Luftzutritte von der Wasseroberfläche aus mit keiner grössern Kraft als seiner absoluten Festigkeit geschehen kann, so wirkt der Vorwärtsbewegung an derselben noch der Zug s_a für $13^\circ \text{ R.} = 3,7a$ entgegen. Dieser Widerstand

$$W_2 = 3,7a$$

lässt sich durch Zuschärfung des Hinterkopfes nicht reduciren, sondern bleibt stets in der Projektion jeder beliebigen Zuschärfungsform normal auf die Längsaxe des Prismas wirksam. Wenn daher Versuche eine solche Verminderung ergeben haben, so kann der Grund nur in einer Rückwirkung auf die Grösse der Ablenkung am Vordertheile gesucht werden.

3) Aus dem Abscheerungs-Widerstande

$$W_3 = \mu bl = 2,63bl$$

an den eingetauchten Seitenflächen des Prisma's, welchen das daran vorbeiströmende Wasser unter allen Umständen daran erzeugt, auch wenn dieselben vollkommen eben und glatt sind.

4) Bei Körpern mit unebenen oder rauen Seitenflächen aus dem entsprechenden Theile des § 105 berechneten Reibungs-Widerstandes, welcher durch Stoss gegen die Unebenheiten erzeugt wird, und für jede Flächenbeschaffenheit durch Versuche festzustellen ist, daher hier allgemein mit

$$W_4 = w v^2$$

bezeichnet werden kann. Dabei bleibt zu bemerken, dass der Werth von w nicht 12,1 übersteigen und für glatt gewalzte Metall- oder getheerte Holzflächen sehr nahezu Null genommen werden kann. Mit Summirung dieser vier Faktoren W_1 , W_2 , W_3 und W_4 erhalten wir einen allgemeinen Ausdruck für den Gesamtwiderstand W

$$1) W = 102av^2(1 - \cos\alpha) + 3,7a + 2,63bl + wv^2$$

und erkennen daraus, dass zwei Glieder des Widerstandes unter allen Umständen mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, eins nur mit der Länge des Körpers und dem benetzten Umfange, ein Viertes mit dem eingetauchten Querprofile wächst. Am veränderlichsten und schwierigsten genau zu bestimmen ist der Faktor $1 - \cos\alpha$ des ersten Gliedes. Den bisher bekannten Versuchen ist durchweg der allgemeine Ausdruck

$$2) W = \frac{kav^2\gamma}{2g}$$

behufs Ermittlung des Erfahrungs-Coefficienten k zu Grunde gelegt. Die für letzteren bekannt gewordenen Werthe enthalten den von $1 - \cos\alpha$ daher nur implicirter. So weit in einzelnen Fällen jedoch die näheren Umstände der Beobachtung bekannt sind, lässt sich mit hoher Wahrscheinlichkeit zunächst annehmen, dass der Ablenkungswinkel mindestens bei rechtwinklig abgeschnittenen Kopfenden ungleich kleiner ausfällt, wenn ein Prisma im stillstehenden Wasser vorwärts bewegt wird, als im umgekehrten Falle, wenn fliessendes Wasser dagegen anströmt. Es ist dies auch wohl erklärlich, denn man beobachtet den Bogen, welchen die Wellen des ausweichenden Wassers beschreiben, im letztern Falle ungleich flacher als im erstern. Vielleicht aus demselben Grunde geben

die angestellten Versuche auch wohl den Ablenkungswinkel bei einer gegen die Strömung rechtwinklig bewegten Tafel ohne Länge grösser, wie an der gleich grossen Kopffläche eines Prisma's von etwa der dreifachen Länge des Durchmessers der Kopffläche an. Bei Prismen von grösserer Länge nimmt dagegen der Gesamt-Widerstand wieder zu, weil der Faktor $2,63bl$ wächst.

Für Tafeln, gegen welche eine unbegrenzte Wassermenge anströmt, ergeben Versuche von Du Buat, Duchemin, Borda und andern den Werth von $1 - \cos \alpha$ mit ziemlicher Uebereinstimmung auf 0,89, für im stillstehenden Wasser bewegte Tafeln jedoch nur 0,68, für Prismen, deren Länge gleich dem mittlern Durchmesser ist, im erstern Falle 0,69, im letztern 0,63, und für solche von der dreifachen Länge ihres Durchmessers wohl in beiden Fällen 0,63. In Bezug auf letztere Beobachtung weichen jedoch die Angaben von Duchemin nicht unerheblich von denen Du Buat's ab. Der Minimalwerth entspricht nahezu dem der Tabelle § 104 Col. B von 0,676. Bei pyramidal oder keilförmig unter weniger als 90° zugeschärften Endflächen lässt sich der Winkel α ziemlich genau gleich dem halben Zuschärfungswinkel setzen. Bei bogenförmigem Abschlusse wird die Bestimmung desselben ungleich schwieriger und sicherer durch Versuche, als durch Rechnung oder graphische Darstellung.

Für die praktische Anwendung und Controlle der Formel 1) wird hier die nachfolgende Zusammenstellung einer Anzahl Werthe von k zu Gleichung 2) genügen, wie sich solche bei verschiedenen Versuchen ergeben haben.

No.	Nähere Bezeichnung des Versuchs-Gegenstandes.	Werth von k
1	Dreieitiger Keil mit ebenen Seitenflächen gegen die Spitzebewegt, wenn der Winkel der letztern 90° beträgt	0,95
2	Derselbe bei einem Winkel von 60°	0,68
3	Derselbe, wenn die Seiten Kugelflächen von 60° aus den gegenüberliegenden Ecken beschrieben sind.....	0,51
4	Kegel mit 90° Spitze.....	0,90
5	Desgl. mit 60°	0,71
6	Desgl. mit 51°	0,56
7	Halbcylinder.....	0,74
8	Halbkugel.....	0,60
9	Grössere Moselschiffe.....	0,33
10	Fluss-Dampfer.....	0,12 bis 0,27
11	See-Dampfer der günstigsten Form.....	0,11 bis 0,05

Bei einem Würfel von 1 Fuss Seite fand Du Buat, wenn die obere Seite wasserfrei blieb, $k = 1,11$, wenn er dagegen ganz eingetaucht war, $k = 1,17$. Die Differenz entspricht, wie sich leicht nach-

rechnen lässt, der Vergrößerung des 3. Gliedes in Gleichung 1). Nimmt man beispielsweise an, dass ein Seeschiff bei 80 M. Länge und 4 M. Tiefgang einen benetzten Umfang von 13 M. und ein eingetauchtes Querprofil von 25 □M. habe, auch dass dessen Vordertheil nach einem Winkel von 20° zugespitzt sei, so entspricht dem ein Ablenkungswinkel von 10° , für welchen sich der Cosinus auf 0,985, also $1 - \cos\alpha$ auf 0,015 berechnet. Nehmen wir die Fahr-Geschwindigkeit auf 9 M. an, so berechnet sich der Widerstand am Vordertheile nach Gleichung 1) auf $102.25.7^2.0,015 = 3098$ Kg. der an den Seiten für eine Wassertemperatur von 24° R., also $\mu = 2,43$ auf $2,43.13.80 = 2527$, der Gesamt-Widerstand also mit Vernachlässigung der beiden letzten Glieder auf 5625 Kg. Wir haben also für k die Beziehung

$$\frac{kav^2\gamma}{2g} = k.25.9^2.51 = 5625$$

woraus folgt $k = 0,0545$. Wenn daher nach einigen Angaben der Widerstands-Coefficient k bei amerikanischen Schiffen neuester Construction nur 0,05 betragen soll, so muss derselbe bei einer Fahr-Geschwindigkeit von mindestens 9 M. ermittelt worden sein. Bei Fahrzeugen, welche sich in so engen Kanälen bewegen, dass der eingetauchte Querschnitt a einen erheblichen Theil des Kanal-Querschnittes ausmacht, findet am Vordertheile ausserdem noch eine Aufstauung des Wasserspiegels statt, welche sich für jeden gegebenen Fall nach § 88 berechnen lässt und welche den Werth von a sowie den Widerstand am Vordertheile entsprechend vergrößert. Bezeichnet W_x für diesen Fall den vermehrten Gesamt-Widerstand und W denjenigen, welchen das Fahrzeug ohne die Aufstauung in unbegrenztem Wasser erleiden würde, so hat sich dafür aus Versuchen von Du Buat und Bossut die näherungsweise Beziehung ergeben

$$3) \quad W_x = \frac{8,46}{2 + \frac{A}{a}} W.$$

§ 107.

Widerstand des Graswuchses in Gräben und Kanälen.

Auch der vermehrte Widerstand, welchen der Graswuchs in Kanälen und Gräben erzeugt, lässt sich annähernd berechnen, wenn man die Dichtigkeit desselben durch die Zahl der Halme, welche auf die Einheit der Grundfläche kommen, so wie deren durchschnittliche Dicke und Länge ermittelt hat.

In einem neuen Wassergraben von 10 M. Breite und 1 M. Tiefe mögen beispielsweise bei 1 M. Geschwindigkeit 10 Cub.-M. Wasser pro

Sekunde abgeführt werden. Später habe sich ein Graswuchs auf der Sohle desselben erzeugt, dessen Dichtigkeit dadurch gemessen sei, dass auf jeden □Decimeter 6 Halme von 1 M. Länge und 0,004 M. Durchmesser kommen. Der benetzte Umfang jedes Halmes würde also, wenn er sich lang gestreckt hätte, auf $0,004\pi = 0,004 \cdot 3,14$, und wenn er aufrecht stände mit der doppelten Projektion des Durchmessers, also mit $0,004 \cdot 2$ in Rechnung zu bringen sein. Da derselbe sich nun weder ganz in der einen noch in der andern Lage befinden wird, können wir ihn also im Mittel auf $0,004 \cdot 2\frac{1}{2} = 0,01$ berechnen. Der Cubikinhalte jedes Halmes beträgt $1 \cdot (0,004)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0,0000126$. Auf den □Meter Grundbett kommen also 6 □M. benetzter Umfang und 0,0076 Cub.-M. Inhalt. Das wirklich vom fließenden Wasser ausgefüllte Querprofil kann demnach nur noch $(1 - 0,0076) = 0,992$ des ursprünglichen betragen, während der benetzte Umfang, welcher früher $10 + 2 \cdot 1 = 22$ betrug, nun $22 + 10 \cdot 6 = 82$, also das 3,73fache des ursprünglichen geworden ist. Wenn wir also auf die Eitelwein'sche Geschwindigkeits-Formel § 47 Gleichung 5) zurückgehen, so erhalten wir mit $\sqrt{\frac{0,992}{3,73}} = 0,51$ den Faktor, um den sich bei gleicher Wassertiefe die Durchfluss-Geschwindigkeit verringert haben muss. Sie kann also in Folge des entstandenen Graswuchses nur noch 0,51 M. und die abgeführte Wassermenge nur noch $0,51 \cdot 0,992 \cdot 10 = 5,06$ Cub.-M. betragen.

Dass bei solchen Ermittlungen nicht etwa der Stoss-Widerstand gegen die Halme in Betracht kommt, bedarf nach dem Früheren wohl keiner weiteren Erläuterung, weil eben der Stoss keinen Geschwindigkeits-Verlust, sondern nur eine Richtungsänderung und damit denjenigen virtuellen Verlust erzeugt, welcher durch den Contraktions-Coefficienten gemessen wird. Genau genommen hätte also für den letztern noch ein gewisser Werth in Ansatz gebracht werden müssen, der hier indessen gegenüber dem Annäherungsgrade der übrigen Rechnungsgrößen ohne erheblichen Fehler unbeachtet bleiben konnte.

§ 108.

Reaktions-Wirkung des bewegten Wassers.

Wenn man nach Figur 108 und Gleichung 5) § 100 die Gesamt-Druckwirkung

$$P_p = \frac{\alpha \gamma v^2}{2g} \cdot (1 - \cos \alpha)$$

näher in Betrachtung zieht, welche ein um 180° abgelenkter Wasserstrahl gegen eine feste Wand erzeugt, so findet man, dass derselbe aus

zwei gleichen Hälften besteht, von denen die eine zwischen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 90^\circ$ und die andere zwischen 90° bis 180° erzeugt wird. Den letztern Theil kann man, weil die Richtung des fließenden Wassers hier derjenigen, welche die erstere erzeugt und zugleich der Richtung, in welcher der Druck auf die Wand sich äussert, grade entgegengesetzt ist, als negativ ansehen und pflegt ihn mit Reaktion zu bezeichnen. Es ist also die Reaktionswirkung R , welche ein aus einem Gefässe ausfließender Wasserstrahl vom Querschnitte a in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung auf die der Oeffnung gegenüberliegende Wand des Gefässes erzeugt

$$1) R = \frac{2av^2\gamma}{2g} = 102v^2$$

und zwar dem Stosse gegen eine vor den Strahl unter einem Winkel von 90° gehaltene Platte gleich.

Ist die Oeffnung, durch welche der Strahl ausfließt, im Boden des Gefässes, so wirkt dieser Reaktionsdruck dem Gewichte des Wassers im Gefässe entgegen und vermindert denselben, ist sie im Deckel eines Gefässes angebracht und springt der Strahl in Folge eines den Wasserstand im Gefässe übersteigenden Druckes aufwärts, so vergrößert sie die Summe des eignen Gewichtes des Wassers im Gefässe und des letztern.

Will man den Reaktionsdruck R nicht auf den Strahl-Querschnitt a , sondern auf den engsten Querschnitt f irgend einer beliebig geformten in einer Gefässwand befindlichen Ausfluss-Oeffnung und die darauf wirksame Druckhöhe h beziehen und in Rechnung bringen, so hat man dafür nach den bekannten Gesetzen des Ausflusses

$$Q = (e\beta)f\sqrt{2gh} = av$$

woraus folgt

$$2) \frac{av^2}{2g} = \frac{(e\beta)^2 f^2 h}{a}$$

Da aber $(e\beta)f = a e_1$ dem Produkte aus dem Strahl-Querschnitte in den Geschwindigkeits-Coefficienten sein muss, so folgt daraus für a

$$a = \frac{(e\beta)f}{e_1}$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung 2 ein, so wird

$$\frac{av^2}{2g} = e_1(e\beta)f.h$$

und durch Einsetzung letztern Werthes in Gleichung 1)

$$3) R = 2\gamma e_1(e\beta)f.h = 2000e_1(e\beta)f.h.$$

Für eine Oeffnung in dünner Wand ist $(e\beta) = 0,615$ und e_1 nach Gleichung 3) § 51

$$e_1 = 0,375 + 0,1(e\beta) = 0,936$$

R folgt daraus $1,15fh\gamma$. Ein von dem Engländer Peter Ewart mit einem horizontal ausfliessenden Wasserstrahle angestellter Versuch ergab den Druck auf die Hinterwand des Gefässes für eine solche Oeffnung in dünner Wand $1,14fh\gamma$, also eine für die Praxis hinlängliche Uebereinstimmung. Für den Ausfluss durch ein nach der Form des contrahirten Strahles ausgerundetes Mundstück ist bei etwa 2 M. Druckhöhe $(\varrho\beta) = \varrho_1 = 0,97$. Ein Versuch mit einem ähnlichen Mundstücke ergab $R = 1,73fh\gamma$. Dabei wurde $\varrho_1 = (\varrho\beta)$ jedoch nur 0,94 gemessen, woraus zunächst hervorgeht, dass die Ausrundung eine unvollkommene gewesen sein muss und noch in einem geringen Grade Contraktion stattgefunden hat. Die Rechnung nach Gleichung 3) ergiebt für den beobachteten Werth von $\varrho_1 = (\varrho\beta) = 0,94$, $R = 1,767$, also immerhin noch eine ziemliche Uebereinstimmung. Jedenfalls wird man durch Rechnung nach Gleichung 3), wenn man es mit regelmässigen Oeffnungsbildungen zu thun hat, in den meisten Fällen zuverlässigere Resultate erzielen, als durch meist sehr schwierig auszuführende Strahlmessungen und die Benutzung von Gleichung 1).

§ 109.

Arbeit der Reaktion.

Die Arbeit, welche das Wasser vermöge seines Reaktionsdruckes zu verrichten vermag, kann selbstredend nicht grösser sein, als die des rechtwinkligen Stosses, weil beide ihrer Grösse und Natur nach gleich und nur in Bezug auf die Richtung der Uebertragung entgegengesetzt sind. Der Grad des Nutzeffektes, welcher sich durch den einen oder andern erzielen lässt, wird in jedem Falle von dem Vollkommenheitsgrade der Kraftmaschine abhängen, welche die Arbeit nutzbar macht, daher bei der Beurtheilung, ob der eine im gegebenen Falle dem andern vorzuziehen sei, lediglich die Rücksicht der Bequemlichkeit, Zweckmässigkeit und Einfachheit der Konstruktion entscheiden. Eine vollständige Ausnutzung der Wasserkraft kann, wie dies schon aus § 103 hervorgeht, nur durch die gleichzeitige Wirkung beider erzielt werden, da jeder nur die eine Hälfte des Gesamtwirkungsgrades darstellt, dessen ein von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkter Wasserstrahl fähig ist.

Die Bedingungen für ein Maximum des Nutzeffektes sind bei Reaktionsmaschinen denen gleich, welche die Kraftübertragung durch Stoss bedingt.

Denkt man sich ein Gefäss, auf dessen Rückwand ein Strahl vom Querschnitte a , in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit V ausfliessend, den Reaktionsdruck R erzeugen soll, in der Richtung des letztern, also der des Strahles entgegengesetzt mit der Geschwindig-

keit v ausweichend und die Oeffnung im stillstehenden Unterwasser ausmündend, so ist die absolute Geschwindigkeit des Wasserstrahles a , welche den Reaktionsdruck erzeugt $V - v$, also nach Gleichung 1) § 108

$$1) R = \frac{2a(V - v)^2 \gamma}{2g}$$

und die übertragene Arbeit

$$2) Rv = A = \frac{2a(V - v)^2 v \gamma}{2g}$$

Für das Maximum der letztern folgt hieraus, indem man die erste Ableitung nach v bildet und gleich Null setzt

$$3) v = \frac{1}{3}V$$

und mit Einsetzung dieses Werthes in Gleichung 2)

$$4) A_m = \frac{8}{27} \frac{aV^3 \gamma}{2g} = \frac{8}{27} \frac{Q\gamma V^2}{2g}$$

Es stellt sich dies Verhältniss also ganz gleich dem beim Stosse nur dass die wirklich übertragene Arbeit eines besondern Umstandes wegen hier etwas grösser wird. Da das Unterwasser sich nämlich mit der relativen Geschwindigkeit v von der Oeffnung ab bewegt, wird sein Gegendruck auf dieselbe um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ kleiner, also die

Druckhöhe, welche den Ausfluss bewirkt, um $\frac{v^2}{2g}$ grösser, während die Gefälle-Differenz, zwischen Ober- und Unterwasser nur h beträgt. V ist hier also nicht $\varrho_1 \sqrt{2gh}$, sondern

$$5) V = \varrho_1 \sqrt{2gh + \frac{v^2}{\varrho_1^2}}$$

Setzt man hierin den Maximalwerth Gleichung 3) mit $v = \frac{1}{3}V$ ein, so erhält man

$$6) V^2 = \frac{9}{8} \varrho_1^2 \cdot 2gh$$

und mit Einsetzung letztern Werthes in Gleichung 4)

$$7) A_m = 0,33 \varrho_1^2 Q \gamma h$$

während Gleichung 4) § 103 für den normalen Stoss gegen eine Platte bis zum Werthe von $\alpha = 90^\circ$ nur

$$A_m = 0,296 \varrho_1^2 Q \gamma h$$

also 0,034 weniger ergab. Es darf hierbei jedoch nicht übersehen werden, dass die kleine Differenz im Unterwasser gewonnen, daher von lokalen Verhältnissen abhängig und bestimmten Beschränkungen unterworfen ist. Wäre beispielsweise die Ausströmungs-Oeffnung über Wasser oder deren Schwerpunkt im Unterwasserspiegel angebracht, so würde V durchaus ganz constant und unabhängig von v bleiben. Strenge genommen hätte bei Ableitung des Maximal-Verhältnisses für v aus Gleichung 2) das nachträglich erläuterte Funktional-Verhältniss berücksichtigt

und in Gleichung 2) eingeführt werden müssen. Man gelangt auf diesem Wege jedoch zu einer etwas complicirten Differenzial-Gleichung und durch Versuchs-Rechnungen mit Gleichung 3) und 5) lässt sich sogleich finden, dass das Resultat dadurch nicht geändert wird.

Eigenthümlich ist daher eine Schlussfolgerung von Weisbach, wonach derselbe aus einer von ihm hergeleiteten Formel folgert, dass der Maximal-Effekt für einen Werth von $v = \infty$ stattfindet. Gleichung 5) giebt hierzu scheinbar Veranlassung, weil V daselbst mit v unendlich und h gegen v verschwindend klein wird.

§ 110.

Hydraulischer Druck in geschlossenen Leitungen.

Aus dem Gesetze der Reaktionswirkung folgt, dass wenn der statische Gleichgewichts-Zustand in einem Gefässe durch eine Ausflussbewegung gestört wird, auch eine Rückwirkung auf die Gefässwände eintritt, welche die im Ruhezustande stattgehabte und der Tiefe jedes Wasserelementes unter der Oberfläche proportionale gegenseitige Pressung verändert. Die solcher Gestalt veränderte Pressung irgend eines Wasserelementes nennt man zum Unterschiede von dem hydrostatischen Drucke seinen „hydraulischen Druck“.

Es ist sehr schwierig, über Ursprung und Wesen des hydraulischen Druckes zu einer so klaren und scharfen Vorstellung zu gelangen, dass man sogleich in jeder Erscheinung die wirksamen Faktoren richtig zu erkennen vermag, ohne der Gefahr eines Irrthumes ausgesetzt zu sein, und doch wieder so wichtig für das Verständniss und die Behandlung einer sehr grossen Zahl hydro- und aerodynamischer Vorgänge, die dem Techniker täglich vor Augen treten, aber deren strenge Gesetzmässigkeit die Theorie bisher mehr als wahrscheinlich vorausgesetzt, wie erschöpfend nachgewiesen hat.

Ungleich sicherer kommt man zur Erkennung zusammengesetzter Erscheinungen der physischen Welt durch synthetisches Zusammenfügen ihrer einfachsten und der sinnlichen Wahrnehmung zugänglichen Elemente, als man umgekehrt klare Vorstellungen von der Natur der letztern sich aus erstern zu bilden vermag.

Um zu einer naturgetreuen Vorstellung vom hydraulischen Drucke zu gelangen, werden wir daher zunächst zu den sehr einfachen Momenten der Paragraphen 44, 61 und 98 zurückkehren müssen und dieselben so scharf als möglich in unser geistiges Auge zu fassen suchen.

Paragraph 61 führt uns zwei auf einander ruhende Körper von den Massen M und m vor, die sich gleichzeitig in fallende Bewegung setzen, nachdem ihnen die unterstützende Unterlage entzogen worden. Wirkt

dieser Bewegung kein Widerstand entgegen und sie erfolgt demgemäss nach dem Gesetze des Falles im luftleeren Raume, so fallen beide Körper mit der gleichen Beschleunigung g und einer kann auf den andern weder Druck ausüben, noch Gegendruck von ihm empfangen. In dem Augenblicke der beginnenden Fallbewegung wird die unterliegende Masse M von dem auf ihr ruhenden Gewichte der Masse m vollständig entlastet. Auf diesem einfachen Prinzipie beruht die Wirksamkeit der sogenannten selbstthätigen Fang-Vorrichtungen für Seilfahrten. Beginnen die beiden Massen M und m ihre beschleunigte Bewegung jedoch mit einer geringern Beschleunigung als der des freien Falles, so kann dies nur möglich gedacht werden durch die Thätigkeit eines der Schwerkraft entgegenwirkenden Widerstandes, welchen wir in § 61 mit P , in § 44 bei der Anwendung auf eine stetige Ausflussbewegung mit R bezeichnet, und daraus die im Grunde genommen ganz identischen Gleichungen

$$1) \quad p = \frac{G - P}{m} \quad \text{für geomechanische Vorgänge,}$$

$$2) \quad v = \frac{P - R}{m} \quad \text{für hydraulische Vorgänge,}$$

abgeleitet haben. In Gleichung 1) bedeutet p die gemeinschaftliche Beschleunigung der beiden sich abwärts bewegenden Körper, G das Gewicht des oben liegenden Körpers von der Masse m , P die der freien Fallbewegung entgegenwirkende Widerstandskraft.

In Gleichung 2) bezeichnet v die der Arbeits-Geschwindigkeit gleiche effektive Ausfluss-Geschwindigkeit eines Wasserstrahles vom Querschnitte a in einheitlicher Richtung normal gegen a gemessen, P den darauf wirksamen hydrostatischen Druck $2ah\gamma$ entsprechend einer Wassersäule von der Höhe h des Wasserstandes über dem Schwerpunkte der Oeffnung und der Basis $2a$ vom doppelten Querschnitte des Strahles und R die diesem Drucke entgegenwirkende, also den gleichen auf Bewegung wirkenden Theil desselben, aufhebende Widerstandskraft, die sich aus der verrichteten Cohäsions-Arbeit nach § 44 berechnet.

Aus § 98 geht ferner hervor, dass, wenn eine Wassersäule von der Höhe L sich in einem vertikalen unten ganz geöffneten Rohre in Bewegung setzt, ohne dass dem Widerstände entgegenstehen, dies mit der Beschleunigung des freien Falles geschehen muss, dass also in diesem Falle kein Wassertheilchen auf das andere einen Druck auszuüben vermag. Der hydraulische Druck in jedem Theile der Wassermasse wird folglich = Null. Denkt man sich aber die Ausfluss-Oeffnung kleiner als den Rohr-Querschnitt, also die Bodenwand theilweise geöffnet, theilweise geschlossen, so wird zwar das durch die Oeffnung ausströmende, nicht aber das im Rohre zurückbleibende Wasser die freie Fall-Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ erlangen. Die Differenz entspricht einem ganz bestimmten

und in jeder Tiefe unter der Wasseroberfläche verschiedenen hydraulischen Drucke, oder einer ganz bestimmten Pressung, welche das untere Wassertheilchen dem obern darum entgegensetzen muss, weil es seinem natürlichen Bestreben frei zu fallen, nicht folgen kann. Je kleiner die Ausflussöffnung im Verhältnisse zum Rohr-Querschnitte, um so grösser wird diese Pressung, bis sie endlich bei ganz geschlossenem Boden, also völligem Aufhören der Ausfluss-Bewegung, in jedem Rohr-Querschnitte die uneingeschränkte Grösse des hydrostatischen Druckes erreicht.

Wie jede Pressung, welche auf Druck und Gegendruck beruht, vermöge der eigenthümlichen Molekular-Lagerung im Wasser nach allen Richtungen hin mit gleicher Stärke übertragen wird, so muss sich auch der hydraulische Druck genau so wie der hydrostatische nach allen Richtungen hin mit gleicher Intensität äussern.

Zur nähern Veranschaulichung denke man sich in einem horizontalen Cylinder vom Querschnitte a zwischen zwei beweglichen Kolben Wasser eingeschlossen. Gegen den einen Kolben presse die grössere Kraft G , gegen den andern die kleinere P auf das eingeschlossene Wasser. Dann muss das ganze im Cylinder eingeschlossene System, wenn man von Reibungs- und sonstigen Widerständen absieht, nach Gleichung 1) sich mit der Beschleunigung $p = \frac{G - P}{m}$ und der Kraft $G - P$ in der Richtung der grössern Kraft G in Bewegung setzen. Nach dem Principe von Wirkung und Gegenwirkung kann aber auf Pressung des eingeschlossenen Wassers nur derjenige Theil der Kraft G wirken, welcher von dem entgegengesetzten Kolben wiedergegeben wird. Während also die Differenz $G - P$ auf Fortbewegung wirkt, muss die kleinere Kraft P den hydraulischen Druck des eingeschlossenen Wassers darstellen und jeder in der Rohrwandung zwischen den beiden Kolben angebrachte Piezometer wird den Wasserstand $\frac{P}{a\gamma}$ zeigen, wenn man das eigene Gewicht des Wassers als dagegen verschwindend klein ausser Acht lassen kann.

Um die Aufgabe der Berechnung des hydraulischen Druckes so allgemein als möglich zu lösen, wollen wir uns unter a_n irgend ein beliebiges Durchfluss-Profil in einem ganz beliebig geformten und zusammengesetzten Gefäss-Systeme vorstellen, an dessen einem Ende durch eine Oeffnung vom Querschnitte a stetig Wasser unter der Wasserstandshöhe h ausfliesse. Der Schwerpunkt des Durchfluss-Profiles a_n dagegen liege um die Höhe h_n unter dem Wasserspiegel. Der während der Ausfluss-Bewegung in a_n wirksame hydraulische Druck, den wir zum Gegenstande der Untersuchung machen wollen, werde mit Z bezeichnet. Die Durch-

fluss-Geschwindigkeit in der Oeffnung a sei v , die in dem Querschnitte a_n sei v_n .

Man denke sich nun das Gefässsystem in a_n durchschnitten, den der Bewegung abwärts zu gerichteten Theil beseitigt und den Ausfluss nunmehr lediglich durch den aufwärts verbleibenden Theil vor sich gehend. Der Querschnitt a_n muss dadurch zur Ausfluss-Oeffnung werden. Es ist einleuchtend, dass das Wasser alsdann nicht mehr mit der ursprünglichen Geschwindigkeit v_n durch den Querschnitt a_n fliessen wird, sondern mit einer gewissen andern hypothetischen Geschwindigkeit, die wir mit C_n bezeichnen wollen und die eben sowohl grösser als kleiner wie v_n gedacht werden kann.

Stellt sich C_n grösser als v_n heraus, so ist dies ein Beweis, dass die Bewegung des Wassers in dem Theile des Gefässsystemes, welcher beseitigt worden, einen Gegendruck erfuhr. Die Grösse desselben muss den von uns gesuchten hydraulischen Druck darstellen, den wir mit Z bezeichnet haben und vollkommen identisch sein mit der kleinern Kraft P in Gleichung 1) oder R in Gleichung 2).

Findet sich dagegen, dass durch a_n nach Beseitigung des untern Gefässtheiles weniger Wasser fliesst als vordem, so ist dies ein Beweis, dass, während das ganze System noch in Thätigkeit war, in a_n von dem abfliessenden Wasser auf das zuströmende ein gewisser Zug oder vielleicht, richtiger gesagt, eine Verminderung des atmosphärischen Gegendruckes ausgeübt wurde, welche ebenfalls die Grösse des hydraulischen Druckes Z darstellt, aber in diesem Falle sich negativ ergibt. Anstatt einer Pressung ist eine Spannung vorhanden gewesen, welche ihre Grenze in dem Atmosphärendrucke erreicht.

Bringt endlich die Beseitigung des Gefässsystemes abwärts von a_n gar keine Veränderung in dem Durchflusse hervor, so war Z schon ursprünglich = Null, wie in jedem frei ausgetretenen Wasserstrahle, der weder einem Gegendruck noch Widerständen begegnet und der Beschleunigung der Schwerkraft bei seiner Weiterbewegung ungehindert folgen kann.

Zwischen unserer hypothetischen Geschwindigkeit C_n , der effektiven v_n und dem hydraulischen Drucke Z müssen dann dieselben Beziehungen statthaben, wie zwischen der theoretischen Geschwindigkeit C , der Widerstandskraft R und der effektiven Geschwindigkeit v in § 45, und wie dort haben wir in die hydraulische Grundgleichung

$$v_n = \frac{P - Z}{m},$$

welche sich nach Analogie von Gleichung 2) dafür ergibt, für P einzusetzen

$$3) P = \frac{a_n \cdot C_n^2 \gamma}{g},$$

um daraus zu entwickeln

$$4) Z = P - m v_n = \frac{a_n C_n^2 \gamma}{g} - m v_n.$$

Dort wie hier stellt m die effektiv ausfliessende Wassermenge

$$5) m = \frac{a v \gamma}{g}$$

dar.

Hiernach hängt die Bestimmung des hydraulischen Druckes aus Gleichung 4) in jedem gegebenen Falle nur von einer richtigen und zutreffenden Berechnung der hypothetischen Geschwindigkeit C_n ab.

Nach § 48 haben wir für C_n den allgemeinen Ausdruck

$$6) C_n = (\varrho \beta)_n \sqrt{2gh_n}.$$

$(\varrho \beta)_n$ bezeichnet hier einen gewissen der Ausfluss-Oeffnung a_n und dem Gefässsysteme aufwärts von a_n zukommenden Ausfluss-Coefficienten, welcher sich nach Abschnitt VI und VII für jede Gefässform und Zusammensetzung, sowie für jede Art der Zuströmungs-Bewegung zum Querschnitte a_n berechnen lässt. Nur darf man dabei niemals aus dem Auge verlieren, dass wie in § 44 und § 45 so auch hier, nicht eine hypothetische Widerstands-Arbeit, wie sie der Geschwindigkeit C_n entsprechen würde, sondern die wirkliche Widerstands-Arbeit, die während der effektiven Durchfluss-Geschwindigkeit v_n in dem obern Gefässsysteme verrichtet wird, der Berechnung des Widerstands-Coefficienten zu Grunde zu legen ist. Man muss daher in jedem gegebenen Falle den sich aus dem benetzten Umfange des Gefässsystemes oberhalb a_n ergebenden Widerstandswerth durch den Quotienten $\frac{v_n}{C_n}$ reduciren, um denjenigen zu finden, für welchen man ϱ_n in der Widerstands-Tabelle zu suchen hat.

$\varrho_n^2 h_n$ bezeichnet also denjenigen Theil der Gesamt-Druckhöhe h_n auf den Querschnitt a_n , welcher nicht durch die Widerstände in dem Theile des Gefässsystemes aufwärts von a_n aufgehoben und während des Durchflusses mit der Geschwindigkeit v_n unwirksam geworden ist, während β_n der theoretische Coefficient in den Grenzen von 0,707 bis 1,00 nach § 52 zu bestimmen ist, indem man anstatt V_1 daselbst v_n die effektive Durchfluss-Geschwindigkeit einführt. Nach Analogie der Herleitung in § 52 ergibt sich dann für β_n

$$6a) \beta_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{v_n^2}{\varrho_n^2 g h_n}}$$

gültig bis zum Werthe von

$$v_n = \varrho_n \sqrt{2gh_n}$$

für welchen $\beta = 1$ wird und der positive Werth von P in Gleichung 4) seine äusserste Grenze erreicht.

Setzt man nun in Gleichung 4) die Werthe aus Gleichung 5) und 6) ein, so erhält man

$$7) Z = 2a_n(\varrho\beta)^2_n \cdot h_n \cdot \gamma - \frac{av\gamma}{g} v_n$$

Drückt man nun auch v die Ausfluss-Geschwindigkeit in der Oeffnung a durch den zugehörigen Ausfluss-Coefficienten und die Druckhöhe h also durch $(\varrho\beta) \sqrt{2gh}$ aus und berücksichtigt, dass

$$8) v_n = \frac{a}{a_n} v$$

ist, so wird mit Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 7)

$$9) Z = 2a_n\gamma(\varrho\beta)_n^2 \cdot h_n - \frac{2a^2}{a_n}(\varrho\beta)^2 \cdot h.$$

Will man hieraus z den hydraulischen Druck der Flächeneinheit des Querschnittes a_n kennen lernen, so muss man den Werth Gleichung 9) durch a_n dividiren und erhält damit

$$10) z = 2\gamma\left((\varrho\beta)_n^2 \cdot h_n - \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 (\varrho\beta)^2 \cdot h\right)$$

Will man ferner den hydraulischen Druck durch den Piezometerstand h_z , also durch die Höhe einer Wassersäule messen, so wird derselbe aus Gleichung 10)

$$11) h_z = \frac{z}{\gamma} = 2\left((\varrho\beta)_n^2 h_n - \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 (\varrho\beta)^2 \cdot h\right)$$

Für den besondern Fall, dass $h_n = h$ ist, wie in der unmittelbaren Nähe der Gefässmündungen, oder an verschiedenen Stellen horizontal liegender Rohrleitungen hat man schliesslich aus Gleichung 11)

$$12) h_z = 2h\left((\varrho\beta)_n^2 - \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 \cdot (\varrho\beta)^2\right).$$

Gleichung 11) löst alle Aufgaben, welche in Betreff des hydraulischen Druckes gestellt werden können. Sie findet eine besonders wichtige Anwendung bei Wasserleitungen in Röhren und verbreitet einiger Maassen Licht über manche bisher wahrgenommene, aber nur mangelhaft erklärte Erscheinungen in dem Wechsel positiver mit negativen Piezometerständen an den verschiedensten Stellen von Wasserleitungen, bei veränderlichem Zu- und Abflusse. Die Lösung einiger Aufgaben wird auch hier zur weitem Erläuterung der Anwendung dienen.

Aufgabe 1. Wir sind zunächst in der Lage, die allgemeine Gültigkeit von Gleichung 12) an einem Beispiele prüfen zu können, für welches uns exakte Versuche vorliegen. Es ist bereits § 72 in anderer Weise behandelt worden.

Venturi hatte nämlich an einem konisch divergenten Ansatzrohre von $15\frac{1}{2}$ pr. Linien Durchmesser engsten und 23 Linien weitesten Quer-

schnitte, dessen ganze Länge 78 Linien betrug, in dem engsten Querschnitte und in je 26 Linien Entfernung davon nach der 23 Linien weiten Mündung hin, drei kleine Piezometer-Röhrchen angebracht und dieselben mit ihrer untern Mündung in eine Schale mit Quecksilber getaucht. Die innere Mündung des horizontal an einer Gefässwand angebrachten Ansatzrohres war mundstückartig ausgerundet. Während nun durch das letztere bei einer constanten Druckhöhe von 33,6 pr. Zollen Wasser ausfloss, stieg das Quecksilber so hoch in den drei Röhrchen, dass es im ersten einem Wasserstande von 62 pr. Zoll, im nächsten von 24 Zoll und im letzten, welches also in 26 Linien Entfernung von der Mündung angebracht war, von 8,2 Zoll entsprach. Der Ausfluss-Coefficient ($\varrho\beta$), auf die weiteste, 23 Linien weite, Mündung bezogen, ergab sich bei dem Versuche auf 0,622, also $(\varrho\beta)^2 = 0,387$. Wie hoch berechnen sich diese Aufsteigehöhen nach Gleichung 12)?

Auflösung. Bezeichnen wir die Röhrchen der Reihe nach mit 1, 2 und 3, die Durchfluss-Profile, in welchen sie angebracht waren, mit a_1 , a_2 und a_3 und in ähnlicher Weise die den letzteren entsprechenden Werthe von $(\varrho\beta)_n$ mit $(\varrho\beta)_1$ $(\varrho\beta)_2$ $(\varrho\beta)_3$. Oeffnung a_1 hatte also $15\frac{1}{2}$, a_2 hatte 18, a_3 hatte $20\frac{1}{2}$ und a hatte 23 Linien Durchmesser. Es berechnet sich also zunächst

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 &= 4,84 & \left(\frac{a}{a_1}\varrho\beta\right)^2 &= 1,873 \\ \left(\frac{a}{a_2}\right)^2 &= 2,657 \text{ und da } (\varrho\beta)^2 = 0,387 & \left(\frac{a}{a_2}\varrho\beta\right)^2 &= 1,028 \\ \left(\frac{a}{a_3}\right)^2 &= 1,588 & \left(\frac{a}{a_3}\varrho\beta\right)^2 &= 0,615. \end{aligned}$$

Nach Gleichung 1) § 72 findet sich der Ausfluss-Coefficient $(\varrho\beta)_n$ für divergente Ansatzrohre von dem engsten Querschnitte a_1 auf die äussere Oeffnung a_n bezogen

$$(\varrho\beta)_n = \varrho_n \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}.$$

Im Querschnitte 1 ist ϱ_1 , gleich dem Ausfluss-Coefficienten für ausgerundete Mundstücke, 0,97 zu nehmen. Da sich nach der Versuchs-Tabelle in § 72 für die Mündung a , ϱ etwas kleiner als 0,93 ergab, kann ϱ_3 in 26 Linien Entfernung davon nahezu 0,93 und ϱ_2 , als in der Mitte zwischen beiden liegend, annähernd genug 0,95 genommen werden.

Somit berechnet sich

$$(\varrho\beta)_1^2 = (0,97)^2 \cdot \frac{a_1}{a_1} = 0,941 \cdot 1 = 0,941$$

$$(\varrho\beta)_2^2 = (0,95)^2 \cdot \frac{a_1}{a_2} = 0,903 \cdot \left(\frac{15\frac{1}{2}}{18}\right)^2 = 0,669$$

$$(\varrho\beta)_3^2 = (0,93)^2 \cdot \frac{a_1}{a_3} = 0,865 \cdot \left(\frac{15\frac{1}{2}}{20\frac{1}{2}}\right)^2 = 0,494.$$

Setzt man nun die gefundenen Werthe in Gleichung 12) ein, so wird

$$h_{z1} = 2.33,6.(0,941 - 1,873) = - 62,6 \text{ Zoll}$$

$$h_{z2} = 2.33,6.(0,669 - 1,028) = - 24,1 \text{ „}$$

$$h_{z3} = 2.33,6.(0,494 - 0,615) = - 8,1 \text{ „}$$

in einer Uebereinstimmung mit den Venturi'schen Messungen, die wohl Nichts zu wünschen übrig lässt.

Aufgabe 2. Aus einem mit Wasser gefüllten Reservoir werde Wasser mittelst einer 0,04 M. weiten, 100 M. langen horizontalen Rohrleitung abgeführt und fliesse am Ende derselben frei aus. Der Wasserstand über der Mitte der Rohrmündung betrage 3 M. Es sollen die hydraulischen Druckverhältnisse durch Berechnung der Piezometerstände in den verschiedensten Punkten der Leitung untersucht werden.

Auflösung. Der Widerstandswerth $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ für die ganze Leitung

ist gleich $\frac{100}{0,04 \cdot 1,442} = 1734$. Dafür findet sich in der Widerstands-Tabelle

$$(\varrho\beta) = 0,156 \text{ und } (\varrho\beta)^2 = 0,0243.$$

Um nun zunächst den hydraulischen Druck beim Eintritte des Wassers in die Leitung zu finden, denke man sich also letztere beseitigt. War die Einmündung scharfkantig, so entspricht diesem Falle wie bei Oeffnungen in dünner Wand, $\beta_n = 0,707$ $\varrho_n = 0,87$. Für letztern Werth von ϱ_n findet sich in der Widerstands-Tabelle $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 2,96$. Da die

effektive Durchfluss-Geschwindigkeit aber nicht $0,87 \cdot 0,707 = 0,615\sqrt{2gh}$, sondern nur $0,156\sqrt{2gh}$ beträgt, so reducirt sich dieser Widerstandswerth auf $\frac{0,156}{0,615} \cdot 2,96 = 0,75$. Dafür findet sich der reducirte Widerstands-Coefficient $= 0,938$ und $(\varrho\beta)_n = 0,938 \cdot 0,707 = 0,663$, also

$$(\varrho\beta)_n^2 = 0,440.$$

Da $\frac{a}{a_n}$ hier gleich 1 ist, erhält man folglich durch Gleichung 12)

$$h_2 = 2h(0,440 - 0,024) = 0,832h.$$

Es werde nun angenommen, dass die Mündung nicht scharfkantig, sondern nach Mundstückform wohl ausgerundet sei. Wollte man für $(\varrho\beta)_n$ ohne Weiteres den Ausfluss-Coefficienten 0,97 einsetzen, so würde man aus Gleichung 12) den hydraulischen Druck grösser, als den hydrostatischen bekommen, was nicht möglich ist.

Bei einem ausgerundeten Mundstücke ist nämlich darum $\beta = 1$, weil in Folge des Druckes $2a_n\varrho_n^2h_n\gamma$ in dem weitem Theile desselben, das Wasser bereits mit der Anfangs-Geschwindigkeit $\varrho_n\sqrt{gh_n}$ aus der Oeffnung $2a$ in die a eintrat und hier dem Drucke $a_n\varrho_n^2h_n\gamma$ unterworfen wurde. Nach § 52 musste hierdurch die Ausfluss-Geschwindigkeit

$\varrho_n \sqrt{g(h_n + h_n)} = \varrho_n \sqrt{2gh_n}$ werden. Wenn nun aber trotz der wirksamen hydrostatischen Druckhöhe $\varrho_n^2 h_n$ in der Oeffnung, das Wasser vor letzterer nur mit der Geschwindigkeit $v_n = \frac{a}{a_n} v$ anlangt, so kann die der Kraft P Gleichung 3) entsprechende und in Rechnung zu bringende Gesamt-Druckhöhe nur sein

$$\varrho_n^2 h_n + \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \varrho_n^2 h_n + \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 (\varrho\beta)^2 h.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung 11) anstatt $2.(\varrho\beta)_n^2 \cdot h_n$ ein, so wird

$$13) \quad h_z = \varrho_n^2 h_n - \left(\frac{a}{a_n}\right)^2 (\varrho\beta)^2 h.$$

Gleichung 13) ist für den Gebrauch darum bequemer, weil es für jeden gegebenen Fall den Werth von β_n durch die übrigen Grössen ausdrückt und man daher dessen specielle Ermittlung spart. Sie ist jedoch nur so lange anwendbar, als man es mit positivem hydraulischem Drucke zu thun hat und, wie bereits früher bemerkt, v_n nicht grösser als $\varrho_n \sqrt{2gh_n}$ wird. Bei Aufgabe 1 würde sie daher beispielsweise ein unrichtiges Resultat ergeben. Ist für die besondere Anwendung zur Untersuchung von Rohrleitungen $a = a_n$ und $\beta = 1$, so schreibt man anstatt Gleichung 13)

$$14) \quad h_z = \varrho_n^2 h_n - \varrho^2 h$$

und ist wie in der vorliegenden Aufgabe ausserdem noch $h_n = h$

$$15) \quad h_z = h(\varrho_n^2 - \varrho^2).$$

Der Ausfluss-Coefficient nun für ein ausgerundetes Mundstück bei 3 M.

Druckhöhe ist sehr nahezu 0,97 entsprechend $\frac{1}{\frac{3}{d\sqrt{h}}} = 0,169$. Ausser-

dem ist in Folge des bedeutenden Gegendruckes in der Leitung der volle Abscheerungs-Widerstand darin wirksam geworden, der sich für jede Form und Länge nach dem vierten Abschnitte berechnen lässt. Nehmen wir die Länge des Mundstückes, in welcher derselbe zur uneingeschränkten Wirkung gelangt, gleich dem doppelten Durchmesser an, so findet sich dafür $\frac{1}{\frac{3}{d\sqrt{h}}} = \frac{2}{1,44} = 1,39$. Dies giebt einen Gesamt-

Widerstand von $0,169 + 1,39 = 1,56$, wofür die Widerstands-Tabelle $\varrho = 0,909$ ergiebt. Reducirt man nun den Gesamt-Widerstand 1,56 wie vorhin durch das Geschwindigkeits-Verhältniss $\frac{0,156}{0,909}$, so erhält man den gesuchten Widerstand mit 0,27 und dafür endlich

$$\varrho_n = 0,961, \text{ mithin } \varrho_n^2 = 0,923.$$

Gleichung 15) giebt uns hiernach den gesuchten Werth von h_z

$$h_z = h(0,923 - 0,024) = 0,899h.$$

Für die Entfernung von 40 M. vom Gefässe berechnet sich $\frac{1}{d\sqrt[3]{h}}$ auf

701 (wofür $\varrho = 0,237$) und nach dem Verhältniss $\frac{0,156}{0,237}$ reducirt auf 461. Dafür giebt die Widerstands-Tabelle

$$\varrho_n = 0,287 \text{ und } \varrho_n^2 = 0,082,$$

also

$$h_z = h(0,082 - 0,024) = 0,058h.$$

In 90 M. Entfernung, also 10 M. vor der Ausmündung, findet man

$$\frac{1}{d\sqrt[3]{h}} = 1568 \text{ und reducirt } 1500, \text{ dafür}$$

$$\varrho_n = 0,166 \text{ und } \varrho_n^2 = 0,027$$

folglich

$$h_z = h(0,027 - 0,024) = 0,003h.$$

Aufgabe 3. Wie hoch wird in derselben Rohrleitung der Piezometerstand in 40 M. Entfernung an einer Stelle sein, an welcher der Rohrdurchmesser auf 0,1 M. erweitert ist. Die Erweiterung sei gehörig ausgerundet, so dass der Widerstand dadurch nicht vergrössert wird.

Auflösung. $\left(\frac{a}{a_n}\right)^2$ berechnet sich hiernach auf $\left(\frac{0,04}{0,1}\right)^4 = 0,026$.

Anstatt 0,024 kommt also $0,026 \cdot 0,024 = 0,0006$ als negatives Glied in die Klammer Gleichung 15) und h_z wird

$$h_z = h(0,0820 - 0,0006) = 0,0814h.$$

Aufgabe 4. Anstatt horizontal angebracht hänge das 0,04 M. weite Rohr bei derselben Druckhöhe im Gefäss lothrecht darunter. In welcher Höhe unter dem Wasserspiegel wird der ausfliessende Strahl abreißen und der continuirliche Ausfluss aufhören? An welchem Punkte wird der hydraulische Druck gleich Null? und wie gross wird die Ausfluss-Geschwindigkeit sein?

Auflösung. Das Abreißen des Wassers im Rohre wird an der Stelle stattfinden, an welcher $h_z = -8,3$ M. geworden ist, an der also der Bedingung genügt wird

$$a) \ 2(\varrho\beta)_n^2 h_n - 2(\varrho\beta)^2 h = -8,3$$

und h_2 muss gleich Null werden, wo

$$b) \ (\varrho\beta)_n^2 h_n = (\varrho\beta)^2 h \text{ ist.}$$

Sobald Gleichung a) an der Einmündung in das Rohr statt hat, wird eine Verlängerung des letztern also offenbar keine Rückwirkung mehr auf den Ausfluss aus dem Gefässe haben können und letzteren unverändert lassen. $(\varrho\beta)_n^2$ fanden wir bereits in Aufgabe 3 an der Mündungsstelle $(0,615)^2 = 0,378$. Setzt man nun in Gleichung a) für $h_n = 3$ und $(\varrho\beta)_n^2 = 0,378$, so wird

$$(\varrho\beta)_n^2 = 17,73.$$

Da nun aber bei dem hier in Betracht gezogenen Zustande der hydraulische Druck im ganzen Rohre negativ, also der Widerstand = Null ist, muss $(\varrho\beta) = 0,815$ dem Ausfluss-Coefficienten für kurze cylindrische Ansatzröhren sein, woraus sich

$$h = \frac{17,92}{(0,815)^2} = 27 \text{ M. findet.}$$

Setzt man dagegen dieselben Zahlenwerthe in Gleichung b) ein, so erhält man

$$h = 1,71 \text{ M.}$$

woraus eben nur folgt, dass es ausserhalb des Gefässes keinen Punkt in der Rohrleitung geben kann, in dem der hydraulische Druck positiv wird. Er kann nur Null werden, wenn in Gleichung b) $(\varrho\beta)_n = \varrho\beta$ wird, d. h. wenn das ausfliessende Wasser sich nicht an die Rohrwandung anschliesst, oder die Rohrlänge Null ist.

Da die grösstmögliche Druckhöhe, welche in der Einmündung des Rohres wirksam werden kann, $3 + 8,3 = 11,3$ M. beträgt, so berechnet sich die Maximal-Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser ausfliessen kann

$$v = 0,815 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{11,3} = 12,14 \text{ M.}$$

§ 111.

Hydraulischer Druck in offenen Leitungen.

Wenn sich Wasser in offenen Leitungen mit der Geschwindigkeit v bewegt, so kann es dieselbe nur in Folge einer Druckhöhe $\frac{v^2}{2g}$, der jedes Theilchen unterworfen ist, erlangt haben. Ausserdem befindet sich jedes Theilchen in der Tiefe t unter der Wasseroberfläche unter der Pressung der Wasserstandshöhe t . Um den hydraulischen Druck für die Flächeneinheit irgend eines Wassertheilchens zu finden, muss man also in Gleichung 4 § 110 setzen

$$P = \left(t + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma$$

$$m = \frac{v\gamma}{g}$$

$$v_n = v$$

wonach man erhält

$$1) \quad h_z = \frac{z}{\gamma} = t - \frac{v^2}{2g}.$$

Man erhält also die hydraulische Druckhöhe irgend eines in offenen Leitungen fliessenden Wassertheilchens,

wenn man von seiner hydrostatischen Druckhöhe seine Geschwindigkeitshöhe in Abzug bringt.

Für $\frac{v^2}{2g} = t$ wird in Gleichung 1) $h_z = 0$ und das Wasser übt in diesem Falle keinen Seitendruck auf die Wandungen aus. Fliesst beispielsweise in einem Gerinne Wasser mit der Geschwindigkeit von 2 M., so wird ein in der Tiefe $\frac{2^2}{19,62} = 0,204$ M. unter der Oberfläche gebohrtes Löchelchen in der Seitenwand weder Wasser ausspritzen noch Luft einsaugen. Jedes höher gebohrte Loch muss dagegen Luft nachsaugen, weil h_z hier negativ wird.

Da das Wasser in offenen Leitungen in jedem Querschnitts-Elemente mit verschiedener Geschwindigkeit fliesst, so folgt, dass darin auch die verschiedensten Pressungen statthaben. Da die Bodenschichten eine geringere Geschwindigkeit haben, als die darüber fließenden, so folgt ferner daraus, dass in letzteren ein grösserer Theil des den statischen Gleichgewichts-Zustand bedingenden Gegendruckes aufgehoben sein muss, als in erstern, und dass demgemäss ein stetes Uebertreten von Wassertheilchen aus den tieferen Schichten in die höhern vor sich gehen muss. Dass dem so sei, kann man an der eigenthümlichen Weise beobachten, in der das Wasser in Flüssen und Canälen seine Geschwindigkeit gegen die Ufer hin mässigt und von den letzteren stetig ab nach der Mitte hin zurückwirbelt. Man darf sich also die Voreilung der einzelnen Schichten in Strombetten keinesweges als eine förmliche Verschiebung derselben über und nebeneinander, sondern nur als eine ganz allmähliche Ausbreitung und Verlängerung einer Schicht auf Kosten der andern vorstellen. Dass auch das Zurückbleiben der Oberflächenschicht lediglich von einem Einsinken der obern Wassertheilchen zwischen die untern herrührt, ist bereits § 35 angedeutet worden. Dass daher auch der sogenannte Stromstrich, in welchem das Wasser seine grösste Geschwindigkeit hat, stets höher liegen muss, wie in demselben Profile der Wasserspiegel an den Ufern, bedarf nach dem Vorhergehenden keiner weiteren Ausführung. Zumal bei schmalen und rasch fließenden Gebirgsströmen mit tiefen Stromrinnen und flachen Ufern ist diese Erhebung des Stromstriches eine so merkliche, dass man sie bei Hochfluthen mit blossen Auge sehr deutlich wahrnehmen kann. Sie lässt sich ziemlich annähernd berechnen, wenn die Form des Querprofiles gegeben ist.

Nimmt man die Horizontale durch die Wasserspiegel an den beiden gegenüberliegenden Ufern als Abscissenaxe für die x und bezeichnet mit y die Erhebungen darüber in dem mittlern Theile des Querprofiles, so übt jede unendlich dünne Vertikal-Schicht von der Länge $= 1$ und der

Tiefe t , welche mit der Geschwindigkeit v fliesst, auf die benachbarte Parallel-Schicht den Druck

$$\gamma \left(\frac{t}{2} - \frac{v^2}{2g} \right) t$$

aus, empfängt aber von derselben nur den Gegendruck

$$\gamma \left(\frac{t}{2} - \frac{(v + dv)^2}{2g} \right) t.$$

Die Differenz

$$1) \gamma \cdot \frac{v dv}{g} t$$

kann nur durch eine Erhebung des rascher fliessenden Längenelementes über das langsamer fliessende um die Höhe dy , welche ihren Druck um

$$2) \gamma dy t$$

vermehrt, ausgeglichen werden. Durch Gleichsetzung von 1) und 2) ergibt sich daher die Differenzial-Gleichung

$$3) dy = \frac{v dv}{g}.$$

Bezeichnet man die mittlere Geschwindigkeit im Stromstriche mit v_x und die in einer andern beliebigen Stelle desselben Querprofiles mit v und nimmt das Integral von Gleichung 3) zwischen v_x und v , so erhält man die Wasserspiegel-Differenz zwischen beiden Stellen mit

$$4) y_x - y = \frac{1}{2g} (v_x^2 - v^2) = 0,051 (v_x^2 - v^2).$$

Aus der Eitelwein'schen Geschwindigkeits-Formel folgt ferner sehr annähernd

$$v_x : v = \sqrt{T} : \sqrt{t}$$

wenn man mit T die grösste Tiefe im Stromstrich und mit t die kleinere, da wo die Geschwindigkeit v stattfindet, bezeichnet. Daraus ergibt sich

$$v = \frac{v_x \sqrt{t}}{\sqrt{T}}$$

$$dv = \frac{v_x}{\sqrt{T}} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$v \cdot dv = v_x^2 \cdot \frac{dt}{2T}$$

Setzt man letztern Werth in Gleichung 3), so wird

$$5) dy = \frac{v_x^2}{2g} \cdot \frac{dt}{T}$$

Das Integral zwischen T und t giebt

$$6) y_x - y = \frac{v_x^2}{2g} \cdot \frac{T - t}{T} = 0,051 v_x^2 \cdot \frac{T - t}{T}$$

und für $t = 0$ folgt die Gesamt-Erhebung bei allmählig sich abflachenden Ufern

$$7) \ y_x = \frac{v_x^2}{2g} = 0,051 \ v_x^2.$$

§ 112.

Die Geschwindigkeits-Kurve.

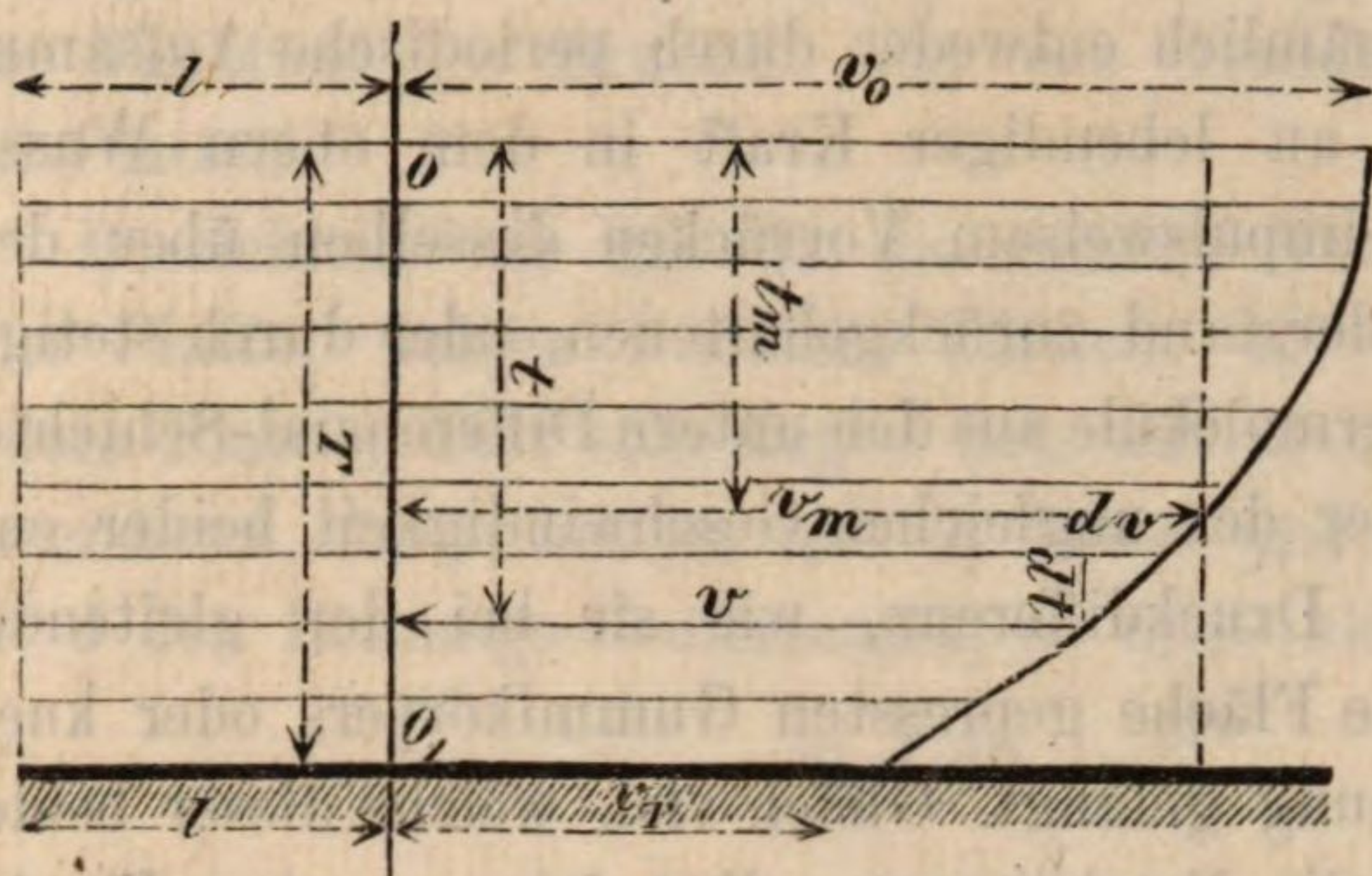
Die sogenannte Geschwindigkeits-Kurve entsteht, wie bereits § 90 erläutert, wenn man die verschiedenen Tiefen im Längenprofile eines Flusslaufes als Abscissen und die Geschwindigkeiten, mit welchen sich das Wasser in diesen Tiefen bewegt, als Ordinaten aufträgt. Wer den neuesten wissenschaftlichen Bestrebungen und praktischen Untersuchungen auf dem Gebiete der Hydrometrie gefolgt ist, dem wird es nicht entgangen sein, dass dieselben in der Erforschung dieser Kurve ihren gemeinschaftlichen Zielpunkt genommen und damit die endliche Lösung vieler Unklarheiten und Räthsel in Erwartung gestellt haben. Wir vermögen weder diese Erwartung, noch die Ansicht zu theilen, dass die genaue Kenntniss der Geschwindigkeits-Kurve von erheblichem praktischen Nutzen für die Hydrometrie werden könne, denn ihre Natur ist so veränderlich und von so vielen der Beobachtung zu unterwerfenden Neben-Umständen abhängig, dass die Erforschung und Feststellung der letztern in den meisten Fällen mehr Mühe und Zeitaufwand erfordern möchte, als eine direkte Messung der verschiedenen Geschwindigkeiten.

Die normale und gesetzmässige Ausbildung der Kurve setzt zunächst einen vollkommenen Beharrungs-Zustand in der gleichförmigen Bewegung und der letztere wiederum durchaus ganz constante und keinen plötzlichen Formveränderungen unterworfenen Querprofile voraus. Keine auch nur lokale Beschleunigung oder Verzögerung kann ganz ohne Rückwirkung auf ihre Gestalt bleiben. Sind aber auch diese Bedingungen erfüllt, so wird sie damit noch nicht ganz unabhängig von der Beschaffenheit der Flusssohle und ist endlich auch die letztere als normal gebildet zu betrachten, so ist noch entweder eine vollkommene Windstille, oder ziemliche Uebereinstimmung der Richtung und Geschwindigkeit des Windes mit der des Wassers erforderlich, um eine Verschiebung der Kurve durch Verzögerung oder Beschleunigung an der Oberfläche in Folge der Stosswirkung der bewegten Luft gegen die letztere zu vermeiden. Wenn es auch möglich ist, alle diese Umstände mit Erfolg in Rechnung zu bringen, so z. B. die Einwirkung des Windes für jede Geschwindigkeit desselben nach Analogie des § 105 als von ganz constanter Grösse in Zahlen auszudrücken, so scheint uns der Aufwand, welchen eine derartige Untersuchung erfordert, nicht in angemessenem

Verhältnisse zu dem davon zu erwartenden Nutzen zu stehen. Wir werden daher unsere Aufgabe im Wesentlichen gelöst haben, wenn wir die Gleichung derjenigen Kurve herleiten, welche der Voraussetzung vollkommen normaler Verhältnisse entspricht und dabei deren Scheitelpunkt in Uebereinstimmung mit einer der bedeutendsten hydrotechnischen Autoritäten (Hagen, vergl. deutsche Bauzeitung Jahrg. 1871 No. 49) in die Wasseroberfläche verlegen.

Wenn mehrere mit dem relativen Gefälle α geneigte Wasserschichten von der Länge l , der Breite $= 1$, der gleichen Dicke

Fig. 113.



dt und der Gesamtdicke T Figur 113 in einer Flussstrecke schliesslich die gemeinsame Geschwindigkeit v erlangt haben, so muss nach der hydro-mechanischen Grundgleichung § 44 das Produkt

$$v = \frac{P - R}{m}$$

nicht nur für das ganze Profil, sondern auch für jede Schicht von der Dicke t constant sein, also die Proportion statthaben

$$P - R : m = P_1 - R_1 : m_1.$$

Da aber jede Masseneinheit der beschleunigenden Kraft $\alpha \gamma$ unterworfen ist, oder bei gleichen Druckhöhen die beschleunigenden Kräfte proportional den Querprofilen, in denen sie wirken, sind, muss

$$P : P_1 = m : m_1$$

folglich auch

$$R : R_1 = m : m_1$$

und weil die über verschiedenen Tiefen t, t_1 sich bewegenden Massen bei gleichen Breiten und Längen proportional diesen Tiefen sein müssen, auch

$$R : R_1 = t : t_1$$

sein, gültig für jede beliebige Länge l , sowohl für eine so grosse, dass die Differenz $v_o - v_T$ Figur 113 dagegen verschwindend klein wird, als auch für die Längeneinheit. Setzen wir für $t_1 = T$ die ganze Tiefe bis zur Flusssohle, auch den Widerstand R_1 an letzterer $= \mu$, bezeichnen ferner mit μ_1 den Widerstand, welcher dem obern Theile des Wasserlaufes von der Dicke t unter der Oberfläche, in seiner horizontalen Berührungsfläche mit dem untern pro Flächeneinheit entgentreten muss, so können wir also schreiben:

$$1) \mu_1 = \frac{\mu t}{T}.$$

Wir haben bereits § 35 auf Bedingungs-Gleichung 1) als nothwendige Folge der geomechanischen Grundgesetze aufmerksam gemacht. Sie veranlasst uns zunächst, wie wir dies schon § 111 gethan haben, von der Voraussetzung Abstand zu nehmen, dass die Voreilung der obern Schichten über den untern durch stetige Abscheerung über letzteren vor sich gehen könne, denn eine solche setzt voraus, dass in jeder horizontalen Schnittfläche der Werth von $\mu = 2,63$ Kilogr., welcher die Abscheerung bedingt, erreicht werde, was aber nach Gleichung 1) um so weniger der Fall ist, je näher man sich solche Schnittflächen der Oberfläche denkt. Es bleiben also nur zwei naturgemässe Wege übrig, auf welchen diese Voreilung erfolgen kann, nämlich entweder durch periodische Aufsammung eines Ueberschusses an lebendiger Kraft in dem obern Wasser mittelst Aufstauung und impulsweisem Vorrücken desselben über dem untern durch den Bodenwiderstand zurückgehaltenen, oder durch stetiges Uebertreten einzelner Wassermoleküle aus den untern Differenzial-Schichten in die obern, in Folge einer der ungleichen Geschwindigkeit beider entsprechenden hydraulischen Druckdifferenz, wie sie bei der gleitenden Bewegung eines gegen eine Fläche gepressten Gummikörpers oder knetbaren Teiches zur Anschauung gelangt. Gleich viel, welche dieser beiden Voraussetzungen zutrifft, die Erscheinung selbst ist nur eine Einzige und ganz gesetzmässige, die Grösse ihres Resultates wird in dem Differenzial-Verhältniss $\frac{dv}{dt}$ als Maass der Voreilung in jedem Horizontalschnitte gemessen und entspricht einem ganz bestimmten Arbeitsquantum, bei ein und derselben Masse, also auch einer ganz bestimmten relativen Beschleunigung und darauf wirksamer Kraft. Suchen wir daher nach beiden Voraussetzungen richtige Beziehungen für die letztern, so müssen beide gleiche Resultate ergeben und durch ihre Gleichsetzung muss sich die Lösung für die vorliegende Aufgabe finden.

Um uns den Vorgang einer impulsweisen Verschiebung, wie wir solche als nothwendig erkannt haben, recht klar zu machen, treten wir in ein Platten-Walzwerk, beladen einen der dort im Gebrauch befindlichen kleinen Rollwagen mit in Packetform regelmässig übereinander geschichteten Metallplatten von gleicher Grösse und gleicher Dicke, versetzen denselben auf einem der Schienengeleise in eine gewisse Geschwindigkeit v , lassen ihn damit gegen ein im Geleise befindliches Hinderniss stossen und dadurch plötzlich in Stillstand gerathen. Waren die Platten von länglich rechteckiger Form in der Richtung der Bewegung so aufgeschichtet, dass ihre vordere Kopffläche eine zu ihrem Lagerboden normale Ebene bildete und von hinreichend ebener und gleichförmiger Flächenbeschaffenheit, so wird das ganze Packet nach dem Stosse verschoben, und zwar jede obere Platte über die unter ihr liegende um die

ganz gleiche Differenz dv vorgerückt sein. Die Begrenzungslinie, welche nunmehr die vordern Kopfenden im vertikalen Längen-Durchschnitte berührt, wird bis auf einen abweichenden Umstand, welcher sie zu einer geraden Linie macht, den Ursprung und die Natur unserer Geschwindigkeits-Kurve haben.

Die Arbeit nämlich, welche zwischen irgend einer Platte und der darunter liegenden in Folge des Stosses verrichtet wurde, und die aus der Bewegungs-Geschwindigkeit v resultirende lebendige Kraft mv^2 aller darüber liegenden Platten vernichtete, ist das Produkt aus der Flächenreibung und dem damit zurückgelegten Wege dv . Die erstere aber ist eine Funktion des Druckes oder des Gewichtes aller darüber liegenden Platten.

Bezeichnen wir mit dv die relative Verschiebung oder Voreilung einer Platte, welche t andere Platten, mit dv_1 diejenige, welche t_1 andere Platten über sich liegen hat, mit m und G Masse und Gewicht der ersteren, ferner mit m_1 und G_1 Masse und Gewicht der letzteren und mit δ den Reibungs-Coefficienten, so muss also die Arbeitsgleichung

$$G \cdot \delta \cdot dv = \frac{mv^2}{2}$$

$$G_1 \delta \cdot dv_1 = \frac{m_1 v^2}{2}$$

und die Proportion statthaben

$$2) \quad G dv : G_1 dv_1 = m : m_1, \text{ woraus } m G_1 dv_1 = m_1 G \cdot dv.$$

Da aber hier

$$G : G_1 = m : m_1 \text{ und } m \cdot G_1 = m_1 G$$

folgt aus Gleichung 2) durch Division, wie beobachtet

$$dv_1 = dv.$$

Anders gestaltet sich das Verhältniss, wenn der Reibungs-Widerstand nicht eine Funktion des darüber liegenden Gewichtes, sondern in allen Schichten constant gleich μ der Abscheerungs-Festigkeit des Wassers ist.

Wir erhalten dann, indem wir in Proportion 2) $G\delta = G_1\delta$, also $G = G_1$ setzen und berücksichtigen, dass

$$m : m_1 = t : t_1$$

ist

$$dv : dv_1 = t : t_1$$

oder

$$\frac{dv}{dt} : \frac{dv_1}{dt} = t : t_1$$

und daraus die Differenzial-Gleichung der Parabel

$$3) \quad \frac{dv}{dt} = \text{tang} \alpha \frac{t}{T} \text{ oder } dv = \frac{\text{tang} \alpha}{T} \cdot t \cdot dt$$

wenn wir für das beliebige t_1 die ganze Tiefe T des Profiles bis zum

Boden setzen, auch derselben entsprechend mit $\tan\alpha = \frac{dv_T}{dt}$ die Tangente der Parabel, welche zur Bodengeschwindigkeit v_T gehört, bezeichnen.

Das Integral von Gleichung 3) und zwar zwischen $v = v$ und $v = v_T$ auf der linken, sowie demgemäss $t = t$ und $t = T$ auf der rechten Seite giebt die gesuchte Gleichung der Geschwindigkeits-Kurve

$$4) \quad v = v_T + \frac{\tan\alpha}{2} \cdot T - \frac{\tan\alpha}{2} \cdot \frac{t^2}{T}$$

Es bleibt uns nunmehr übrig, $\tan\alpha$ zu bestimmen, wonach die Aufgabe gelöst sein wird.

Bezeichnen wir mit μ ganz allgemein die hydraulische Pressung der Flächeneinheit, welcher die unendlich dünne Bodenschicht in Folge des Boden-Widerstandes unterliegen muss und mit μ_1 diejenige der zunächst darüber liegenden Schicht von der Dicke dt , so erhalten wir aus Gleichung 1), wenn wir daselbst für $t = T - dt$ setzen

$$\mu_1 = \mu \frac{T - dt}{T}.$$

Die Differenz $\mu - \mu_1 = \mu - \mu \cdot \frac{T - dt}{T}$ oder

$$5) \quad \mu - \mu_1 = \frac{\mu dt}{T}$$

drückt die Differenzial-Pressung der Flächeneinheit aus, mit welcher die Wassertheilchen der Schwerkraft entgegen aus der untern Schicht in die obere stetig überzutreten bestrebt sein müssen. Sie erzeugt die Geschwindigkeits-Differenz dv_T , muss also vollkommen identisch sein mit der aus § 111 Gleichung 1) resultirenden Differenzial-Pressung

$$6) \quad \frac{(v_T + dv_T)^2}{2g} \gamma - \frac{v_T^2 \gamma}{2g} = \frac{v_T \cdot dv_T \gamma}{g}.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe 5) und 6) giebt

$$\frac{v_T \cdot dv_T}{g} \cdot \gamma = \frac{\mu dt}{T} \quad \text{und} \quad \frac{dv_T}{dt} = \frac{\mu g}{v_T \cdot \gamma \cdot T}$$

auf jede Flächen-, Längen- und Zeit-Einheit der Bodenschicht, also auf die Länge v_T , für welche Figur 113 die Verschiebung darstellen soll

$$7) \quad \frac{dv_T}{dt} = \frac{\mu g}{\gamma T} = \tan\alpha.$$

Hier bleibt nun noch μ zu bestimmen. Wäre die Oberfläche des Grundbettes eine absolut ebene, so könnten wir μ einfach 2,63 Kilogr. gleich dem Abscheerungs-Widerstande pro $\square M.$ setzen. In der Natur kommt indessen wohl kein Flussbett vor, in dem das Wasser nicht eine Stossarbeit der vollkommensten Wirkung gegen die kleinsten scharfkantigen Sandkörnchen verrichten muss, die völlig der § 105 hergeleiteten gleich kommt und deren ganz constante Pressung sich gemäss Gleichung 1) § 105 ausdrückt durch

$$8) \mu = 0,238 \frac{v_T^2 \gamma}{2g}$$

für die Einheit der Berührungsfläche.

Dagegen wird sich unter den allergünstigsten Verhältnissen die Minimal-Pressung immer noch durch $\mu = 2,63$ Kilogr. ausdrücken und für Bodengeschwindigkeiten unter 0,46 M., bei denen μ in Gleichung 7) $= 2,63$ wird, constant bleiben und letzteren Werth behalten.

Setzt man μ aus Gleichung 8) in Gleichung 7) ein, so erhält man endlich

$$9) \tan \alpha = \frac{0,12 v_T^2}{T}$$

und setzt man diesen Werth von $\tan \alpha$ in Gleichung 4) ein

$$10) v = v_T + 0,06 v_T^2 \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right).$$

Für $t = T$ wird hier $v = v_T$, für $t = 0$ erhält man v_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche

$$11) v_0 = v_T + 0,06 v_T^2.$$

Aus Gleichung 11) folgt ferner

$$12) v_T = -8,3 + \sqrt{16,7 v_0 + 69,4}.$$

Behufs Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit v_m muss man den Flächeninhalt J des ganzen Kurvenstückes rechts von 00_1 Figur 113 berechnen und denselben durch T dividiren. Das Differenzial desselben dJ drückt sich aus

$$dJ = v dt.$$

Setzt man hierin für v den Werth aus Gleichung 10), so wird

$$dJ = v_T dt + 0,06 v_T^2 \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) \cdot dt.$$

Das Integral von $t = 0$ bis $t = T$ durch T dividirt giebt

$$13) v_m = v_T + 0,06 v_T^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = v_T + 0,04 v_T^2.$$

Die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Profiles liegt also da, wo $\frac{t^2}{T^2} = \frac{1}{3}$ ist, woraus folgt, dass t_m diejenige Tiefe unter der Oberfläche, in welcher sie gemessen wird

$$14) t_m = T \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 T$$

beträgt, während sie nach den neuesten Experimental-Forschungen von Hagen auf $0,556 T$ gefunden sein soll.

Aus Gleichung 10) bis 13) erhält man endlich noch die nachfolgenden Relationen

$$15) v_0 - v_m = 0,020 v_T^2$$

$$16) v_T = 7,1 \sqrt{v_0 - v_m}$$

$$17) v_T = -12,5 + \sqrt{25 v_m + 156,3}$$

$$18) v = v_0 - 3(v_0 - v_m) \frac{t^2}{T^2}$$

$$19) v = v_0 - \left(8,3 + \sqrt{16,7v_0 + 69,4}\right)^2 \frac{t^2}{T^2}.$$

Wir sind leider nicht in der Lage, die Genauigkeit vorstehender Beziehungen an exakten Versuchs-Resultaten prüfen zu können und werden aus den Eingangs angeführten Gründen auch wohl schwerlich in diese Lage kommen, haben aber zu bemerken, dass alle bisher bekannten Versuchs-Resultate auch eben so wenig dazu ausreichen, ihre Richtigkeit zu widerlegen, indem sie nämlich ziemlich genau deren mittleren Werth ausdrücken.

In einem Falle, bei dem die Geschwindigkeits-Kurve an einem Strome von 60 Fuss Tiefe durch Humphreys und Abbot mit ausnahmsweiser Regelmässigkeit gemessen wurde (vergl. Erbkams Zeitschrift Jahrg. 1868 Seite 68) findet sich dieselbe Kurve durch Gleichung 10) und ihr Tangentenwerth an der Flusssohle durch Gleichung 9) mit einer auffallenden Genauigkeit bis zur Höhe von 30 Fuss über der Flusssohle.

Von den ältern Versuchen, deren man in dem Werke von Lahmeier (Erfahrungs-Resultate, Braunschweig 1845) eine schätzenswerthe Zahl mitgetheilt findet, nähert sich Gleichung 12) am meisten den Funk'schen. Beispielsweise ergiebt sich

v_0	Nach Gleichung 12).	Nach Funk.
	v_T	v_T
1 Fuss	0,87	0,85
2 „	1,8	1,7
3 „	2,6	2,5
4 „	3,4	3,4
5 „	4,1	4,2
6 „	4,7	5,1

Den Funk'schen Ergebnissen stehen so grosse Differenzen von Andern, als Eitelwein und Brünings, entgegen, dass die vorstehenden ganz dagegen verschwinden.

Für Geschwindigkeiten unter 0,46 M. behält, wie bereits bemerkt, $\tan \alpha$ den constanten Werth

$$\tan \alpha = \frac{\mu g}{\gamma T} = \frac{0,026}{T} \text{ für Meter,}$$

woraus folgt $20) v = v_T + 0,013 \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)$

$$21) v_m = v_T + 0,009$$

$$22) v_0 = v_T + 0,013.$$

Heinemann, Hugo

Die Rational-Theorie der Bewegung des Wassers als Lehrbuch der
Hydrodynamik und für den praktischen Gebrauch des Hydrotekten auf vollstä
ndig neuen Grundlagen bearbeitet

Hagen 1872

A.hydr. 48 gr

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10995109-8